

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 21. travnja 2021.

Zadatak 1 (10 bodova)

- (a) (6 bodova) Ispitajte je li niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dan s

$$a_{n+1} = \frac{6a_n - 9}{a_n}, \quad n \geq 1, \quad a_1 = 9,$$

konvergentan i, ako jest, odredite mu limes. Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje!

- (b) (4 boda) Odredite sve parametre $b \in \mathbb{R}$ tako da niz

$$b_n = \frac{2^{3n+5} + n^5 + 17}{n^8 + 2^{3n+1}} + (b^2 - 9) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

bude konvergentan.

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 21. travnja 2021.

Zadatak 2 (13 bodova)

- (a) (6 boda) Odredite infimum i supremum skupa:

$$S = \left\{ \frac{nm - n}{m^2n + 3m^2 - n - 3} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje!

- (c) (7 bodova) Neka je $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana sa

$$d(x, y) = \sqrt[3]{|y^3 - x^3|}.$$

Je li d metrika na \mathbb{R} ? Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje!

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 21. travnja 2021.

Zadatak 3 (13 bodova)

- (a) (7 bodova) Iskažite i dokažite teorem o sendviču za nizove u \mathbb{R} .
- (b) (4 boda) Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor i neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ dva Cauchyjeva niza u X . Dokažite da je niz $(z_n)_n$, gdje je $z_n = x_n + y_n$, Cauchyjev niz u X .
- (c) (2 boda) Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ dva ograničena niza u \mathbb{R} . Dokažite ili opovrgnite tvrdnju:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 21. travnja 2021.

Zadatak 4 (14 bodova)

- (a) (4 boda) Napišite definiciju gomilišta skupa i odredite zatvarač skupa

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, 0) = \frac{1}{n} \right\}$$

u euklidskom prostoru (\mathbb{R}^2, d_2) .

- (b) (6 bodova) Iskažite i dokažite Heine–Borelov teorem.
- (c) (4 boda) Dokažite da je skup $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ zatvoren skup u euklidskom prostoru \mathbb{R}^n .