MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 21. lipnja 2021.

ZADATAK 1

(5 bodova) Zadana je kvadratna forma $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s

$$q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Svedite formu na kanonski oblik, odredite koordinate u kojima forma ima kanonski oblik i odredite definitnost forme q.

Rješenje:

Pripadajuća simetrična matrica (matrica za koju je $q(x) = \langle Ax, x\rangle$) je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Njene svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$. Budući da su svojstvene vrijednosti nenegativne, forma je **pozitivno semidefinitna** (zbog $\lambda_1 = 0$ nije ujedno pozitivno definitna). Pripadajući (normirani) svojstveni vektori su:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1. \end{bmatrix}.$$

Neka je

$$Q = (v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ako uvedemo supstituciju $y = Q^T x$ imamo kanonski oblik:

$$q(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle QDQ^T x, x\rangle = \langle DQ^T x, Q^T x\rangle = \langle Dy, y\rangle = 3y_2^2 + 6y_3^2,$$

to jest

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3y_2^2 + 6y_3^2.$$

Bodovanje: **3 boda** za nalaženje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora matrice A, **1 bod** za definitnost forme, **1 bod** za ispravno određen kanonski oblik forme i pripadne koordinate.

Česte greške:

Nepravilno korištenje Sylvesterovog kriterija
Primijetite da se u **teoremu 6.5** u skripti s vježbi spominju samo pozitivno/negativno definitne forme, no ne i semidefinitne forme. Iskaz teorema je takav s razlogom.

Ako su glavne minore simetrične matrice pridružene formi nenegativne, forma ne mora biti pozitivno semidefinitna. Ekvivalentno, ako su glavne minore simetrične matrice nenegativne, ona može imati negativnih svojstvenih vrijednosti.
Kontraprimjer:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \sigma(B) = \left\{0, \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{33})\right\}, \ D_1 = 1, D_2 = D_3 = 0.$$

Ako ste zaključili da je forma pozitivno semidefinitna na ovaj način, izgubili ste jedan bod.
Napomena: Sylvesterov kriterij služi određivanju definitnosti forme **bez računanja** spektra pridružene simetrične matrice. Ako zadatak od vas već traži određivanje spektra te matrice, puno je lakše odrediti definitnost iz spektra (ne trebate računati nikakve dodatne determinante). Tako da je matrica A i bila (recimo) pozitivno definitna, trošite vrijeme na računanje glavnih minora bez potrebe.

Još neke greške:

1. Korištenje supstitucije $y = Qx$ umjesto $y = Q^T x$. (pola boda)
2. Pisanje kanonskog oblika kao:
$$q(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2 \text{ ili } q(y_1, y_2, y_3) = y_2^2 + y_3^2.$$
To je kao da zadajete potpuno drukčiju funkciju! (pola boda)
3. Ako dobijete da je $V_A(\lambda) = \{0\}$, to znači da λ **nije** svojstvena vrijednost matrice, te da ste najvjerojatnije pogriješili u računanju karakterističnog polinoma ili određivanju njegovih nultočaka. To nikako ne znači da je nul-vektor svojstveni vektor za λ (pogledati definiciju svojstvenog vektora/svojstvene vrijednosti!) (dva boda)

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 21. lipnja 2021.

ZADATAK 2

Na prostoru $\mathcal{P}_2$ realnih polinoma stupnja manje ili jednako 2, dan je skalarni produkt

$$(p,q) = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4}p''(0)q''(0).$$

a) (3 boda) Koristeći Gram-Schmidtov postupak ortonormirajte sustav $\{2, 1+t\}$ i dopunite ga do ortonormirane baze za $\mathcal{P}_2$.

b) (2 boda) Odredite $p \in \mathcal{P}_2$ tako da je norma

$$||p'(t) - (t^2+1)||$$

minimalna. Navedena norma je inducirana skalarnim produktom iz a) dijela zadatka. Uputa: uočite da je deriviranje linearan operator i koristite teorem o najboljoj aproksimaciji.

