Poglavlje 0: Uvod

Snježana Lubura Strunjak i Hrvoje Planinić

Zagreb, 3. listopada 2022.

O kolegiju

Predavanja [A-LJ]: ponedjeljak 9:00-12:00, A002, S. Lubura Strunjak
Predavanja [M-Ž]: ponedjeljak 12:00-15:00, 001, H. Planinić
Vježbe [A-LJ]: utorak 12:00-14:00, A001, N. Grubišić
Vježbe [M-Ž]: srijeda 12:00-14:00, A001, A. Beker

O kolegiju

Predavanja [A-LJ]: ponedjeljak 9:00-12:00, A002, S. Lubura Strunjak
Predavanja [M-Ž]: ponedjeljak 12:00-15:00, 001, H. Planinić
Vježbe [A-LJ]: utorak 12:00-14:00, A001, N. Grubišić
Vježbe [M-Ž]: srijeda 12:00-14:00, A001, A. Beker

Potrebno predznanje: Matematička analiza 1 i 2, nešto malo linearne algebre, elementarna teorija skupova, diskretna matematika.

O kolegiju

Predavanja [A-LJ]: ponedjeljak 9:00-12:00, A002, S. Lubura Strunjak
Predavanja [M-Ž]: ponedjeljak 12:00-15:00, 001, H. Planinić
Vježbe [A-LJ]: utorak 12:00-14:00, A001, N. Grubišić
Vježbe [M-Ž]: srijeda 12:00-14:00, A001, A. Beker

Potrebno predznanje: Matematička analiza 1 i 2, nešto malo linearne algebre, elementarna teorija skupova, diskretna matematika.
Literatura:

- N. Sandrić, Z. Vondraček, Vjerojatnost, skripta

Dodatna literatura:

- D. Stirzaker, Elementary Probability, Cambridge University Press, 2003.
- D. P. G. Hoel, S. C. Port, C. J. Stone, Introduction to Probability Theory, Houghton Mifflin Co, 1971.
- J. Pitman, Probability, Springer-Verlag, 1993.
- N. Sarapa, Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga

Pravila polaganja

Kolokviji: Održat će se dva kolokvija (u terminima određenim za kolokvije). Kolokviji su pismeni, traju dva sata, i sastoje se od zadataka i teorijskih pitanja. Broj mogućih bodova na svakom kolokviju je 50, što predstavlja 50% završne ocjene. Studenti na kolokvijima mogu imati samo pribor za pisanje.
Na prvom kolokviju ispitivat će se materijal sa predavanja i vježbi obrađen u prvoj polovici semestra. Prvi kolokvij održat će se u terminu određenom za prve kolokvije.
Na drugom kolokviju ispitivat će se materijal sa predavanja i vježbi koji nije bio uključen u prvi kolokvij (također i dijelovi pokriveni prije prvog kolokvija potrebni za razumijevanje kasnijeg materijala). Drugi kolokvij održat će se u terminu određenom za druge kolokvije. Na drugi kolokvij mogu izaći svi studenti.

Pravila polaganja

Kolokviji: Održat će se dva kolokvija (u terminima određenim za kolokvije). Kolokviji su pismeni, traju dva sata, i sastoje se od zadataka i teorijskih pitanja. Broj mogućih bodova na svakom kolokviju je 50, što predstavlja 50% završne ocjene. Studenti na kolokvijima mogu imati samo pribor za pisanje.
Na prvom kolokviju ispitivat će se materijal sa predavanja i vježbi obrađen u prvoj polovici semestra. Prvi kolokvij održat će se u terminu određenom za prve kolokvije.
Na drugom kolokviju ispitivat će se materijal sa predavanja i vježbi koji nije bio uključen u prvi kolokvij (također i dijelovi pokriveni prije prvog kolokvija potrebni za razumijevanje kasnijeg materijala). Drugi kolokvij održat će se u terminu određenom za druge kolokvije. Na drugi kolokvij mogu izaći svi studenti.

Ukupna ocjena: Ukupan broj mogućih bodova na oba kolokvija iznosi 100. Za prolaznu ocjenu potrebno je skupit barem 5 bodova na svakom od kolokvija te ukupno imati barem 50 bodova.

Pravila polaganja

Popravni ispit: Student ima pravo na izlazak na popravnu provjeru znanja ukoliko je na svakom kolokviju skupio barem 5 bodova. Održat će se samo jedna popravna provjera znanja, i to u terminu određenom za završne i/ili popravne provjere. Popravna provjera je kumulativna i sastoji se od zadataka i teorijskih pitanja. Broj mogućih bodova na popravnoj provjeri je 100. Studenti na popravnoj provjeri mogu imati samo pribor za pisanje. Završna ocjena studenata koji su izašli na popravnu provjeru temelji se na broju bodova koji se računa po sljedećoj formuli:
(2/3)(broj bodova na popravnom)+(1/3)(broj bodova na kolokvijima).

