

2

Nukleosinteza

Nuklearna astrofizika, tj. fizika nuklearnih procesa u svemiru, dio je znanosti u kojem se uspješno spajaju dva naizgled suprotna ekstrema svemira: njegove ponajmanje objekte (atomske jezgre) s ponajvećim (zvijezdama, galaksijama i svemirom u cjelini). Nastala je već u ranim danima nuklearne fizike kada je uočeno da jedino nuklearne reakcije mogu objasniti golemu energiju koja se oslobađa na Suncu i u drugim zvijezdama. Glavni cilj nuklearne astrofizike je razumjevanje načina na koji nastaju (i nestaju) izotopi i energija u zvijezdama i općenito u svemiru. Zadnje desetljeće donijelo je velike pomake na mnogim područjima; ogroman tehnički napredak (i u promatranjima i u eksperimentima) i sofisticiranije računске metode dovele su do mnogih važnih otkrića.

2.1 Nuklearni pojmovi relevantni za astrofiziku

Nuklearna astrofizika je, grubo govoreći, nuklearna fizika primjenjena na astrofizičke objekte. Za njeno proučavanje potrebno znanje iz nuklearne fizike je ogromno - ovdje ćemo definirati samo najosnovnije pojmove, dok će ostali biti dani u poglavljima o nuklearnim reakcijama i raspadima.

2.1.1 Kulonska barijera

Zadatak 2.1

Izrazite kT (gdje je k Boltzmannova konstanta) preko “nuklearnih” jedinica (T_6 , MeV).

Rješenje 2.1

T_6 je temperatura izražena u milijunima stupnjeva Kelvina; dakle, $T_6 = T / (10^6 \text{ K})$.

$$\begin{aligned} kT &= 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot T \text{ J} = \\ &= \frac{1.38 \cdot 10^{-23}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3} \cdot 10^6 \cdot T_6 \text{ keV} = \\ &= 8.62 \cdot 10^{-2} \cdot T_6 \text{ keV} \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

U “normalnim” zvijezdama temperatura je do reda veličine 10^8 K , pa je prosječna kinetička energija čestica reda veličine 10 keV što je bitno manje od kulonskih barijera među nabijenim jezgrama. Veličina kulonske barijere može se približno izračunati pomoću izraza:

$$V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} = \frac{1.44 \cdot Z_1 Z_2}{R(\text{fm})} \text{ MeV} \quad . \tag{2.2}$$

Zadatak 2.2

Izračunajte kulonsku potencijalnu energiju za: a) dva protona na udaljenosti 1 fm; b) jezgru zlata ($Z=79$) i α -česticu na udaljenosti 10 fm; c) dvije jezgre srebra ($Z=47$, $A=107$) koje se “dodiruju” (polumjer jezgri izračunajte iz približnog izraza $R=1.2 \cdot A^{1/3}$ fm).

Rješenje 2.2

- a) $Z_1=Z_2=1$, $d=1$ fm $\Rightarrow V=1.44$ MeV;
 b) $Z_1=79$, $Z_2=2$, $d=10$ fm $\Rightarrow V=1.44 \cdot 79 \cdot 2/10=22.7$ MeV;
 c) $R=1.2 \cdot A^{1/3}=5.7$ fm; $d=2R=11.7$ fm;
 $Z_1=Z_2=47 \Rightarrow V \approx 280$ MeV.

Gamow je za α -raspad pokazao da je vjerojatnost tuneliranja kroz takvu barijeru dana s:

$$P = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b [2M(V(r) - E)]^{1/2} dr\right), \quad (2.3)$$

gdje su a i b granice barijere kroz koju čestica tunelira (alfa-raspad bit će detaljnije diskutiran kasnije, u poglavlju 7). Taj izraz vodi na:

$$P \sim \exp\left(-\frac{2\pi Z_1 Z_2 E^2}{\hbar v}\right). \quad (2.4)$$

Dakle, vjerojatnost tuneliranja brzo (eksponencijalno) pada s visinom barijere.

2.1.2 Centrifugalna barijera

Separiranjem varijabli u Schrödingerovoj se jednadžbi pojavljuje član $L(L+1)/2\mu r^2$ gdje je μ reducirana masa sistema, a L kvantni broj definiran momentum impulsa upadne čestice. Taj član efektivno povećava potencijal V pa se stoga često naziva centrifugalnom barijerom (jer djeluje kao repulzivni potencijal za radijalno gibanje). Jednostavan numerički izraz za ovaj član dan je s:

$$V_l = 20.9 \frac{L(L+1)}{AR^2} \text{ MeV fm}^2, \quad (2.5)$$

gdje je R polumjer jezgre (doseg nuklearne sile), a A je “reducirani” broj nukleona (računa se isto kao reducirana masa).

2.1.3 S-faktor

Zbog nužnosti penetracije kulonske barijere (izraz 2.4), udarni presjek za reakcije na vrlo niskim energijama eksponencijalno pada smanjivanjem energije ulazne čestice. To otežava ekstrapolaciju izmjerenih vrijednosti i stoga je korisnije razmatrati veličinu kod koje je ta eksponencijalna ovisnost “odstranjena”. Uz to, kvantno-mehanička interakcija među česticama uvijek uključuje geometrijski faktor $\pi\lambda^2$ (λ je de Brogliejeva valna duljina) koji je obrnuto proporcionalan energiji. Zbog svega se toga definira S -faktor:

$$S(E) = \sigma(E)E \exp\left(\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right). \quad (2.6)$$

S -faktor predstavlja, dakle, nuklearni dio udarnog presjeka, dok su druga dva faktora posljedica općih kvantno-mehaničkih principa:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp(-2\pi Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v) \quad . \quad (2.7)$$

Osim u slučaju rezonancija, S -faktor se slabo mijenja s energijom. Najčešće se S -faktor uzima vrlo jednostavna parametrizacija (razvoj u red s zadržavanjem samo linearnog člana):

$$S(E) = S(0) + \frac{dS}{dE} \cdot E \quad . \quad (2.8)$$

S -faktor za najvažnije reakcije ima standardiziran zapis; tako se npr. sa S_{17} označava S -faktor za reakciju ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$, a s S_{34} S -faktor za reakciju ${}^3\text{He}(\alpha,\gamma){}^7\text{Be}$.