Rješenje: a)

$$e_1 = 2/||2|| = 2/\sqrt{(2,2)} = 2/\sqrt{2(0)2(0) + 2'(0)2'(0) + (1/4)2''(0)2''(0)} = 2/2 = 1$$
$$b_2 = 1+t-(1+t,e_1)e_1 = 1+t-((1+t)(0)1(0) + (1+t)'(0)1'(0) + (1/4)(1+t)''(0)1''(0))$$
$$= 1+t-1 = t$$
$$e_2 = b_2/||b_2|| = t/\sqrt{t(0)t(0) + t'(0)t'(0) + (1/4)t''(0)t''(0)} = t$$

Dobili smo sustav $\{1,t\}$, dodajmo t^2 i ortonormirajmo.

$$\begin{aligned} b_3 &= t^2 - (t^2,e_1)e_1 - (t^2,e_2)e_2 \\ &= t^2 - [t^2(0)1(0) + (t^2)'(0)1'(0) + (1/4)(t^2)''(0)1''(0)] \\ &\quad - [t^2(0)t(0) + (t^2)'(0)t'(0) + (1/4)(t^2)''(0)t''(0)]t = t^2 \\ e_3 &= b_3/||b_3|| = t^2/\sqrt{(t^2,t^2)} \\ &= t^2\sqrt{t^2(0)t^2(0) + (t^2)'(0)(t^2)'(0) + (1/4)(t^2)''(0)(t^2)''(0)} = t^2 \end{aligned}$$

Dakle $\{1,t,t^2\}$ je otronormirana baza za $\mathcal{P}_2$.

b) Za $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2$ imamo $p'(t) = a_1 + 2a_2t$. Dakle slika operatora derivacije je potprostor generiran sa 1 i t. Označimo ga sa M. Imamo $M = \text{Im }' = [\{1,t\}]$. Vektor iz M koji je najbliži polinomu t^2+1 je ortogonalna projekcija od t^2+1 na M Dakle rješavamo

$$p'(t) = (t^2+1,1)1 + (t^2,t)t$$
$$a_1 + 2a_2t = 1 \implies a_1 = 1, a_2 = 0, a_0 \in \mathbb{R}$$

Traženo rješenje je $p(t) = a_0 + t$, $a_0 \in \mathbb{R}$

Alternativno, za $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2$ imamo
$||p'(t) - (t^2+1)|| = ||-t^2 + 2a_2t + (a_1-1)|| = (1 + (2a_2)^2 + (a_1-1)^2)^{\frac{1}{2}}$. Minimum se postiže za $a_0 \in \mathbb{R}, a_1 = 0$ i $a_2 = 0$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 21. lipnja 2021.

ZADATAK 3

Neka je $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ funkcional za koji vrijedi

$$f\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = 2, \quad f\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right) = 0, \quad f\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right) = 1, \quad f\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) = 2.$$

a) (3 boda) Pronađite matricu $T \in M_2(\mathbb{R})$ za koju je $f(A) = \langle A, T\rangle$, $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$.

b) (2 boda) Navedite Rieszov teorem o reprezentaciji linearnih funkcionala i objasnite zašto u a) dijelu nismo dobili jedinstveni T.

Rješenje:

a) Standardni skalarni produkt na $M_2(\mathbb{R})$ je zadan s $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^\tau)$ pa ako traženu matricu T zapišemo kao $T = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 2\\ a-b-c+d &= 0\\ b+c+d &= 1\\ a+b+c &= 2 \end{aligned},$$

čije je rješenje $a = 1, d = 0, b = t, c = 1-t, t \in \mathbb{R}$, dakle T je bilo koja matrica oblika $\begin{bmatrix}1 & t\\ 1-t & 0\end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$, na primjer $T = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

b) Rieszov teorem o reprezentaciji: Neka je V unitaran prostor i f linearan funkcional na V. Tada postoji jedinstveni $a \in V$ takav da je $f(x) = \langle x, a\rangle$ za sve $x \in V$.

Uzmimo sada linearan funkcional f kao u a) dijelu. Tražena matrica T nije jedinstvena jer f nije jedinstveno određen navedenim uvjetima (za svaki $t \in \mathbb{R}$ dobit ćemo jedan funkcional koji zadovoljava postavljene uvjete). To je zato jer je f navedenim uvjetima zadan na potprostoru $[\{S_1, S_2, S_3, S_4\}]$, gdje su S_1, S_2, S_3, S_4 četiri spomenute matrice, a skup $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ je linearno zavisan i zato ne razapinje cijeli $M_2(\mathbb{R})$.

