Poglavlje 2: Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

Snježana Lubura Strunjak i Zoran Vondraček

Zagreb, 12. listopada 2020.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.1

Primjer 2.1 Bacamo dvije simetrične igraće kocke, crvenu i plavu, i zanima nas vjerojatnost da je zbroj brojeva na obje kocke jednak 6. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$, gdje je i broj na crvenoj, a j na plavoj kocki. Vjerojatnost svakog elementarnog događaja je, zbog simetrije, jednaka $1/36$. Događaj koji nas zanima je

$$A = \{\text{zbroj brojeva je } 6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}\,.$$

Očito je $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = \frac{5}{36}$.

Primjer 2.1 Bacamo dvije simetrične igraće kocke, crvenu i plavu, i zanima nas vjerojatnost da je zbroj brojeva na obje kocke jednak 6. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$, gdje je i broj na crvenoj, a j na plavoj kocki. Vjerojatnost svakog elementarnog događaja je, zbog simetrije, jednaka $1/36$. Događaj koji nas zanima je

$$A = \{\text{zbroj brojeva je } 6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}\,.$$

Očito je $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = \frac{5}{36}$.
Pretpostavimo da su kocke bačene te da nam je poznato da je na plavoj kocki pao broj 2. Kolika je sada vjerojatnost da je zbroj brojeva na obje kocke jednak 6?

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.1

Primjer 2.1 Bacamo dvije simetrične igraće kocke, crvenu i plavu, i zanima nas vjerojatnost da je zbroj brojeva na obje kocke jednak 6. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$, gdje je i broj na crvenoj, a j na plavoj kocki. Vjerojatnost svakog elementarnog događaja je, zbog simetrije, jednaka $1/36$. Događaj koji nas zanima je

$$A = \{\text{zbroj brojeva je } 6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}\,.$$

Očito je $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = \frac{5}{36}$.
Pretpostavimo da su kocke bačene te da nam je poznato da je na plavoj kocki pao broj 2. Kolika je sada vjerojatnost da je zbroj brojeva na obje kocke jednak 6?
Intuitivno je jasno da budući da znamo da je broj na plavoj kocki jednak 2, vjerojatnost da je zbroj jednak 6 jednaka je vjerojatnosti da je na crvenoj kocki pala četvorka, dakle $1/6$. Malo preciznije, uz dano da je broj na plavoj kocki 2, preostaje samo šest mogućih ishoda našeg pokusa: $(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)$. Budući da je svaki od ovih ishoda originalno imao istu vjerojatnost pojavljivanja, ti ishodi i dalje imaju jednaku vjerojatnost. Kako ih ima šest, svaki od njih ima vjerojatnost $1/6$. Zaključujemo da je vjerojatnost ishoda $(2,4)$ (koji od preostalih šest ishoda jedini daje zbroj 6) jednaka $1/6$.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.1, nastavak

Označimo sa B događaj da je na plavoj kocki pao broj 2:

$$B = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}.$$

Informacija da je na plavoj kocki pao broj 2 se može izreći: događaj B se dogodio. Za daljnje računanje vjerojatnosti originalni prostor elementarnih događaja Ω nije više relevantan – sva informacija dana je u *reduciranom* prostoru elementarnih događaja B.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.1, nastavak

Označimo sa B događaj da je na plavoj kocki pao broj 2:

$$B = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}.$$

Informacija da je na plavoj kocki pao broj 2 se može izreći: događaj B se dogodio. Za daljnje računanje vjerojatnosti originalni prostor elementarnih događaja Ω nije više relevantan – sva informacija dana je u *reduciranom* prostoru elementarnih događaja B.

Vjerojatnost događaja A ukoliko se dogodio događaj B naziva se *uvjetna vjerojatnost od A uz dano B*, označava s $\mathbb{P}(A \mid B)$ i u ovom slučaju računa kao omjer broja ishoda u $A \cap B$ i broja svih ishoda u B, dakle $|A \cap B|/|B|$.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Definicija

Definicija 2.2 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$. *Uvjetna vjerojatnost događaja A uz dano B* definira se formulom

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\,. \tag{1}$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Definicija

Definicija 2.2 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$. *Uvjetna vjerojatnost događaja A uz dano B* definira se formulom

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} . \tag{1}$$

Uočite da iz definicije uvjetne vjerojatnsti odmah slijedi da je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B) \tag{2}$$

što čitamo kao: vjerojatnost da se istovremeno dogode A i B jednaka je produktu vjerojatnosti da se dogodi B i uvjetne vjerojatnosti da se dogodi A ako se dogodio B.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Definicija

Definicija 2.2 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$. *Uvjetna vjerojatnost događaja A uz dano B* definira se formulom

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\,. \tag{1}$$

Uočite da iz definicije uvjetne vjerojatnsti odmah slijedi da je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B) \tag{2}$$

što čitamo kao: vjerojatnost da se istovremeno dogode A i B jednaka je produktu vjerojatnosti da se dogodi B i uvjetne vjerojatnosti da se dogodi A ako se dogodio B.