2.1.4 Brzina odvijanja reakcije r

Promotrimo zvjezdani materijal koji sadrži N_x jezgara izotopa X i N_y jezgara izotopa Y po jedinici volumena, te neka je među njima relativna brzina v . Budući da udarni presjek ovisi samo o *relativnoj* brzini, možemo jednu vrstu čestica (npr. X) promatrati kao projekte, a drugu (u ovom primjeru Y) kao mete - tada čitavo daljnje razmatranje provodimo u referentnom sustavu jezgara mete. Svaki projektil tada "vidi" površinu koja odgovara udarnom presjeku σ pomnoženom s brojem jezgara mete po jedinici volumena: $\sigma(v)N_y$. Taj broj treba pomnožiti s tokom projektila X , $N_x v$, da bi se dobila ukupna brzina (učestalost) odvijanja reakcije (*engl.* reaction rate), odnosno broj reakcija po jedinici volumena (plazme) u jedinici vremena:

$$r = N_x N_y v \sigma(v) \quad . \quad (2.9)$$

Dakako, relativne brzine u središtu zvijezda slijede neku (normiranu) raspodjelu $\phi(v)$, pa vrijedi:

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \phi(v) v \sigma(v) dv \quad , \quad (2.10)$$

gdje za $\phi(v)$ mora vrijediti:

$$\int_0^\infty \phi(v) dv = 1 \quad .$$

Dakle, srednja brzina (ili učestalost) odvijanja reakcije (*engl.* reaction rate) tada postaje:

$$r = N_x N_y \langle \sigma(v) v \rangle \quad . \quad (2.11)$$

Ako su X i Y identične čestice (jezgre), ovaj izraz treba malo modificirati (tj. uzeti u obzir da se parovi projektil/meta ne broje dva puta):

$$r = \frac{N_x N_y \langle \sigma(v) v \rangle}{1 + \delta_{xy}} \quad .$$

Uz ovakvu definiciju brzine odvijanja reakcije, svaka vrsta nuklida u reakciji trošit će se po izrazu:

$$\left(\frac{dN_x}{dt} \right)_y = \left(\frac{dN_y}{dt} \right)_x = -(1 + \delta_{xy}) r \quad , \quad (2.12)$$

Često se umjesto koncentracije (broja čestice po jedinici volumena) nekog izotopa N_i koristi gustoća materije ρ i *maseni udio* tog izotopa Y_i :

$$Y_i = \frac{N_i M_i}{\sum_j N_j M_j} \quad , \quad (2.13)$$

ili njegov *molarni udio* X_i (odnosno “brojčani” udio):

$$X_i = \frac{N_i}{\sum_j N_j} . \quad (2.14)$$

Veza među tim veličinama dana je s:

$$N_i = \rho N_A Y_i / A_i = \rho N_A X_i ,$$

gdje je A_i atomska masa izotopa i . Npr. maseni udio vodika u Suncu je 73%, a helija 25% - iz gornjeg izraza dobiva se da je omjer broja jezgara vodika i helija 12:1. Raspodjela $\phi(v)$ brzina čestica u središtu tipičnih zvijezda dana je s Maxwell-Boltzmannovim izrazom:

$$\phi(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} . \quad (2.15)$$

Uvrštavanjem u izraz 2.10 dobiva se:

$$\langle \sigma v \rangle = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \sigma(v) e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} dv ; \quad (2.16)$$

reducirana masa μ pojavljuje se u ovom izrazu jer promatramo relativno gibanje dvaju čestica. Znajući $E = mv^2/2$ ($dE = mv dv$), ovaj izraz možemo umjesto preko brzine napisati preko energije:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi\mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty E \sigma(E) e^{-\frac{E}{kT}} dE . \quad (2.17)$$

Iskoristimo li S -faktor definiran u izrazu 2.6, dobiveni rezultat može se napisati i ovako:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi\mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{E^{1/2}}\right) dE , \quad (2.18)$$

gdje je b definiran kao:

$$\begin{aligned} b &= 2\pi\eta = \\ &= 2\pi Z_1 Z_2 e^2 \sqrt{\mu} / (\sqrt{2}\hbar) = \\ &= (2\mu)^{1/2} e^2 Z_1 Z_2 / \hbar = \\ &= 31.28 Z_1 Z_2 A^{1/2} \text{ keV}^{1/2} ; \end{aligned} \quad (2.19)$$

A je reducirana masa sistema. Treba uočiti da je b parametar *neovisan* o temperaturi.

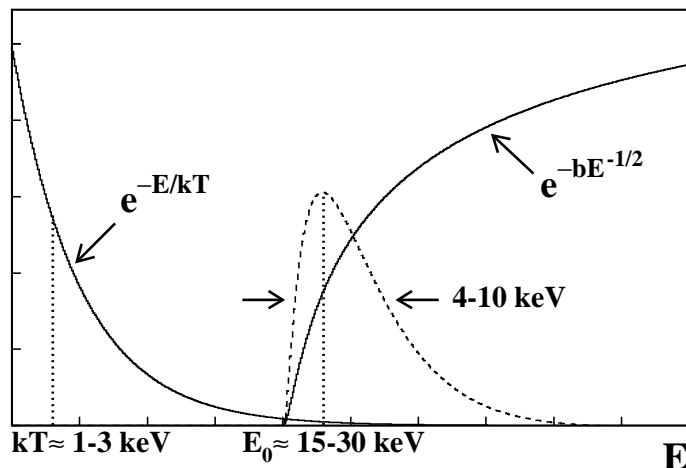
2.1.5 Gamowljeva energija

Dva faktora integranda u izrazu 2.18 prikazani su na slici 2.1. U pitanju su dvije eksponencijale koje se preklapaju samo u uskom području energija oko neke vrijednosti. Ta veličina, E_G (u dijelu literature se označava s E_0), je najefikasnija energija za termonuklearne reakcije i nalazi se traženjem maksimuma integranda u izrazu 2.18. Taj će integrand biti maksimalan kada je:

$$\frac{E}{kT} + \frac{b}{\sqrt{E}} = \min ;$$

deriviranjem izraza na lijevoj strani i izjednačavanjem se dobiva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{kT} - \frac{1}{2} \frac{b}{E^{3/2}} &= 0 \\ E_G &= \left(\frac{bkT}{2} \right)^{2/3} , \end{aligned} \quad (2.20)$$



Slika 2.1: Dominantna ovisnost o energiji termonuklearnih reakcija. Maxwellova raspodjela energija unosi faktor $\exp(-E/kT)$. Tuneliranje kroz barijeru unosi faktor $\exp(-bE^{-1/2})$. Njihov produkt je uzak vrh na energiji E_G (koja je općenito puno veća od kT); taj se vrh (odnosno energija) nazivaju Gamowljevom.

odnosno, korištenjem izraza 2.19:

$$E_G = 1.220(Z_1^2 Z_2^2 A T_6^2)^{\frac{1}{3}} \text{ keV} \quad . \quad (2.21)$$

Može se pokazati (vidi npr. *Rolfs* str. 160) da je širina Gamowljevog vrha dana s:

$$\Delta E_G = \frac{4}{3^{1/2}} (E_G kT)^{1/2} = 0.749(Z_1^2 Z_2^2 A T_6^5)^{\frac{1}{6}} \text{ keV} \quad . \quad (2.22)$$

Energija E_G najčešće je za par redova veličine manja od kulonske barijere, no bitno veća od kT . Npr. za reakciju $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$ na temperaturi $T=10^9$ K ($kT=0.1$ MeV), energija E_G je čak 2.3 MeV, dok je kulonska barijera ≈ 9 MeV. Za naše Sunce ($T=15 \cdot 10^6$ K), Gamowljeva energija za reakcije $p+p$ ($Z_1=Z_2=1$, $A=1/2$) je $E_G=5.9$ keV, a za reakcije $\alpha+\alpha$ ($Z_1=Z_2=2$, $A=2$) dobiva se $E_G=23.5$ keV (opet par redova veličine manje od kulonskih barijera).