Pravila polaganja

Za prolaznu ocjenu potrebno je imati barem 50 bodova.
Studenti koji zbog bolesti ili drugog opravdanog razloga nisu bili u mogućnosti izaći na neki od kolokvija (najviše jedan), mogu taj konkretni kolokvij pisati ponovno (uz pismenu ispriku), i to u terminu popravne provjere ili u dogovoru s nastavnikom.
Studenti koji zbog bolesti ili drugog opravdanog razloga nisu bili u mogućnosti izaći na dva kolokvija, mogu pristupiti dodatnoj provjeri znanja uz odobrenje pomoćnika pročelnika za nastavu. Dodatna provjera piše se u terminu popravne provjere i jednaka je popravnoj provjeri.
Svi ostali mogući slučajevi koji nisu uključeni u gore opisane slučajeve rješavaju se pojedinačno sa predmetnim nastavnikom i pomoćnikom pročelnika za nastavu.

Pravila polaganja

Za prolaznu ocjenu potrebno je imati barem 50 bodova.
Studenti koji zbog bolesti ili drugog opravdanog razloga nisu bili u mogućnosti izaći na neki od kolokvija (najviše jedan), mogu taj konkretni kolokvij pisati ponovno (uz pismenu ispriku), i to u terminu popravne provjere ili u dogovoru s nastavnikom.
Studenti koji zbog bolesti ili drugog opravdanog razloga nisu bili u mogućnosti izaći na dva kolokvija, mogu pristupiti dodatnoj provjeri znanja uz odobrenje pomoćnika pročelnika za nastavu. Dodatna provjera piše se u terminu popravne provjere i jednaka je popravnoj provjeri.
Svi ostali mogući slučajevi koji nisu uključeni u gore opisane slučajeve rješavaju se pojedinačno sa predmetnim nastavnikom i pomoćnikom pročelnika za nastavu.

Domaće zadaće: Domaće zadaće zadavat će se na vježbama. Domaće zadaće nisu obavezne i ne donose nikakve bodove. Domaće zadaće služe za vježbu studenata. Zadaci na kolokvijima biti će slični zadacima zadanim za domaću zadaću.

Uvod: vjerojatnost i simetrija

Tipične vjerojatnosne tvrdnje:

(a) vjerojatnost pisma kod bacanja simetričnog novčića je 50%;

(b) vjerojatnost da je slučajno izvučena karta iz špila pik jednaka je 25%;

(c) vjerojatnost crnog polja u američkom ruletu je 18/38.

Uvod: vjerojatnost i simetrija

Tipične vjerojatnosne tvrdnje:

(a) vjerojatnost pisma kod bacanja simetričnog novčića je 50%;

(b) vjerojatnost da je slučajno izvučena karta iz špila pik jednaka je 25%;

(c) vjerojatnost crnog polja u američkom ruletu je $18/38$.

Kako smo došli do tih brojeva? Na primjer u (b), *slučajno izvučena karta* se interpretira kao sve karte u špilu su jednako vjerojatne. Budući da špil sadrži 52 karte od kojih je 13 pikova, dolazimo do broja $13/52 = 1/4 = 25\%$.

Uvod: vjerojatnost i simetrija

Tipične vjerojatnosne tvrdnje:

(a) vjerojatnost pisma kod bacanja simetričnog novčića je 50%;

(b) vjerojatnost da je slučajno izvučena karta iz špila pik jednaka je 25%;

(c) vjerojatnost crnog polja u američkom ruletu je 18/38.

Kako smo došli do tih brojeva? Na primjer u (b), *slučajno izvučena karta* se interpretira kao sve karte u špilu su jednako vjerojatne. Budući da špil sadrži 52 karte od kojih je 13 pikova, dolazimo do broja $13/52 = 1/4 = 25\%$.
U primjeru (a), *simetričan novčić* znači da su pismo i glava jednako vjerojatni, a u primjeru (c) imamo 18 crnih, 18 crvenih te 2 zelena polja, koja su sva jednako vjerojatna.
Pišemo $\mathbb{P}(A) = p$, $A =$ palo je pismo, izvučena karta je pik, odabrano polje je crno.

Uvod: vjerojatnost i simetrija, nastavak

Gornji primjeri vode do sljedećeg pristupa vjerojatnosti: pretpostavimo da pokus (procedura) sa slučajnim ishodom ima n mogućih ishoda. Nadalje, pretpostavimo da su zbog razloga simetrije svi ti ishodi *jednako* vjerojatni. Ako je A kolekcija od r takvih ishoda, onda je

$$\mathbb{P}(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{broj ishoda u } A}{\text{ukupan broj ishoda}}.$$

Uočite $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$. Ako A sadrži sve ishode, onda je $\mathbb{P}(A) = 1$; ako A ne sadrži niti jedan ishod, $\mathbb{P}(A) = 0$.