Ako je i $\mathbb{P}(A) > 0$, onda je dobro definirana uvjetna vjerojatnost $\mathbb{P}(B \mid A)$ te vrijedi

$$\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)\,. \tag{3}$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Poopćenje formule (2)

Formula (2) poopćuje se sa dva na n događaja: pretpostavimo da su $A_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, takvi da je $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Tada vrijedi

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\,.
\end{aligned} \tag{4}
$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Poopćenje formule (2)

Formula (2) poopćuje se sa dva na n događaja: pretpostavimo da su $A_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, takvi da je $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Dokaz formule je jednostavan: raspišemo desnu stranu po definiciji i dobijemo

$$\mathbb{P}(A_1) \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \frac{\mathbb{P}(A_3 \cap A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{\mathbb{P}(A_n \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})} \,.$$

Svi članovi se pokrate osim brojnika u zadnjem faktoru koji je upravo jednak lijevoj strani u (4).

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Uvjetna vjerojatnost je vjerojatnost

Za $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$ uvedimo oznaku

$$\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Uvjetna vjerojatnost je vjerojatnost

Za $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$ uvedimo oznaku

$$\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Propozicija 2.3 Neka je $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$. Tada je $\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Uvjetna vjerojatnost je vjerojatnost

Za $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$ uvedimo oznaku

$$\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\,, \qquad A \in \mathcal{F}\,.$$

Propozicija 2.3 Neka je $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$. Tada je $\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$.

Dokaz: Trebamo provjeriti da $\mathbb{P}_B$ zadovoljava aksiome (A1)–(A3).

(A1) $\mathbb{P}_B(A) \geq 0$ za sve $A \in \mathcal{F}$;

(A2) $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cap B)/\mathbb{P}(B) = 1$;

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Uvjetna vjerojatnost je vjerojatnost

(A3) Neka je $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz po parovima disjunktnih događaja iz $\mathcal{F}$. Tada je niz $(A_j \cap B)_{j\in\mathbb{N}}$ također niz po parovima disjunktnih događaja pa iz definicije uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}_B$ i σ-aditivnosti od $\mathbb{P}$ slijedi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j\cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_j\cap B) = \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}_B(A_j)\,.
\end{aligned}
$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Uvjetna vjerojatnost je vjerojatnost

(A3) Neka je $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz po parovima disjunktnih događaja iz $\mathcal{F}$. Tada je niz $(A_j \cap B)_{j\in\mathbb{N}}$ također niz po parovima disjunktnih događaja pa iz definicije uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}_B$ i σ-aditivnosti od $\mathbb{P}$ slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j\cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_j\cap B) = \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}_B(A_j)\,.\end{aligned}$$

Iz Propozicije 2.3 zaključujemo da uvjetna vjerojatnost uz dano B zadovoljava sva svojstva vjerojatnosti. Na primjer, (i) za $A, C \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A\cup C \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(C \mid B) - \mathbb{P}(A\cap C \mid B)\,,$$

(ii) ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neopadajući iz događaja, onda je

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid B\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n \mid B)\,.$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Formula potpune vjerojatnosti

Pretpostavimo da je $(H_i)_{i\in I}$ konačna ili prebrojiva familija događaja iz $\mathcal{F}$ takva da je $\mathbb{P}(H_i) > 0$ za sve $i \in I$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$ te $\cup_{i\in I} H_i = \Omega$. Takvu familiju $(H_i)_{i\in I}$ zovemo *potpun sustav događaja* .

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Formula potpune vjerojatnosti

Pretpostavimo da je $(H_i)_{i\in I}$ konačna ili prebrojiva familija događaja iz $\mathcal{F}$ takva da je $\mathbb{P}(H_i) > 0$ za sve $i \in I$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$ te $\cup_{i\in I} H_i = \Omega$. Takvu familiju $(H_i)_{i\in I}$ zovemo *potpun sustav događaja* .

Događaje H_i često zovemo *hipoteze* . Sljedeći rezultat kaže da se vjerojatnost svakog događaja može izračunati kao težinska sredina uvjetnih vjerojatnosnti tog događaja uvjetno na hipoteze, s težinama jednakim vjerojatnosti hipoteza.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Formula potpune vjerojatnosti

Pretpostavimo da je $(H_i)_{i\in I}$ konačna ili prebrojiva familija događaja iz $\mathcal{F}$ takva da je $\mathbb{P}(H_i) > 0$ za sve $i \in I$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$ te $\cup_{i\in I} H_i = \Omega$. Takvu familiju $(H_i)_{i\in I}$ zovemo *potpun sustav događaja* .

Događaje H_i često zovemo *hipoteze* . Sljedeći rezultat kaže da se vjerojatnost svakog događaja može izračunati kao težinska sredina uvjetnih vjerojatnosnti tog događaja uvjetno na hipoteze, s težinama jednakim vjerojatnosti hipoteza.