2.2 Gorenje vodika

U vrlo ranom svemiru (do trenutka $t=0.01$ s poslije Velikog praska što odgovara temperaturi od oko $T=10^{11}$ K) svemirom dominira zračenje te se protoni i neutroni nalaze u statističkoj ravnoteži. Hlađenjem zbog širenja Svemira protoni i neutroni ispadaju iz ravnoteže ($t=1$ s, $T \approx 10^{10}$ K), i broj se neutrona (zbog njihovog β -raspada) od tog časa smanjuje u odnosu na broj protona. Temperature su još uvijek previsoke da bi postojale nezanemarive količine bilo koje jezgre teže od protona, odnosno neutrona. Nukleosinteza počinje reakcijom:

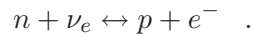
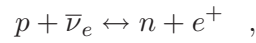


koja se odvija pod utjecajem *slabe nuklearne sile*. Na dovoljno visokim temperaturama, deutron nastao ovom reakcijom praktički se momentalno razbija fotonima. Tome pogoduje i mala energija vezanja deuterona (puno manja od većine ostalih stabilnih jezgara) i velik broj fotona (na svaki nukleon otpada $\approx 10^9$ fotona). Opstanak deuterona postaje moguć tek na temperaturi $T \approx 10^8$ K

što odgovara starosti Svemira od $t = 300$ s. Jednom kada je stvoren deutron, moguće je i stvaranje težih jezgara.

Zadatak 2.3

Do otprilike 3 sekunde nakon Velikog praska, omjer neutrona i protona je bio u termičkoj ravnoteži uspostavljenoj putem reakcija:



Neutroni su nešto teži od protona (za 1.29 MeV), pa ih u ravnoteži ima manje u skladu s Boltzmannovom formulom:

$$\frac{N_n}{N_p} = e^{-(m_n - m_p)c^2/kT} .$$

Temperatura je u času ispadanja iz termičke ravnoteže ($t = 3$ s) bila oko 10^{10} K. U $t \approx 300$ s nakon Velikog praska, svi preostali neutroni fuzionirali su se s protonima u jezgre ${}^4\text{He}$; tu se prvobitna nukleosinteza i zaustavila (stvoren je još vrlo malo litija i berilija - svi ostali izotopi stvoreni su u zvijezdama). Pokažite da je maseni udio helija (u ukupnoj hadronskoj masi) nakon prvobitne nukleosinteze $\approx 25\%$ (ostatak, dakako, otpada na vodik).

Važno: slobodan neutron je β -nestabilan i vrijeme poluživota mu je $T_{1/2} = 10.23$ minute.

Rješenje 2.3

Za razliku masa neutrona i protona vrijedi:

$$\Delta m = m_n - m_p = 939.57 - 938.28 \text{ MeV}/c^2 = 1.29 \text{ MeV}/c^2 .$$

Zbog toga u trenutku $t = 3$ s, kada protoni i neutroni ispadaju iz ravnoteže, za njihov omjer imamo:

$$\frac{N_n}{N_p} = e^{-(m_n - m_p)c^2/kT} = \exp\left(\frac{-1.29}{8.62 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{10}}\right) = 0.224 ,$$

$$N_n(t = 3s) = 0.224 \cdot N_p(t = 3s) .$$

U sljedećih $\Delta t \approx 300$ s, dio neutrona se raspada (i prelazi u protone):

$$N_n(t = 300s) = N_n(t = 3s) \cdot e^{-\Delta t/\tau} ,$$

gdje je τ srednje vrijeme života neutrona:

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{10.23 \text{ min}}{\ln 2} = 885.5 \text{ s} .$$

Dobiva se:

$$N_n(t = 300s) = 0.224 \cdot N_p(t = 3s) e^{-\Delta t/885.5} = 0.160 \cdot N_p(t = 3s) .$$

Neutroni raspadom daju proton (i elektron i antineutrino), pa broj protona raste:

$$\begin{aligned} N_p(t = 300s) &= N_p(t = 3s) + [N_n(t = 3s) - N_n(t = 300s)] = \\ &= N_p(t = 3s) \cdot (1 + 0.224 - 0.160) = 1.064N_p(t = 3s) \quad . \end{aligned}$$

Omjer neutrona i protona u $t = 300s$ je stoga:

$$\frac{N_n}{N_p}(t = 300s) = \frac{0.160 \cdot N_p(t = 3s)}{1.064N_p(t = 3s)} = 0.150 \quad .$$

Svi neutroni u tom času ostaju zarobljeni u α -česticama, pa je broj istih dan s:

$$N_\alpha(t = 300s) = \frac{N_n(t = 300s)}{2} = 0.075N_p(t = 300s) \quad .$$

Za stvaranje α -čestice, osim 2 neutrona potrebna su i 2 protona, pa je broj preostalih "slobodnih" protona:

$$N_p^s(t = 300s) = N_p(t = 300s) - N_n(t = 300s) = (1 - 0.150)N_p(t = 300s) = 0.850N_p(t = 300s) \quad .$$

Dakle, omjer broja α -čestica i broja slobodnih protona je:

$$\frac{N_\alpha(t = 300s)}{N_p^s(t = 300s)} = \frac{0.075N_p(t = 300s)}{0.850N_p(t = 300s)} = 0.088 \quad .$$

Maseni udio α -čestica dan je s:

$$\begin{aligned} Y_\alpha &= \frac{4 \cdot N_\alpha(t = 300s)}{4 \cdot N_\alpha(t = 300s) + N_p^s(t = 300s)} = \frac{4 \cdot N_\alpha(t = 300s)/N_p^s(t = 300s)}{4 \cdot N_\alpha(t = 300s)/N_p^s(t = 300s) + 1} = \\ &= \frac{4 \cdot 0.088}{4 \cdot 0.088 + 1} = 0.26 \quad . \end{aligned}$$

Dobiveni maseni udio (26%) približno odgovara broju koji se dobiva puno detaljnijom analizom prvobitne nukleosinteze.

Vidljiva materija u Svemiru nakon prvih par minuta sastoji se od 75% vodika i 25% helija (maseni udjeli). Daljnja nukleosinteza odigrava se tek u zvijezdama, dakle nakon više od 100 milijuna godina od Velikog praska. U zvijezdama nukleosinteza započinje tzv. *pp*-ciklusom čija je najjednostavnija varijanta prikazana na slici 2.2.

Zadatak 2.4

Odredite ukupnu oslobođenu energiju u *pp*-ciklusu; pretpostavite da je srednja energija koju odnose neutrini u reakciji $p+p \rightarrow d+e^++\nu$ 0.26 MeV-a i tu energiju smatrajte "izgubljenom".