Drugim riječima, postoji beskonačno mnogo linearnih funkcionala f koji zadovoljavaju postavljene uvjete i za svakog od njih, prema Rieszovom teoremu, postoji jedinstvena matrica T koja ih reprezentira.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 21. lipnja 2021.

ZADATAK 4

(5 bodova) Odredite sve $x, y \in \mathbb{C}$ za koje se linearni operator $A : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ čiji je matrični prikaz u paru baza (e, f) dan sa

$$A(f,e) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & x-2 & -1 & 0 \\ -1 & -x & 1 & y \\ -1 & 0 & 0 & -y \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi. Pri tome je (e) kanonska baza za $\mathbb{C}^4$ i $(f) = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$.

Rješenje: Operator A se može dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi ako i samo ako je normalan. Uočimo da baza (f) nije ortonormirana baza pa ćemo operator A prikazati u ortonormiranoj bazi (e) jer u ortonormiranoj bazi (e) vrijedi $A^*(e) = (A(e))^*$. Vrijedi $A(e) = I(e,f)A(f,e)$, tj.

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & x-2 & -1 & 0 \\ -1 & -x & 1 & y \\ -1 & 0 & 0 & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada imamo

$$A^*(e) = (A(e))^* = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & \overline{x} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \overline{y} & 0 \end{bmatrix}.$$

Operator A je normalan ako i samo ako je $A(e)A^*(e) = A^*(e)A(e)$. Imamo

$$A(e)A^*(e) = \begin{bmatrix} 14 & 2\overline{x}+6 & 4 & 1 \\ 2x+6 & |x|^2+4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & |y|^2+2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^*(e)A(e) = \begin{bmatrix} 14 & 2x+6 & 4 & y \\ 2\overline{x}+6 & |x|^2+4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & y \\ \overline{y} & 0 & \overline{y} & |y|^2 \end{bmatrix},$$

iz čega slijedi da je A normalan ako i samo ako je $x \in \mathbb{R}, y = 1$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

2. kolokvij - 21. lipnja 2021.

ZADATAK 5

a) (3 boda) Neka je $A \in M_n$, te $T : M_n \to M_n$ zadan s $T(X) = AX - XA$. Izračunajte T^*.

b) (3 boda) Neka je $S \in L(M_2)$ takav da je $\operatorname{Ker} S = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 2a \\ 2b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{F} \right\}$. Odredite $\operatorname{Im} S^*$.

U oba zadatka M_n promatramo kao unitaran prostor uz standardni skalarni produkt.

Rješenje:

(a) Za sve $X, Y \in M_n$ vrijedi

$$\begin{aligned} \langle T(X), Y \rangle &= \langle AX - XA, Y \rangle = \operatorname{tr}((AX - XA)Y^*) = \operatorname{tr}(AXY^* - XAY^*) \\ &= \operatorname{tr}(A(XY^*)) - \operatorname{tr}(XAY^*) = \operatorname{tr}((XY^*)A) - \operatorname{tr}(XAY^*) \\ &= \operatorname{tr}(X(Y^*A - AY^*)) = \operatorname{tr}(X(A^*Y - YA^*)^*) = \langle X, A^*Y - YA^* \rangle. \end{aligned}$$

Zato je $T^*(Y) = A^*Y - YA^*$.
Koristili smo linearnost preslikavanja tr i tvrdnju $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ za sve $X, Y \in M_n$.

(b) Vrijedi $\operatorname{Ker} S \oplus \operatorname{Im} S^* = M_2$, odakle je $\operatorname{Im} S^*$ ortogonalni komplement od $\operatorname{Ker} S$ u M_2. Lako vidimo da je $\left\{ F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ jedna baza za $\operatorname{Ker} S$. Zato je $\dim(\operatorname{Ker} S)^\perp = 2$, pa je dovoljno naći dva linearno nezavisna elementa iz M_2 koji su ortogonalni na F_1 i F_2. Na primjer, možemo uzeti $F_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ i $F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Slijedi da je $\operatorname{Im} S^* = [\{F_3, F_4\}]$.