Propozicija 2.4 (Formula potpune vjerojatnosti) Neka je $(H_i)_{i\in I}$ potpun sustav događaja. Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)\,.$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Formula potpune vjerojatnosti, dokaz

Dokaz: Korištenjem činjenice da je $\cup_{i\in I} H_i = \Omega$ u prvoj jednakosti, σ-aditivnost u trećoj te (2) u četvrtoj, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(A \cap \Big(\bigcup_{i\in I} H_i\Big)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I}(A \cap H_i)\right) \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A\cap H_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)\,.\end{aligned}$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.6

Primjer 2.6 U dvije kutije nalaze se crne i bijele kuglice. U prvoj kutiji je 1 bijela i 3 crne kuglice, a u drugoj kutiji je 6 bijelih i 2 crne kuglice. Slučajno se izabire kutija te se iz izabrane kutije na slučajan način izvuče jedna kuglica.

(a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena crna kuglica?

(b) Ako je izvučena crna kuglica, nađite vjerojatnost da je izvučena iz prve kutije.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.6

Primjer 2.6 U dvije kutije nalaze se crne i bijele kuglice. U prvoj kutiji je 1 bijela i 3 crne kuglice, a u drugoj kutiji je 6 bijelih i 2 crne kuglice. Slučajno se izabire kutija te se iz izabrane kutije na slučajan način izvuče jedna kuglica.

(a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena crna kuglica?

(b) Ako je izvučena crna kuglica, nađite vjerojatnost da je izvučena iz prve kutije.

Opisani slučajni pokusi sastoji se od dva pokusa: prvi je slučajni odabir kutije, a drugi slučajni odabir kuglice iz izabrane kutije. Uočite da vjerojatnost ishoda drugog pokusa ovise o rezultatu prvog. Prostor elementarnih događaja Ω ovdje nećemo eksplicitno konstruirati (vidi pododjeljak 2.1.1).

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.6

Primjer 2.6 U dvije kutije nalaze se crne i bijele kuglice. U prvoj kutiji je 1 bijela i 3 crne kuglice, a u drugoj kutiji je 6 bijelih i 2 crne kuglice. Slučajno se izabire kutija te se iz izabrane kutije na slučajan način izvuče jedna kuglica.

(a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena crna kuglica?

(b) Ako je izvučena crna kuglica, nađite vjerojatnost da je izvučena iz prve kutije.

Opisani slučajni pokusi sastoji se od dva pokusa: prvi je slučajni odabir kutije, a drugi slučajni odabir kuglice iz izabrane kutije. Uočite da vjerojatnost ishoda drugog pokusa ovise o rezultatu prvog. Prostor elementarnih događaja Ω ovdje nećemo eksplicitno konstruirati (vidi pododjeljak 2.1.1).
Prvi pokus ima dva ishoda, $H_1 = \{\text{odabrana prva kutija}\}$ i $H_2 = \{\text{odabrana druga kutija}\}$. Kakav god bio Ω, očito vrijedi da je $\Omega = H_1 \cup H_2$ te $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Dakle, $\{H_1, H_2\}$ je potpun sustav događaja te vrijedi da je $\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2) = 1/2$.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.6, nastavak

1. kutija: 1B i 3C; 2.kutija: 6B i 2C.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.6, nastavak

1. kutija: 1B i 3C; 2.kutija: 6B i 2C.

(a) Neka je $C = \{\text{izvučena kuglica je crna}\}$. Po formuli potpune vjerojatnosti

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(C \mid H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(C \mid H_2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(C \mid H_1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(C \mid H_2)\,.$$

Uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}(C \mid H_1)$ i $\mathbb{P}(C \mid H_2)$ je jednostavno izračunati:

$$\mathbb{P}(C \mid H_1) = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}\,, \qquad \mathbb{P}(C \mid H_2) = \frac{2}{6+2} = \frac{1}{4}\,.$$

Slijedi da je

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Uočite da kada bi sve kuglice bile u istoj kutiji, vjerojatnost da se izvuče crna bila bi $5/12$.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.6, nastavak

1. kutija: 1B i 3C; 2.kutija: 6B i 2C.

(a) Neka je $C = \{\text{izvučena kuglica je crna}\}$. Po formuli potpune vjerojatnosti

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(C \mid H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(C \mid H_2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(C \mid H_1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(C \mid H_2)\,.$$

Uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}(C \mid H_1)$ i $\mathbb{P}(C \mid H_2)$ je jednostavno izračunati:

$$\mathbb{P}(C \mid H_1) = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}\,, \qquad \mathbb{P}(C \mid H_2) = \frac{2}{6+2} = \frac{1}{4}\,.$$

Slijedi da je

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Uočite da kada bi sve kuglice bile u istoj kutiji, vjerojatnost da se izvuče crna bila bi $5/12$.