Rješenje 2.4

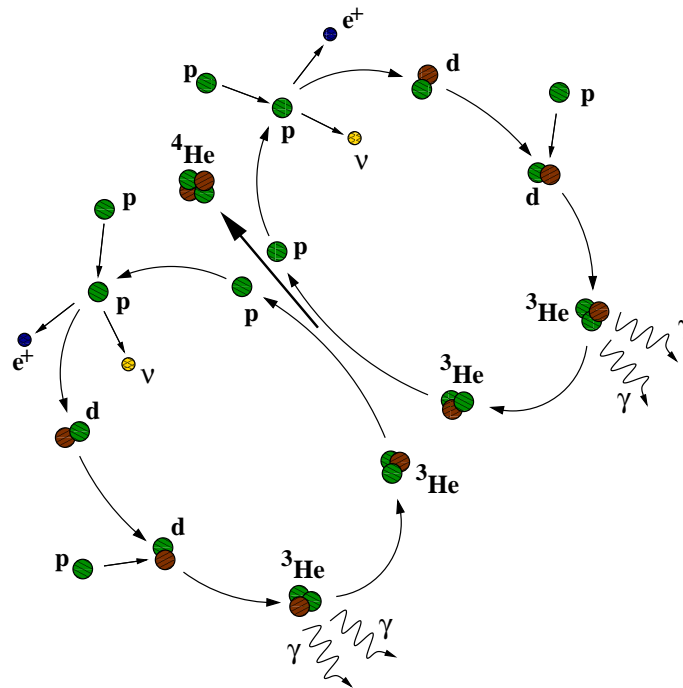
Ciklus *pp* I (najjednostavnija varijanta *pp*-ciklusa) ilustriran je na slici 2.2.

Energiju oslobođenu u reakciji mjerimo preko veličine koja se ove Q -vrijednost (i koja će detaljnije biti diskutirana u poglavlju 8 o nuklearnim reakcijama):

$$Q = \sum_{\text{poslije}} E_k - \sum_{\text{prije}} E_k = (\sum_{\text{prije}} m - \sum_{\text{poslije}} m)c^2 \quad ; \quad (2.24)$$

E_k je kinetička energija. Pomoću tablica masa za izotope uključena u ciklus (koje se mogu naći npr. na adresi <http://nucleardata.nuclear.lu.se/database/masses/>) možemo odrediti Q -vrijednost svake od reakcija u ciklusu.

Reakcija	Q (MeV)	ϵ_ν
$p+p \rightarrow d+e^++\nu$	1.442	≤ 0.420
$d+p \rightarrow {}^3\text{He}+\gamma$	5.493	
${}^3\text{He}+{}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He}+2p$	12.859	



Slika 2.2: Ciklus pp I

Prve dvije reakcije u tablici se u ciklusu pojavljuju 2 puta, dok se treća pojavljuje samo jednom, pa je ukupna Q -vrijednost ciklusa dana s:

$$Q = 2 \cdot 1.442 + 2 \cdot 5.493 + 12.859 - 2 \cdot 0.26 = 26.2 \text{ MeV} \quad .$$

Budući da je netto-efekt pp -ciklusa taj da se 4 protona pretvore u helij (uz stvaranje dva pozitrona i neutrona), taj se rezultat može dobiti i na drugi način:

$$\begin{aligned} Q &= (4m_p - m_\alpha) \cdot c^2 + 2m_e \cdot c^2 - 2 \cdot 0.26 = \\ &= (4 \cdot 1.00728 - 4.00151) \cdot 931.5 + 2 \cdot 0.511 - 0.52 \approx 26.2 \text{ MeV} \quad . \end{aligned}$$

Dakle, u ciklusu pp I na svaku stvorenu jezgru helija oslobodi se 26.2 MeV-a energije. Energija koju odnose neutriini računa se usrednjavanjem po raspodjeli neutrina u beta-raspadu; zadaci poput ovog bit će rješavani u poglavlju 7.

2.3 Gorenje helija

Porastom temperature u središtu zvijezda, prvo vodik počinje goriti i ciklusima različitim od pp (prvenstveno CNO-ciklusom), a zatim dolazi i do nuklearnog izgaranja helija (tzv. proces tri α -čestice).

Zadatak 2.5

Gorenje helija odvija se na temperaturama većim od $2 \cdot 10^8$ K preko čestično-nestabilne jezgre ^8Be i rezonancije u ^{12}C . Procijenite ekcitacijsku energiju i svojstva te rezonancije da bi produkcija ugljika bila maksimalna!

Rješenje 2.5

Ideja je vrlo jednostavna: da bi rezonancija maksimalno ubrzala reakciju, mora se nalaziti unutar Gamowljevog prozora, te imati takav spin i paritet da se u ulaznom kanalu ne pojavljuje dodatna centrifugalna barijera.

Izračunajmo prvo Gamowljevu energiju za reakciju $^4\text{He} + ^8\text{Be}$ na zadanoj temperaturi ($T = 2 \cdot 10^8$ K). Uz $Z_1 = 2$, $Z_2 = 4$ i $A = 8 \cdot 4 / (8 + 4) = 8/3$, upotrebom izraza 2.21 dobivamo:

$$E_G = 185 \text{ keV} \quad ,$$

$$\Delta E_G = 145 \text{ keV} \quad .$$

Dakle, rezonancija bi trebala biti ≈ 200 keV-a (± 150 keV) iznad praga za $\alpha + ^8\text{Be}$ raspad jezgre ^{12}C . Iz dijagrama stanja jezgre ^{12}C (koji se može naići ovdje: www.tunl.duke.edu/nucldata/figures/gifchart.shtml), vidimo da je taj prag na $E_x = 7.367$ MeV-a; traženo stanje (rezonancija) očekuje se dakle na $E_x \approx 7.6$ MeV. Budući da jezgre ^8Be i ^4He imaju osnovna stanja s $J^\pi = 0^+$, rezonancija u ^{12}C bi također morala imati $J^\pi = 0^+$ jer bi svaki drukčiji spin ili paritet nužno vodio na postojanje $L \neq 0$ u relativnom gibanju ^8Be i ^4He , a svaki $L \neq 0$ podiže barijeru (nezanimljivo velikim) centrifugalnim članom i na taj način smanjuje udarni presjek za reakciju.

Dakle, proizvodnja ugljika u zvijezdama može se ubrzati rezonancijom s $J^\pi = 0^+$ na $E_x \approx 7.6$ MeV. To je predviđanje dao F. Hoyle 1952. godine, a odgovarajuće je stanje zbilja eksperimentalno nađeno par godina poslije (Cook, Fowler, Lauritsen); izmjerena energija pobuđenja stanja je $E_x = 7.65$ MeV (malo iznad sredine Gamowljevog vrha, ali unutar njegove širine) i ono se često naziva "Hoyleovim stanjem".