Uvod: vjerojatnost i simetrija, nastavak

Gornji primjeri vode do sljedećeg pristupa vjerojatnosti: pretpostavimo da pokus (procedura) sa slučajnim ishodom ima n mogućih ishoda. Nadalje, pretpostavimo da su zbog razloga simetrije svi ti ishodi *jednako* vjerojatni. Ako je A kolekcija od r takvih ishoda, onda je

$$\mathbb{P}(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{broj ishoda u } A}{\text{ukupan broj ishoda}}.$$

Uočite $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$. Ako A sadrži sve ishode, onda je $\mathbb{P}(A) = 1$; ako A ne sadrži niti jedan ishod, $\mathbb{P}(A) = 0$.

Ovakav pristup vjerojatnosti ima raznih problema. Na primjer,

(1) Mnoge slučajne procedure ne sadrže u sebi očiglednu (ili bilo kakvu) simetriju;

(2) Donekle je zabrinjavajuće da ne treba izvršiti pokus (ili puno pokusa), npr. bacanja novčića, da bi se zaključilo da je vjerojatnost pisma 50%;

(3) Zbog razloga simetrije pretpostavljeno je da su svi ishodi jednako vjerojatni. Ukoliko želimo definirati pojam *vjerojatnosti* ovaj pristup čini se kružnim.

Uvod: vjerojatnost i relativna frekvencija

Promatramo slučajnu proceduru (pokus) s konačno mnogo ishoda koji nisu nužno jednako vjerojatni (nema simetrije). Na primjer, bacamo namještenu ili oštećenu igraću kocku. Kako možemo definirati vjerojatnost $\mathbb{P}(A)$ bilo kojeg događaja koji nas zanima, npr. $A =$ pala je šestica?

Uvod: vjerojatnost i relativna frekvencija

Promatramo slučajnu proceduru (pokus) s konačno mnogo ishoda koji nisu nužno jednako vjerojatni (nema simetrije). Na primjer, bacamo namještenu ili oštećenu igraću kocku. Kako možemo definirati vjerojatnost $\mathbb{P}(A)$ bilo kojeg događaja koji nas zanima, npr. $A =$ pala je šestica?
Iako problem ne sadrži simetriju, možemo uvesti simetriju na drugi način. Pretpostavimo da bacamo kocku n puta, n velik te neka je $n(A)$ broj koliko puta se u tih n pokusa dogodio A (koliko puta je pala šestica). Tada, uz pretpostavku da su sva bacanja bila pod sličnim uvjetima, simetrija među bacanjima sugerira da je

$$\mathbb{P}(A) \approx \frac{n(A)}{n} = \frac{\text{broj pojavljivanja događaja } A}{\text{broj ponanvljanja pokusa}}\,.$$

Uvod: vjerojatnost i relativna frekvencija

Promatramo slučajnu proceduru (pokus) s konačno mnogo ishoda koji nisu nužno jednako vjerojatni (nema simetrije). Na primjer, bacamo namještenu ili oštećenu igraću kocku. Kako možemo definirati vjerojatnost $\mathbb{P}(A)$ bilo kojeg događaja koji nas zanima, npr. $A =$ pala je šestica?
Iako problem ne sadrži simetriju, možemo uvesti simetriju na drugi način. Pretpostavimo da bacamo kocku n puta, n velik te neka je $n(A)$ broj koliko puta se u tih n pokusa dogodio A (koliko puta je pala šestica). Tada, uz pretpostavku da su sva bacanja bila pod sličnim uvjetima, simetrija među bacanjima sugerira da je

$$\mathbb{P}(A) \approx \frac{n(A)}{n} = \frac{\text{broj pojavljivanja događaja } A}{\text{broj ponanvljanja pokusa}} .$$

Broj $n(A)/n$ nazivamo *relativna frekvencija* događaja A (u n pokusa). Kada $n \to \infty$, očekujemo da $n(A)/n$ konvergira nekoj vrijednosti. To vodi na sljedeću moguću definiciju vjerojatnosti:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} .$$

Uočimo da je i u ovoj situaciji $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Uvod: vjerojatnost i relativna frekvencija, nastavak

Ovaj pristup vjerojatnosti također ima razne probleme:

(1) Nije jasno zašto bi limes $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$ postojao;

(2) Čak ako taj limes postoji za svaki niz ponovljenih pokusa, nije jasno zašto bi svaki takav niz dao isti limes;

(3) Naravno, niti jedan pokus ne može se ponoviti beskonačno mnogo puta, a neki slučajni pokusi ne više od jedanput.

Uvod: vjerojatnost i relativna frekvencija, nastavak

Ovaj pristup vjerojatnosti također ima razne probleme:

(1) Nije jasno zašto bi limes $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$ postojao;

(2) Čak ako taj limes postoji za svaki niz ponovljenih pokusa, nije jasno zašto bi svaki takav niz dao isti limes;

(3) Naravno, niti jedan pokus ne može se ponoviti beskonačno mnogo puta, a neki slučajni pokusi ne više od jedanput.

Zaključak: Vjerojatnost je broj između 0 i 1, gdje 0 označava nemogućnost, a 1 izvjesnost.