(b) Traži se $\mathbb{P}(H_1 \mid C)$! Ukoliko nam je poznato da je izvučena kuglica crna, intuitivno je vjerojatnije da je izvučena iz prve kutije (prva kutija ima veći omjer crnih kuglica nego druga). Uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}(H_1 \mid C)$ računamo pomoću definicije i formule (3),

$$\mathbb{P}(H_1 \mid C) = \frac{\mathbb{P}(H_1 \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(C \mid H_1)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\,.$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Apriorne i aposteriorne vjerojatnosti

Originalne vjerojatnosti hipoteza $\mathbb{P}(H_j)$ zovu se *apriorne vjerojatnosti.* To su vjerojatnosti koje pridružujemao hipotezama u nedostatku drugih informacija. Nakon što je ustanovljeno da je izvučena kuglica crna (dodatna informacija) apriorne vjerojatnosti modificiramo tako da uključimo novu informaciju. Dobivene vjerojatnosti $\mathbb{P}(H_j \mid C)$ zovu se *aposteriorne vjerojatnosti.*

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Apriorne i aposteriorne vjerojatnosti

Originalne vjerojatnosti hipoteza $\mathbb{P}(H_j)$ zovu se *apriorne vjerojatnosti*.To su vjerojatnosti koje pridružujemao hipotezama u nedostatku drugih informacija. Nakon što je ustanovljeno da je izvučena kuglica crna (dodatna informacija) apriorne vjerojatnosti modificiramo tako da uključimo novu informaciju. Dobivene vjerojatnosti $\mathbb{P}(H_j \mid C)$ zovu se *aposteriorne vjerojatnosti*.

Račun iz Primjera 2.6 formaliziramo u sljedećem teoremu koji je poznat pod imenom Bayesova formula.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Bayesova formula

Teorem 2.7 (Bayesova formula) Neka je $(H_i)_{i \in I}$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A) > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(H_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A \mid H_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)} .$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Bayesova formula

Teorem 2.7 (Bayesova formula) Neka je $(H_i)_{i\in I}$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A) > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(H_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A \mid H_j)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)}\,.$$

Dokaz: Korištenjem definicije uvjetne vjerojatnosti u prvoj jednakosti, (3) u drugoj i formule potpune vjerojatnosti u trećoj, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_j \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(H_j \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A \mid H_j)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A \mid H_j)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)}\,.\end{aligned}$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.8

Primjer 2.8 Laboratorijski krvni test je 95% učinkovit u otkrivanju konkretne bolesti kada je ta bolest prisutna. Test također ukazuje na bolest i u 1% slučajeva kada je osoba zdrava (*false positive*). Poznato je da 0.1% populacije ima tu bolest. Kolika je vjerojatnost da (slučajno odabrana) osoba ima tu bolest ako je rezultat testa pozitivan?

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.8

Primjer 2.8 Laboratorijski krvni test je 95% učinkovit u otkrivanju konkretne bolesti kada je ta bolest prisutna. Test također ukazuje na bolest i u 1% slučajeva kada je osoba zdrava (*false positive*). Poznato je da 0.1% populacije ima tu bolest. Kolika je vjerojatnost da (slučajno odabrana) osoba ima tu bolest ako je rezultat testa pozitivan?

Rješenje: Zanimaju nas sljedeća dva događaja: $B = \{\text{osoba je bolesna}\}$ i $P = \{\text{test je pozitivan}\}$.

Primjer 2.8 Laboratorijski krvni test je 95% učinkovit u otkrivanju konkretne bolesti kada je ta bolest prisutna. Test također ukazuje na bolest i u 1% slučajeva kada je osoba zdrava (*false positive*). Poznato je da 0.1% populacije ima tu bolest. Kolika je vjerojatnost da (slučajno odabrana) osoba ima tu bolest ako je rezultat testa pozitivan?

Rješenje: Zanimaju nas sljedeća dva događaja: $B = \{\text{osoba je bolesna}\}$ i $P = \{\text{test je pozitivan}\}$. Traži se $\mathbb{P}(B \mid P)$ – uvjetna vjerojatnost da je osoba bolesna ako je test pozitivan.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.8

Primjer 2.8 Laboratorijski krvni test je 95% učinkovit u otkrivanju konkretne bolesti kada je ta bolest prisutna. Test također ukazuje na bolest i u 1% slučajeva kada je osoba zdrava (*false positive*). Poznato je da 0.1% populacije ima tu bolest. Kolika je vjerojatnost da (slučajno odabrana) osoba ima tu bolest ako je rezultat testa pozitivan?