2.4 Prestanak nukleosinteze

Gorenjem helija stvara se ugljik, čestično nestabilne jezgre ^8Be po Boltzmannovoj raspodjeli ima taman dovoljno za nastanak velikih količina ^{12}C u svemiru, sintezom preko Hoyleovog stanja. Sličnim razmatranjem može se pokazati da je i sinteza $\alpha + ^{12}\text{C}$ nešto ubrazana stanjem (rezonancijom) u ^{16}O , no ta se rezonanca nalazi nešto ispod Gamowljevog prozora, te ima $J^\pi = 1^-$ (zbog čega postoji dodatna centrifugalna barijera), zbog čega je njen utjecaj puno manji nego u slučaju Hoyleovog stanja. Radi toga "gorenje ugljika" nije jako brzo i samo dio ugljika se pretvara u kisik, dok bitan dio ostaje kao ugljik (kisik je treći najzastupljeniji element u svemiru, dok je ugljik četvrti). Slično, termalna rezonancija u ^{20}Ne ima posve kriva svojstva ($J^\pi = 2^-$) i nimalo ne ubrzava fuziju $\alpha + ^{16}\text{O}$; količina stvorenog neona u mirnom gorenju zvijezda je stoga relativno malena u odnosu na količinu ugljika i kisika. Daljna sinteza odigrava se fuzijom $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$, $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$, $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$, itd. sve

do jezgre ^{56}Fe , najjače vezane jezgre po nukleonu - i tu nukleosinteza u zvijezdama koje “mirno gore” prestaje.

Za sintezu težih elemenata od željeza potrebno je okruženje gdje pojedine čestice imaju puno veće energije od onih u središtu zvijezda. Vrlo je dobro poznata jedna situacija kod koje je to ispunjeno: tzv. supernova. Supernova je eksplozivni proces koji se dešava na kraju života masivnijih zvijezda; takva zvijezda koja je potrošila svoje gorivo nema više čime uravnotežiti ogromne gravitacijske sile, te postaje nestabilna i kolapsira pri čemu nastaje snažan udarni val prema van koji odnosi i do 50% početne mase zvijezde. Kad zabljesne, supernova svojim sjajem može nadjačati i čitavu galaksiju! Sada je jasno zašto se za naše Sunce i sve obične zvijezde kaže da “mirno” ili “sporo” gori. Pri eksploziji supernove nastaju uvjeti za odigravanje reakcija kojim nastaju jezgre od željeza do urana. Detalji su još posve nejasni pa je ovo jedno od desetak najvažnijih otvorenih pitanja fizike općenito.

2.5 Bijeli patuljci, neutronske zvijezde

Po svršetku nuklearnih reakcija, zvijezda ostaje u nekom od neobičnih stanja, npr. kao neutronska zvijezda ili bijeli patuljak. Bijeli patuljak je zvijezda vrlo malenog polumjera (od 3500 km do 14000 km), mase usporedive sa Sunčevom (pa dakle ogromne gustoće), te bitno manjeg lumoniziteta. Elektroni u bijelom patuljku ponašaju se kao *degenerirani plin*; nalaze se u najnižem stanju dozvoljenom Paulijevim principom (koji zapravo i spriječava daljne stezanje zvijezde). Uvjet degeneracije plina elektrona je: $kT \ll E_f$, gdje je E_f Fermijeva energija (kriterij degeneracije $T_F \gg T$ ispunjen je za bijele patuljke usprkos njihovoj visokoj temperaturi jer je $T_F \approx 10^9$ K). Razlika između klasičnog plina (koji zadovoljava Maxwell-Boltmannovu statistiku) i Fermijevog plina je ta da je kod klasičnog plina prosječna energija čestica $3/2kT$ (pa iščezava u limesu $T \rightarrow 0$), dok je za Fermijev plin prosječna energija $3/5E_F$ i ona ostaje konstantna u limesu $T \rightarrow 0$ (zbof Paulijevog principa). Tlak klasičnog plina dan je s $P = nkT$, dok je tlak degeneriranog plina elektrona dan s:

$$P = \frac{\hbar^2}{5m_e} (3\pi^2)^{2/3} n_e^{5/3} .$$

Kod neutronske je zvijezde elektronski oblak atoma kolapsirao u jezgru pa su svi protoni iz jezgre pretvoreni u neutrone. Gustoća neutronske zvijezde je ogromna (do 10^{17} kg/m³!) i one se na nebu opažaju kao pulsari ili indirektno na način na koji djeluju na okolnu materiju.

Zadatak 2.6

Izvedite izraz koji opisuje tlak i gustoću materije za bijele patuljke, te pomoću tog izraza riješite jednadžbe strukture za te zvijezde.

Rješenje 2.6

Početak ovog izvoda isti je za sve zvijezde, a tek u kasnijoj fazi specificirat ćemo da se radi o bijelom patuljku.

Pretpostavljamo sferičnu simetriju i tada znamo kako se masa mijenja s polumjerom; $M(r)$ je masa zvijezde od centra do polumjera r :

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) . \quad (2.25)$$

Ovu jednadžbu dobivamo gledajući kako masa raste s polumjerom na udaljenosti r od središta zvijezde.

Na inkrement masa dM koji se nalazi na udaljenosti r od centra zvijezde, djeluju dvije sile: kao prvo, gravitacijsko privlačenje prema središtu zvijezde - uzrok privlačenja je sva masa $M(r)$ koja se nalazi bliže središtu zvijezde od promatrane mase dM . No zbog činjenice da tlak raste prema središtu zvijezde, postojat će i sila prema van uzrokovana razlikom tlakova (važno: tlak nije nužno hidrostatski!). Dakle, imamo:

$$dF_{\text{tot}} = dF_{\text{grav}} + dF_{\text{tlak}} \quad ,$$

$$dF_{\text{grav}} = -\frac{GM(r)dM}{r^2} \quad ,$$

$$dF_{\text{tlak}} = [P(r) - P(r + dr)] dS \quad ,$$

gdje je dS površina vezana s masom preko ovog izraza:

$$dM = \rho(r)dSdr \quad .$$

Dakako, ukupna sila uzrokuje akceleraciju mase dM :

$$dF_{\text{tot}} = \frac{d^2r}{dt^2}dM \quad .$$

Uvrštavanjem izraza za pojedine sile dobivamo:

$$-\frac{GM(r)dM}{r^2} + [P(r) - P(r + dr)] dS = \frac{d^2r}{dt^2}dM \quad ,$$

$$-\frac{GM(r)\rho(r)dSdr}{r^2} + (-)\frac{dP}{dr}drdS = \frac{d^2r}{dt^2}\rho(r)dSdr \quad ,$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} - \rho(r)\frac{d^2r}{dt^2} \quad .$$

Zanima nas ravnotežno stanje zvijezde, pa ćemo gornju jednadžbu pojednostaviti zahtijevajući:

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} \ll \frac{GM(r)}{r^2} \quad ;$$

ovaj uvjet je ispunjen za sve zvijezde osim za one koje naglo eksplodiraju ili implodiraju (npr. supernove) - odgovarajuća spora kontrakcija zvijezde naziva se kvazistatička. Dobivamo tzv. uvjet hidrostatičke ravnoteže:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \quad . \quad (2.26)$$

Zajedno s izrazom 2.25, ovaj izraz čini sistem jednadžbi s tri nepoznanice: masom M , gustoćom ρ i tlakom P . Da bi riješili sistem, treba nam još jedna jednadžba, tzv. jednadžba stanja tvari u unutrašnjosti zvijezde. Općenito, ta jednadžba može uključivati nove varijable (sastav materijala, proizvodnju energije, ...), što bi dovelo do potrebe za novim jednadžbama za potpuno definiranje sistema. No za vrlo široku klasu zvijezda, može se pretpostaviti relativno jednostavna veza tlaka i gustoće (tzv. politropska relacija):

$$P = K\rho^\Gamma \quad , \quad (2.27)$$

gdje je K konstanta, a Γ tzv. politropski koeficijent.

