017-4.2001

Ispitajte otvorenost, zatvorenost, omeđenost, povezanost i kompaktnost sljedećih skupova

(a) $A = \{(y+\cos x, \sin x) : x \in [0, 2\pi], y \in [0,1]\}$

(b) $B = \{(x+1, y-1) : xy < 1\}$

Rj. (a) $f(x,y) = (y+\cos x, \sin x)$ je nepr. jer su funkcije $(x,y) \mapsto y+\cos x$ i $(x,y) \mapsto \sin x$ nepr.

(pojasnite zašto su neprekidne (DZ))

$$\left.\begin{array}{l} A = f(\underbrace{[0,2\pi]\times[0,1]}_{\text{kompaktan, omeđen, povezan}}) \\ f \text{ neprekidna} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ je kompaktan i povezan}$$

$\Rightarrow A$ je omeđen

$\Rightarrow A$ je zatvoren (*)

Ako bi A bio otvoren, onda bi slijedilo iz (*) da je A otvoren i zatvoren, a to znači da su A i A^c oba otvoreni.

$$\left.\begin{array}{l} A \cap \mathbb{R}^2 = A \neq \emptyset \quad A^c \cap \mathbb{R}^2 = A^c \neq \emptyset \\ A \cup A^c = \mathbb{R}^2 \\ A \cap A^c \cap \mathbb{R}^2 = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ je nepovezan } \Rightarrow\Leftarrow$$

Dakle, A nije otvoren.

b) $B = \{ (\underbrace{x+1}_{x'}, \underbrace{y-1}_{y'}) : \underbrace{xy}_{(x'-1)(y'+1)} < 1 \} = \{ (x', y') : (x'-1)(y'+1) < 1 \}$

$f(x', y') = (x'-1) \cdot (y'+1)$ je neprekidna (DZ, obrazložiti zašto)

$B = \{ (x, y) : f(x, y) < 1 \}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B = f^{-1}(\langle -\infty, 1 \rangle) \\ f \text{ neprekidna} \end{array}\right\} \Rightarrow B$ je otvoren skup

B nije omeđen jer $(n+1, \frac{1}{2n} - 1) \in B \ \forall n \in \mathbb{N}$

$n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ B nije kompaktan

Ako bi B bio zatvoren, onda bi B^c bio otvoren.

$\Rightarrow B$ i B^c su otvoreni $\Rightarrow$ (slično kao u a) dijelu)
$\mathbb{R}^2$ bi bio nepovezan $\Rightarrow \Leftarrow$

Dakle, B nije zatvoren.

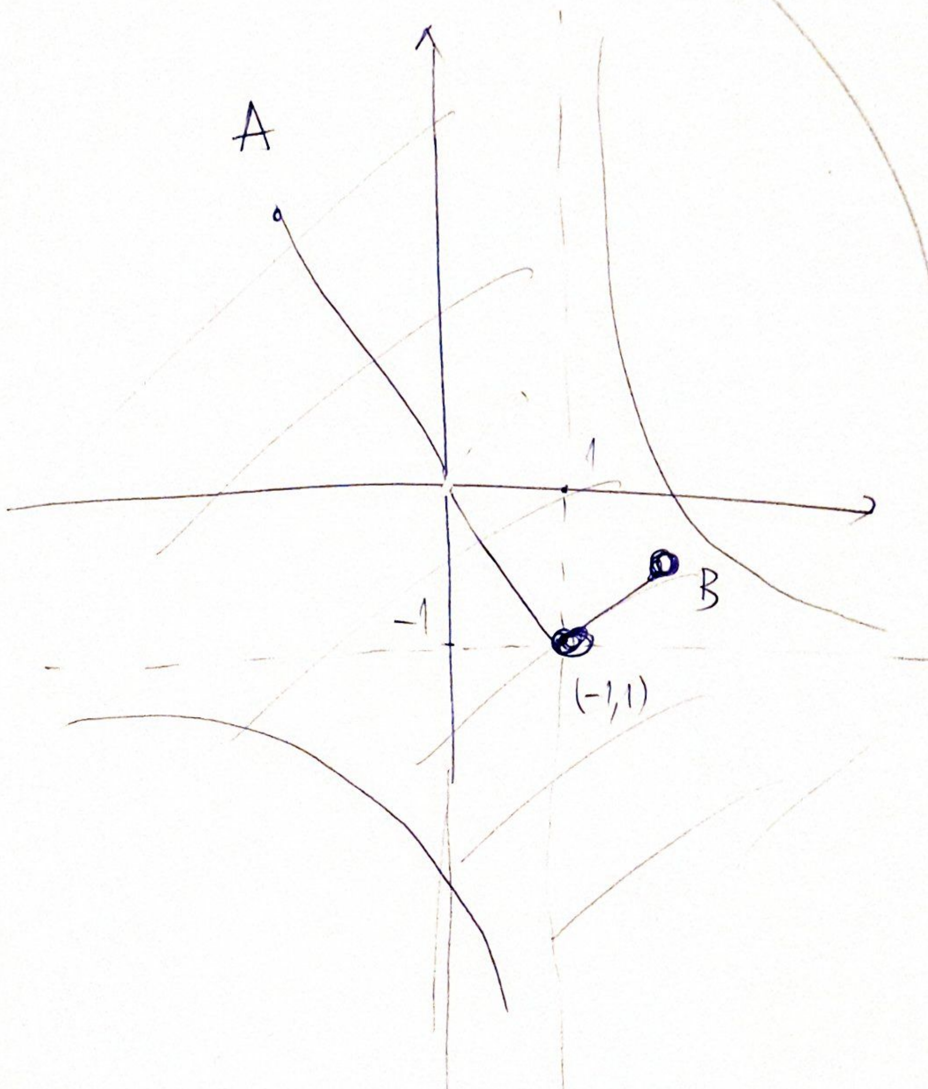
POVEZANOST: $(x_0, y_0) \in B \quad (x_0 - 1)(y_0 + 1) < 1 \Rightarrow x_0 y_0 + x_0 - y_0 - 1 < 1$

$\varphi(t) = (1-t)(x_0, y_0) + t(1, -1), \quad t \in [0, 1]$

φ nepr. $\quad \varphi(0) = (x_0, y_0) \quad \varphi(1) = (1, -1)$

$\varphi(t) = ((1-t)x_0 + t, (1-t)y_0 - t)$

B je putevim. povezan $\Rightarrow$ B je povezan



$$\big((1-t)x_0+t-1\big)\big((1-t)y_0-t+1\big) = (1-t)(x_0-1)(1-t)(y_0+1)$$
$$= \underbrace{(1-t)^2}_{\in[0,1]}\underbrace{(x_0-1)(y_0+1)}_{<1} < 1$$

$\Rightarrow \varphi(t) \in B$ $\quad\varphi$ je put od A do $(1,-1)$.

Put od A do B: Put od A do $(1,-1)$ +
put od $(1,-1)$ do B