Rješenje: Zanimaju nas sljedeća dva događaja: $B = \{\text{osoba je bolesna}\}$ i $P = \{\text{test je pozitivan}\}$. Traži se $\mathbb{P}(B \mid P)$ – uvjetna vjerojatnost da je osoba bolesna ako je test pozitivan.
Podatke koji su nam dani zapisujemo matematički na sljedeći način:
$\mathbb{P}(P \mid B) = 0.95$ – uvjetna vjerojatnost da je test pozitivan ako je osoba bolesna (test otkriva bolest),
$\mathbb{P}(P \mid B^c) = 0.01$ – uvjetna vjerojatnost da je test pozitivan ako je osoba zdrava (false positive),
$\mathbb{P}(B) = 0.001$ – vjerojatnost da je slučajno odabrana osoba bolesna.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.8

Primjer 2.8 Laboratorijski krvni test je 95% učinkovit u otkrivanju konkretne bolesti kada je ta bolest prisutna. Test također ukazuje na bolest i u 1% slučajeva kada je osoba zdrava (*false positive*). Poznato je da 0.1% populacije ima tu bolest. Kolika je vjerojatnost da (slučajno odabrana) osoba ima tu bolest ako je rezultat testa pozitivan?

Rješenje: Zanimaju nas sljedeća dva događaja: $B = \{\text{osoba je bolesna}\}$ i $P = \{\text{test je pozitivan}\}$. Traži se $\mathbb{P}(B \mid P)$ – uvjetna vjerojatnost da je osoba bolesna ako je test pozitivan.
Podatke koji su nam dani zapisujemo matematički na sljedeći način:
$\mathbb{P}(P \mid B) = 0.95$ – uvjetna vjerojatnost da je test pozitivan ako je osoba bolesna (test otkriva bolest),
$\mathbb{P}(P \mid B^c) = 0.01$ – uvjetna vjerojatnost da je test pozitivan ako je osoba zdrava (false positive),
$\mathbb{P}(B) = 0.001$ – vjerojatnost da je slučajno odabrana osoba bolesna. Po Bayesovoj formuli je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \mid P) &= \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(P \mid B)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(P \mid B) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(P \mid B^c)} \\ &= \frac{0.001 \times 0.95}{0.001 \times 0.95 + 0.999 \times 0.01} = \frac{950}{10940} \approx 0.0868\end{aligned}$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9

Primjer 2.9 Reći ćemo da događaj B *privlači* događaj A ako vrijedi $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$ – vjerojatnost pojavljivanja A povećava se ako znamo da se dogodio B.
$\iff \mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9

Primjer 2.9 Reći ćemo da događaj B *privlači* događaj A ako vrijedi $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$ – vjerojatnost pojavljivanja A povećava se ako znamo da se dogodio B.
$\iff \mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
Na primjer, bacamo dvije simetrične kocke. Neka je A događaj da je na prvoj kocki pala šestica. Jasno, $\mathbb{P}(A) = 1/6$. Ako je
$B = \{\text{zbroj brojeva na obje kocke je strogo veći od } 8\} = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),$ $(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ intuitivno je jasno da B privlači A. Zaista

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{4/36}{10/36} = \frac{2}{5} > \frac{1}{6}.$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9

Primjer 2.9 Reći ćemo da događaj B *privlači* događaj A ako vrijedi $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$ – vjerojatnost pojavljivanja A povećava se ako znamo da se dogodio B.
$\iff \mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
Na primjer, bacamo dvije simetrične kocke. Neka je A događaj da je na prvoj kocki pala šestica. Jasno, $\mathbb{P}(A) = 1/6$. Ako je
$B = \{\text{zbroj brojeva na obje kocke je strogo veći od } 8\} = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ intuitivno je jasno da B privlači A. Zaista

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{4/36}{10/36} = \frac{2}{5} > \frac{1}{6}\,.$$

Događaj B *odbija* događaj A ako vrijedi $\mathbb{P}(A \mid B) < \mathbb{P}(A)$.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9

Primjer 2.9 Reći ćemo da događaj B *privlači* događaj A ako vrijedi $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$ – vjerojatnost pojavljivanja A povećava se ako znamo da se dogodio B.
$\iff \mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
Na primjer, bacamo dvije simetrične kocke. Neka je A događaj da je na prvoj kocki pala šestica. Jasno, $\mathbb{P}(A) = 1/6$. Ako je
$B = \{\text{zbroj brojeva na obje kocke je strogo veći od } 8\} = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),$ $(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ intuitivno je jasno da B privlači A. Zaista

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{4/36}{10/36} = \frac{2}{5} > \frac{1}{6}\,.$$

Događaj B *odbija* događaj A ako vrijedi $\mathbb{P}(A \mid B) < \mathbb{P}(A)$.