Uočite da je Γ poopćenje adijabatskog koeficijenta koji se uvodi u razmatranju osnovnih termodinamičkih procesa. Taj se koeficijent ponekad označava i s δ , a standardno se koristi i tzv. indeks politropije n :

$$n = \frac{1}{\Gamma - 1} . \quad (2.28)$$

Politropska relacija je treća jednadžba našeg sistema s tri nepoznanice. Isti se sad rješava sljedećom procedurom:

- specificira se ili $P(0)$ ili $\rho(0)$;
- jednadžbe se integriraju od središta prema rubu zvijezde;
- u točki $r=R$ (na rubu zvijezde) zahtijeva se $P(R)=0$.

Krenimo od uvjeta hidrodinamičke ravnoteže (izraz 2.26), pomnožimo ga s r^2/ρ i derivirajmo po polumjeru:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} &= -\frac{d}{dr} GM(r) = \\ &= -G4\pi r^2 \rho , \end{aligned}$$

gdje smo u prelasku s prvog na drugi redak koristili izraz 2.25. Uobičajeno se dobivena jednadžba još podijeli s r^2 :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} = -4\pi G \rho .$$

U ovom izrazu tlak P raspisujemo upotrebom jednadžbe stanja (izrazi 2.27 i 2.28) pa dobivamo:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho^{1+1/n}}{dr} = -\frac{4\pi G \rho}{K} ,$$

Probno rješenje ove jednadžbe bit će nam:

$$\rho(r) = \rho_c \Phi^n(r) , \quad (2.29)$$

gdje je ρ_c gustoća u središtu zvijezde:

$$\rho_c = \rho(0) .$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \frac{r^2}{\rho_c \Phi^n(r)} \frac{d \left[\rho_c^{1+1/n} (\Phi^n(r))^{1+1/n} \right]}{dr} &= -\frac{4\pi G}{K} \rho_c \Phi^n(r) , \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \frac{r^2}{\Phi^n(r)} \frac{d\Phi^{n+1}(r)}{dr} &= -\frac{4\pi G}{K} \frac{\rho_c^2}{\rho_c^{1+1/n}} \Phi^n(r) , \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \frac{r^2}{\Phi^n(r)} (n+1) \Phi^n(r) \frac{d\Phi(r)}{dr} &= -\frac{4\pi G}{K} \rho_c^{1-1/n} \Phi^n(r) , \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) &= -\frac{4\pi G}{K(n+1)} \rho_c^{1-1/n} \Phi^n(r) . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Da bismo se riješili kompliciranog razlomka s konstantama na desnoj strani jednadžbe, uvodimo pokratu:

$$a = \sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G \rho_c^{1-1/n}}} ,$$

a zatim i novu varijablu ξ :

$$\xi = r/a \quad ;$$

jednadžba 2.30 sada postaje bitno jednostavnija i nazivamo ju **Lane-Emdenova jednadžba**:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = -\Phi^n \quad , \quad (2.31)$$

gdje je Φ sada funkcija varijable ξ za koju vrijedi (vidi izraz 2.29):

$$\Phi(0) = 1 \quad ,$$

$$\Phi(R/a) = 0 \quad .$$

Analitičko rješenje Lane-Emdenove jednadžbe (izraz 2.31) postoji samo u tri slučaja:

- za $n=0$ imamo:

$$\Phi_0 = 1 - \frac{\xi^2}{6} \quad , \quad (2.32)$$

- za $n=1$:

$$\Phi_1 = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad , \quad (2.33)$$

- i za $n=5$:

$$\Phi_5 = \left(1 + \frac{\xi^2}{3}\right)^{-1/2} \quad . \quad (2.34)$$

(ova tri rješenja lako se provjere uvrštavanjem). Za ostale vrijednosti indeksa n , jednadžba je rješiva samo numerički i njena se rješenja za bitne n -ove (ne nužno cjelobrojne) mogu naći u tablicama.

Za dva od tri navedena analitička rješenja uočljivo je da za neku vrijednost ξ prelaze iz pozitivnog područja u negativno. Negativno rješenje za Φ odgovara negativnoj gustoći što nema fizikalnog smisla; zato vrijednost varijable ξ za koju se to dešava odgovara rubu zvijezde. Standardna oznaka za taj ξ je ξ_1 :

$$\Phi(\xi_1) = 0 \quad . \quad (2.35)$$

Pogledajmo karakteristične fizičke veličine u politropskom modelu. Za polumjer zvijezde R imamo:

$$R = a\xi_1 = \left(\frac{n+1}{4\pi G}\right)^{1/2} \left(K\rho_c^{\frac{1-n}{n}}\right)^{1/2} \xi_1 \quad ; \quad (2.36)$$

za ukupnu masu zvijezde M :

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \int_0^R r^2 \rho dr = \\ &= 4\pi \rho_c \int_0^R \Phi^n r^2 dr = \\ &= -4\pi \rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right) a^2 \xi^2 a d\xi = \\ &= 4\pi \rho_c a^3 \left(-\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=\xi_1} = \\ &= 4\pi \left(\frac{K(n+1)}{4\pi G} \right)^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \left(-\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=\xi_1} \quad ; \end{aligned}$$

za tlak u središtu:

$$P(0) = K\rho_c^{1+\frac{1}{n}} = \left[4\pi(n+1) \left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)^2 \Big|_{\xi=\xi_1} \right]^{-1} G \frac{M^2}{R^4} \quad ; \quad (2.37)$$

za temperaturu u središtu:

$$T = \frac{\mu m_H}{k\rho} P = \frac{\mu m_H}{k} K \rho^{1/n} = \frac{\mu m_H}{k} K \Phi \rho_c^{1/n} \quad , \quad (2.38)$$

$$T(0) = \frac{\mu m_H}{k} K \rho_c^{1/n} \quad , \quad (2.39)$$

zbog rubnog uvjeta:

$$\Phi(0) = 1 \quad ; \quad (2.40)$$

te za gravitacijsku potencijalnu energiju:

$$\begin{aligned} \Omega &= -G \int_0^R \frac{m(r)}{r} dm = \\ &= -\frac{1}{2} G \frac{M^2}{R} - \frac{1}{2} G \int_0^R \frac{m^2}{r^2} dr = \\ &= -\frac{1}{2} G \frac{M^2}{R} + \frac{1}{2} \int_0^R \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} m dr = \\ &= -\frac{1}{2} G \frac{M^2}{R} + \frac{1}{2} (n+1) \int_0^R \frac{d}{dr} \left(\frac{P}{\rho} \right) m dr = \\ &= -\frac{1}{2} G \frac{M^2}{R} + \frac{1}{6} (n+1) \Omega \quad , \\ \Omega &= -\frac{3}{5-n} G \frac{M^2}{R} \quad . \end{aligned}$$