(a) Ako B privlači A, onda A privlači B. Zbog toga možemo reći da se A i B privlače (tj. privlačnost je simetrična relacija). Zaista, B privlači A ako i samo ako je $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A \mid B)$ što je ekvivalentno s $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A \cap B)$. Taj zadnji uvjet je također ekvivalentan s $\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B \mid A)$, odnosno A privlači B.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9

Primjer 2.9 Reći ćemo da događaj B *privlači* događaj A ako vrijedi $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$ – vjerojatnost pojavljivanja A povećava se ako znamo da se dogodio B.
$\Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
Na primjer, bacamo dvije simetrične kocke. Neka je A događaj da je na prvoj kocki pala šestica. Jasno, $\mathbb{P}(A) = 1/6$. Ako je
$B = \{\text{zbroj brojeva na obje kocke je strogo veći od } 8\} = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),$ $(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ intuitivno je jasno da B privlači A. Zaista

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{4/36}{10/36} = \frac{2}{5} > \frac{1}{6}\,.$$

Događaj B *odbija* događaj A ako vrijedi $\mathbb{P}(A \mid B) < \mathbb{P}(A)$.

(a) Ako B privlači A, onda A privlači B. Zbog toga možemo reći da se A i B privlače (tj. privlačnost je simetrična relacija). Zaista, B privlači A ako i samo ako je $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A \mid B)$ što je ekvivalentno s $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A \cap B)$. Taj zadnji uvjet je također ekvivalentan s $\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B \mid A)$, odnosno A privlači B.
(b) Ako B privlači A, onda B^c odbija A. Treba pokazati da je $\mathbb{P}(A \cap B^c) < \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$. Imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \cap B^c).\end{aligned}$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9, nastavak

(c) Važan dokument nalazi se u jednoj on n kutija prepunih dokumenata. Vjerojatnost događaja H_j da se dokument nalazi u j-toj kutiji jednaka je $p_j \in (0, 1)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdje vrijedi $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9, nastavak

(c) Važan dokument nalazi se u jednoj on n kutija prepunih dokumenata. Vjerojatnost događaja H_j da se dokument nalazi u j-toj kutiji jednaka je $p_j \in (0, 1)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdje vrijedi $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Sa F_j označimo događaj da djelomičnim pretraživanjem j-te kutije ne nađemo traženi dokument. Neka je $q_j \in (0, 1)$ vjerojatnost događaja F_j ukoliko dokument jeste u j-toj kutiji.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9, nastavak

(c) Važan dokument nalazi se u jednoj on n kutija prepunih dokumenata. Vjerojatnost događaja H_j da se dokument nalazi u j-toj kutiji jednaka je $p_j \in (0, 1)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdje vrijedi $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Sa F_j označimo događaj da djelomičnim pretraživanjem j-te kutije ne nađemo traženi dokument. Neka je $q_j \in (0, 1)$ vjerojatnost događaja F_j ukoliko dokument jeste u j-toj kutiji. Dokažite da se događaji H_j i F_j odbijaju, ali F_j privlači H_i za $i \neq j$.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9, nastavak

(c) Važan dokument nalazi se u jednoj on n kutija prepunih dokumenata. Vjerojatnost događaja H_j da se dokument nalazi u j-toj kutiji jednaka je $p_j \in (0,1)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdje vrijedi $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Sa F_j označimo događaj da djelomičnim pretraživanjem j-te kutije ne nađemo traženi dokument. Neka je $q_j \in (0,1)$ vjerojatnost događaja F_j ukoliko dokument jeste u j-toj kutiji. Dokažite da se događaji H_j i F_j odbijaju, ali F_j privlači H_i za $i \neq j$.
Dano je $\mathbb{P}(H_j) = p_j$, $\mathbb{P}(F_j \mid H_j) = q_j$ i zbog prirode problema $\mathbb{P}(F_j \mid H_i) = 1$ za $i \neq j$ (ako je dokument u i-toj kutiji, vjerojatnost da ga ne nađemo u j-toj je 1).

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9, nastavak

(c) Važan dokument nalazi se u jednoj on n kutija prepunih dokumenata. Vjerojatnost događaja H_j da se dokument nalazi u j-toj kutiji jednaka je $p_j \in (0,1)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdje vrijedi $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Sa F_j označimo događaj da djelomičnim pretraživanjem j-te kutije ne nađemo traženi dokument. Neka je $q_j \in (0,1)$ vjerojatnost događaja F_j ukoliko dokument jeste u j-toj kutiji. Dokažite da se događaji H_j i F_j odbijaju, ali F_j privlači H_i za $i \neq j$.
Dano je $\mathbb{P}(H_j) = p_j$, $\mathbb{P}(F_j \mid H_j) = q_j$ i zbog prirode problema $\mathbb{P}(F_j \mid H_i) = 1$ za $i \neq j$ (ako je dokument u i-toj kutiji, vjerojatnost da ga ne nađemo u j-toj je 1).