Dakle, onog časa kada ustanovimo da se jednadžba stanja za neku zvijezdu može svesti na jednostavan izraz 2.27 i odredimo Γ (tj. n), u stanju smo odrediti i sve bitne fizičke veličine za danu zvijezdu (uočite da objekti s $n \geq 5$ nisu gravitacijski vezani pa za zvijezda mora vrijediti $n < 5$). Preostaje nam, dakle, za naš konkretan slučaj (bijeli patuljak), odrediti vezu tlaka i gustoće.

Kada zvijezda potroši gorivo počinje se sažimati i hladiti; na dovoljno malenoj temperaturi elektroni u plazmi popunit će najniža moguća stanja (tj. ona do Fermijevog nivoa), za njihovu koncentraciju (broj po volumenu) tada imamo:

$$n = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad .$$

Ako s μ označimo omjer broja nukleona i elektrona, a s m_N masu nukleona, tada vrijedi:

$$\rho = n m_N \mu \quad ,$$

pa dobivamo:

$$k_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 \rho}{m_N \mu} \right)^{1/3} \quad .$$

Tlak Fermijevog plina nalazi se iz:

$$P = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_e^2}} k^2 dk \quad . \quad (2.41)$$

Uz zamjenu $u = k/m_e$ integral se može pretvoriti u tablični integral, za koji dobivamo (vidi npr. *Bronštajn*, str. 1027):

$$P = \frac{m_e^4}{24\pi^2\hbar^3} \left[(2u_F^3 - 3u_F) (1 + u_0^2)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} u_F \right] \quad . \quad (2.42)$$

Točka kada vrijedi $k_F = m_e$ definira granicu između relativističke i nerelativističke materije; toj točki odgovara gustoća:

$$\rho_{\text{krit}} = \frac{m_N \mu}{3\pi^2} \left(\frac{m_e c^2}{\hbar c} \right)^3 = 0.97 \cdot 10^6 \mu \text{ g/cm}^2 \quad .$$

Pogledajmo dva limesa, relativistički i nerelativistički.

U **nerelativističkom** limesu vrijedi $\rho \ll \rho_{\text{krit}}$, odnosno $k_F \ll m_e$. U nazivniku integrala u izrazu 2.41 tada ostaje samo m_e pa integral postaje vrlo jednostavan, a tlak jednak:

$$P_{nr} = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{m_e} \frac{k_F^5}{5} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{m_N \mu} \right)^{5/3} \quad .$$

Dakle, za degenerirani nerelativistički plin vrijedi:

$$P = K \rho^{5/3} \quad ,$$

$$n = \frac{1}{\Gamma - 1} = \frac{1}{5/3 - 1} = 1.5 \quad .$$

Za masu i polumjer zvijezde dobivamo:

$$M = \frac{2.72}{\mu^2} \sqrt{\frac{\rho_c}{\rho_{\text{krit}}}} M_{\odot} \quad ,$$

$$R = \frac{2 \cdot 10^4}{\mu} \left(\frac{\rho_c}{\rho_{\text{krit}}} \right)^{-1/6} \text{ km} \quad .$$

Dobiveni rezultati vrijede za bijele patuljke male mase, kakvo će za ≈ 4 milijarde godina biti naše Sunce.

U **ultra-relativističkom** limesu ($\rho \gg \rho_{\text{krit}}$, $k_F \gg m_e$) u nazivniku integrala u izrazu 2.41 m_e postaje zanemariv, pa je tlak jednak:

$$P_r = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{k_F^4}{4} = \frac{\hbar}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{m_N \mu} \right)^{4/3} \quad .$$

Dakle, za degenerirani ultra-relativistički elektronski plin vrijedi:

$$P = K \rho^{4/3} \quad ,$$

$$n = \frac{1}{\Gamma - 1} = \frac{1}{4/3 - 1} = 3 \quad .$$

Za masu i polumjer ovakve zvijezde dobivamo:

$$M = \frac{5.87}{\mu^2} M_{\odot} \quad ,$$

$$R = \frac{5.3 \cdot 10^4}{\mu} \left(\frac{\rho_c}{\rho_{\text{krit}}} \right)^{-1/3} \text{ km} \quad .$$

Dobiveni rezultati vrijede za bijele patuljke velike mase. Iz gornjeg izraza za masu može se izvući još jedan važan zaključak. Naime, dobiven izraz je posve neovisan o gustoći (za razliku od nerelativističkog slučaja) - postoji dakle maksimalna masa za stabilnost hladnih patuljaka; zvijezde veće mase poprimit će posve drukčije stanje (riječ je o tzv. neutronske zvijezdama).

2.6 Dodatni riješeni zadaci

Zadatak 2.7

Eddingtonov standardni model Sunca pretpostavlja da se gravitacijski kolaps spriječava i tlakom plina

$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H} = \beta P \quad ,$$

i tlakom zračenja

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4 = (1 - \beta) P \quad ;$$

β je parametar koji nam daje udio svakog od tlakova u ukupnom tlaku (za Sunce vrijedi $\beta=0.99956$). Izračunajte unutar ovog modela temperaturu u središtu Sunca.

Rješenje 2.7

Krenimo od dva izraza za tlakove u tekstu zadatka, te eliminirajmo temperaturu:

$$\beta^4 P^4 \left(\frac{\mu m_H}{\rho k} \right)^4 = \frac{3(1-\beta)}{a} P \quad ,$$

$$P = \left(\frac{k}{\mu m_H} \right)^{4/3} \left(\frac{3(1-\beta)}{a \beta^4} \right)^{1/3} \rho^{4/3} \quad ,$$

Vidimo da u ovom jednostavnom modelu postoji politropska ovisnost tlaka i gustoće (izraz 2.27), uz $\Gamma=4/3$ ($n=3$). Za taj n ne postoji analitičko rješenje Lane-Emdenove relacije, već je potrebno koristiti numeričke vrijednosti dane u tablicama, da bi se dobilo:

$$P(0) = 1.244 \cdot 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{R_\odot}{R} \right)^4 \text{ Nm}^{-2} \quad ,$$

$$\rho_c = \rho(0) = 76300 \frac{M}{M_\odot} \left(\frac{R_\odot}{R} \right)^3 \text{ kg m}^{-3} \quad ,$$

$$T(0) = \frac{m_H}{k} \mu \beta \frac{P(0)}{\rho_c} = 19.6 \cdot 10^6 \mu \beta \frac{M}{M_\odot} \frac{R_\odot}{R} \text{ K} \quad ,$$