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9, nastavak

(c) Važan dokument nalazi se u jednoj on n kutija prepunih dokumenata. Vjerojatnost događaja H_j da se dokument nalazi u j-toj kutiji jednaka je $p_j \in (0,1)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdje vrijedi $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Sa F_j označimo događaj da djelomičnim pretraživanjem j-te kutije ne nađemo traženi dokument. Neka je $q_j \in (0,1)$ vjerojatnost događaja F_j ukoliko dokument jeste u j-toj kutiji. Dokažite da se događaji H_j i F_j odbijaju, ali F_j privlači H_i za $i \neq j$.
Dano je $\mathbb{P}(H_j) = p_j$, $\mathbb{P}(F_j \mid H_j) = q_j$ i zbog prirode problema $\mathbb{P}(F_j \mid H_i) = 1$ za $i \neq j$ (ako je dokument u i-toj kutiji, vjerojatnost da ga ne nađemo u j-toj je 1). Pomoću Bayesove formule računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_j \mid F_j) &= \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(F_j \mid H_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(F_j \mid H_i)} = \frac{p_j q_j}{p_j q_j + \sum_{i \neq j} p_i \cdot 1} \\ &= \frac{p_j q_j}{p_j q_j + 1 - p_j},\end{aligned}$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9, nastavak

(c) Važan dokument nalazi se u jednoj on n kutija prepunih dokumenata. Vjerojatnost događaja H_j da se dokument nalazi u j-toj kutiji jednaka je $p_j \in (0,1)$, $j = 1, 2, \dots, n$, gdje vrijedi $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Sa F_j označimo događaj da djelomičnim pretraživanjem j-te kutije ne nađemo traženi dokument. Neka je $q_j \in (0,1)$ vjerojatnost događaja F_j ukoliko dokument jeste u j-toj kutiji. Dokažite da se događaji H_j i F_j odbijaju, ali F_j privlači H_i za $i \neq j$.
Dano je $\mathbb{P}(H_j) = p_j$, $\mathbb{P}(F_j \mid H_j) = q_j$ i zbog prirode problema $\mathbb{P}(F_j \mid H_i) = 1$ za $i \neq j$ (ako je dokument u i-toj kutiji, vjerojatnost da ga ne nađemo u j-toj je 1). Pomoću Bayesove formule računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_j \mid F_j) &= \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(F_j \mid H_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(F_j \mid H_i)} = \frac{p_j q_j}{p_j q_j + \sum_{i \neq j} p_i \cdot 1} \\ &= \frac{p_j q_j}{p_j q_j + 1 - p_j},\end{aligned}$$

otkud

$$\mathbb{P}(H_j) - \mathbb{P}(H_j \mid F_j) = p_j - \frac{p_j q_j}{p_j q_j + 1 - p_j} = \frac{p_j(1-p_j)(1-q_j)}{p_j q_j + 1 - p_j} > 0$$

zbog $p_j, q_j \in (0,1)$ (uočite da je $p_j q_j + 1 - p_j = \mathbb{P}(F_j) > 0$). Zato se H_j i F_j odbijaju.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.9, nastavak

(c) Važan dokument nalazi se u jednoj on n kutija prepunih dokumenata. Vjerojatnost događaja H_j da se dokument nalazi u j-toj kutiji jednaka je $p_j \in (0,1)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdje vrijedi $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Sa F_j označimo događaj da djelomičnim pretraživanjem j-te kutije ne nađemo traženi dokument. Neka je $q_j \in (0,1)$ vjerojatnost događaja F_j ukoliko dokument jeste u j-toj kutiji. Dokažite da se događaji H_j i F_j odbijaju, ali F_j privlači H_i za $i \neq j$.
Dano je $\mathbb{P}(H_j) = p_j$, $\mathbb{P}(F_j \mid H_j) = q_j$ i zbog prirode problema $\mathbb{P}(F_j \mid H_i) = 1$ za $i \neq j$ (ako je dokument u i-toj kutiji, vjerojatnost da ga ne nađemo u j-toj je 1). Pomoću Bayesove formule računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_j \mid F_j) &= \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(F_j \mid H_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(F_j \mid H_i)} = \frac{p_j q_j}{p_j q_j + \sum_{i \neq j} p_i \cdot 1} \\ &= \frac{p_j q_j}{p_j q_j + 1 - p_j},\end{aligned}$$

otkud

$$\mathbb{P}(H_j) - \mathbb{P}(H_j \mid F_j) = p_j - \frac{p_j q_j}{p_j q_j + 1 - p_j} = \frac{p_j(1-p_j)(1-q_j)}{p_j q_j + 1 - p_j} > 0$$

zbog $p_j, q_j \in (0,1)$ (uočite da je $p_j q_j + 1 - p_j = \mathbb{P}(F_j) > 0$). Zato se H_j i F_j odbijaju. Slično se izračuna da je za $i \neq j$,

$$\mathbb{P}(H_i \mid F_j) - \mathbb{P}(H_i) = \frac{p_i p_j (1-q_j)}{1 - p_j + p_j q_j} > 0\,.$$

2.1.1 Vjerojatnosni prostor za zavisne pokuse

Provodimo dva pokusa takva da vjerojatnosti ishoda drugog pokusa ovise o rezultatu prvog pokusa. Uočite da smo u gornjim primjerima imali takvu situaciju. Želimo konstruirati vjerojatnosni prostor koji opisuje takva dva pokusa. Zbog jednostavnosti ćemo pretpostaviti da oba pokusa imaju konačan broj ishoda. Slični argumenti, uz malo više tehničkih problema, vrijede i u slučaju prebrojivih prostora elementarnih događaja.