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} - \xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} = \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{\pi G} \right)^{3/2} \left[\frac{3}{\alpha} \left(\frac{k}{\mu m_H} \right)^4 \frac{1-\beta}{\beta^4} \right]^{1/2} - \xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} = \\ &= \frac{18.3}{\mu^2} \left(\frac{1-\beta}{\beta^4} \right)^{1/2} M_\odot \quad . \end{aligned}$$

Za Sunce vrijedi i $\mu=0.62$, pa dobivamo:

$$P(0) = 1.244 \cdot 10^{16} \text{ Pa} \quad ,$$

$$\rho_c = \rho(0) = 76300 \text{ kg/m}^3 \quad ,$$

$$T_c = 12.1 \cdot 10^6 \text{ K} \quad .$$

Iako model ne uzima u obzir prelazak iz radijativne u konvektivnu zonu Sunca (dakle, trebalo bi istodobno koristiti dva različita indeksa politropije), daje rezultate vrlo slične najfinijim računima Sunčeve unutrašnjosti.

2.7 Zadaci za domaću zadaću

- (1 bod) Procjenite visinu kulonske barijere za sistem $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$ (rezultat izraziti u MeV-ima)!
- (1 bod) Na kojoj je udaljenosti dva protona kulonski potencijal jednak 200 keV?
- (1 bod) Najvjerojatnija brzina čestica koje se ponašaju po Maxwell-Boltzmannovoj raspodjeli odgovara energiji kT . Izračunajte najvjerojatnije brzine deuterona i tritona u plazmi na temperaturi $kT=20$ keV. Izrazite tu temperaturu u Kelvinima.
- (1 bod) Koristeći tablice masa, izračunajte energiju oslobođenu reakcijom $^3\text{He}(^3\text{He},2p)^4\text{He}$ (rezultat izraziti u MeV-ima)!
- (2 boda) Za $p+^{12}\text{C}$ reakciju CNO-ciklusa izmjeren je S-faktor na vrlo niskim energijama $S(0)=1.4$ keV b (b je 1 barn). Procjenite srednje vrijeme potrebno da se u središtu Sunca jezgra ^{12}C pretvori u ^{13}N . Koncentracija vodika u Suncu je $n=3.4\cdot 10^{31}$ m^{-3} .
- (1 bod) Ako se reakcija $^2\text{H}(p,\gamma)^3\text{He}$ odvija na vrlo niskim energijama, pokažite da je u sustavu centra mase energija gama-zrake E_γ veća od energije helijevog iona E_{He} za faktor $2m_{\text{He}}c^2/E_\gamma$. Izračunajte obje energije (koristiti $Q=5.49$ MeV)! Masa ^3He je $m_{\text{He}}=3.016$ u.
- (1 bod) Izračunajte Gamovljevu energiju definiranu u prethodnom zadatku (u MeV-ima) za reakcije $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$ na temperaturi $T=10^9$ K. Objasnite zašto je eksperimentalno mjerenje udarnih presjeka za termonuklearne reakcije teško.
- (1 bod) CNO-ciklus u zvijezdama sličnim Suncu započinje reakcijom $p+^{12}\text{C}\rightarrow^{13}\text{N}+\gamma$. Izračunajte Gamovljevu energiju za ovu reakciju na temperaturi središta Sunca ($15\cdot 10^6$ K).
- (1 bod) Sunce (mase $2\cdot 10^{30}$ kg) se pri nastanku sastojalo od 71% vodika (maseni udio). Pretpostavite da se energija u Suncu tijekom vremena (starost Sunca je $\approx 5\cdot 10^9$ godina) generirala brzinom kojom se oslobađa i danas ($3.86\cdot 10^{26}$ W), te procjenite koliko će dugo goriti 10% od ukupne količine preostalog vodika. Energija oslobođena pretvorbom vodika u helij je 26 MeV po jezgri helija.
- (1 bod) Procjenite tok Sunčevih neutrina na površini Zemlje krećući od Sunčevog luminoziteta ($L_0=3.83\cdot 10^{26}$ Js $^{-1}$) i činjenice da se pri svakoj pretvorbi četiri protona u α -česticu proizvode 2 neutrina i oslobađa energija od 26.72 MeV (dakle, pretpostavlja se da je pp -ciklus dominantan i da se ostali ciklusi mogu zanemariti).
- (2 boda) Sunce ima srednju gustoću 1.4 g cm $^{-3}$. Thomsonov udarni presjek za fotone na elektronima u Sunčevoj plazmi je:

$$\sigma_T(\gamma e^-) \rightarrow \sigma_T(\gamma e^-) \approx 0.665 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2 \quad .$$

Izračunajte srednji slobodni put fotona u Suncu. Uz pretpostavku nasumičnog hoda fotona na putu kroz Sunce, pokažite da je vrijeme potrebno da foton stvoren u središtu Sunca dođe do Zemlje jednako: $\tau=(R/l)^2(l/c)\approx 10^4$ godina. Dobivena vrijednost red je veličine manja od prave jer je izlazak fotona iz jezgre Sunca bitno usporen njezinom velikom gustoćom (faktor 200 u odnosu na prosječnu gustoću). Polumjer Sunca je $R=700\,000$ km.

- (3 boda) Gibanje svake od dvije vrste čestica unutar nekog zajedničkog volumena opisano je Maxwell-Boltzmannovom raspodjelom; pokažite da tada i relativna brzina između dvije čestice različite vrste zadovoljava istu statistiku (s tim da se u izrazu za tu raspodjelu pojavljuje reducirana masa).

13. (2 boda) Gamowljev vrh daje optimalnu energiju za termonuklearne reakcije između nabitih čestica, no nukleosinteza se u nekim posebnim situacijama odvija reakcijama izazvanim neutronima čiji je udarni presjek obrnuto proporcionalan relativnoj brzini neutrona i jezgara mete. Pretpostavite da je raspodjela po brzinama neutrona dana Maxwell - Boltzmannovom formulom pa nađite ovisnost brzine odvijanja r takvih reakcija o temperaturi.

Pomoć - ako definiramo:

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx \quad ,$$

tada vrijedi:

$$I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-2} \quad , \quad I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad , \quad I_1 = \frac{1}{2} \quad .$$

2.8 Dodatna literatura

1. B. Pagel: “*Nucleosynthesis and Chemical Evolution of Galaxies*”, Cambridge University Press, 2009.
2. D.D. Clayton: “*Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*”, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1983.
3. Ch. Iliadis: “*Nuclear Physics of Stars*”, John Wiley & Sons, 2007.
4. C.E. Rolfs, W.S. Rodney: “*Cauldrons in the Cosmos - Nuclear Astrophysics*”, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1988.
5. S.S.M. Wong: “*Introductory Nuclear Physics*”, John Wiley & Sons, 2004.