2.1.1 Vjerojatnosni prostor za zavisne pokuse

Provodimo dva pokusa takva da vjerojatnosti ishoda drugog pokusa ovise o rezultatu prvog pokusa. Uočite da smo u gornjim primjerima imali takvu situaciju. Želimo konstruirati vjerojatnosni prostor koji opisuje takva dva pokusa. Zbog jednostavnosti ćemo pretpostaviti da oba pokusa imaju konačan broj ishoda. Slični argumenti, uz malo više tehničkih problema, vrijede i u slučaju prebrojivih prostora elementarnih događaja.

Neka je $\Omega_1 = \{\omega'_1, \dots, \omega'_m\}$ prostor elementarnih događaja prvog pokusa, a $\Omega_2 = \{\omega''_1, \dots, \omega''_n\}$ prostor elementarnih događaja drugog pokusa. Pretpostavimo da je za svaki $\omega' \in \Omega_1$ dan broj $p_1(\omega') \geq 0$, tako da vrijedi $\sum_{\omega' \in \Omega_1} p_1(\omega') = 1$: $p_1(\omega')$ interpretiramo kao vjerojatnost elementarnog događaja ω'.

2.1.1 Vjerojatnosni prostor za zavisne pokuse

Provodimo dva pokusa takva da vjerojatnosti ishoda drugog pokusa ovise o rezultatu prvog pokusa. Uočite da smo u gornjim primjerima imali takvu situaciju. Želimo konstruirati vjerojatnosni prostor koji opisuje takva dva pokusa. Zbog jednostavnosti ćemo pretpostaviti da oba pokusa imaju konačan broj ishoda. Slični argumenti, uz malo više tehničkih problema, vrijede i u slučaju prebrojivih prostora elementarnih događaja.

Neka je $\Omega_1 = \{\omega'_1, \dots, \omega'_m\}$ prostor elementarnih događaja prvog pokusa, a $\Omega_2 = \{\omega''_1, \dots, \omega''_n\}$ prostor elementarnih događaja drugog pokusa. Pretpostavimo da je za svaki $\omega' \in \Omega_1$ dan broj $p_1(\omega') \geq 0$, tako da vrijedi $\sum_{\omega' \in \Omega_1} p_1(\omega') = 1$: $p_1(\omega')$ interpretiramo kao vjerojatnost elementarnog događaja ω'.
Neka je, nadalje, za svaki $\omega' \in \Omega_1$ dana funkcija $p_2(\omega', \cdot) : \Omega_2 \to [0, 1]$ takva da je $\sum_{\omega'' \in \Omega_2} p_2(\omega', \omega'') = 1$: $p_2(\omega', \omega'')$ interpretiramo kao uvjetnu vjerojatnost elementarnog događaja ω'' ako se u prvom pokusu dogodio ω'.

2.1.1 Vjerojatnosni prostor za zavisne pokuse, nastavak

Neka je

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = (\omega', \omega'') : \omega' \in \Omega_1, \omega'' \in \Omega_2\}$$

prostor elementarnih događaja za oba pokusa.

2.1.1 Vjerojatnosni prostor za zavisne pokuse, nastavak

Neka je

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = (\omega', \omega'') : \omega' \in \Omega_1, \omega'' \in \Omega_2\}$$

prostor elementarnih događaja za oba pokusa. Definiramo

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{(\omega', \omega'')\}) := p_1(\omega') p_2(\omega', \omega'') .$$

2.1.1 Vjerojatnosni prostor za zavisne pokuse, nastavak

Neka je

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = (\omega', \omega'') : \omega' \in \Omega_1, \omega'' \in \Omega_2\}$$

prostor elementarnih događaja za oba pokusa. Definiramo

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{(\omega', \omega'')\}) := p_1(\omega')p_2(\omega', \omega'') .$$

Vrijedi

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega' \in \Omega_1} \sum_{\omega'' \in \Omega_2} p_1(\omega')p_2(\omega', \omega'') = \sum_{\omega' \in \Omega_1} p_1(\omega') \sum_{\omega'' \in \Omega_2} p_2(\omega', \omega'') = 1 .$$

Iz Propozicije 1.8 sada slijedi da se $\mathbb{P}$ na jedinstven način može proširiti do vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Ovako konstruiran vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ je model za dva pokusa kod kojih vjerojatnost ishoda drugog pokusa ovisi o rezultatu prvog.

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.10

Primjer 2.10 (a) Za $\omega' \in \Omega_1$ i $B \subseteq \Omega_2$, stavimo $p_2(\omega', B) := \sum_{\omega'' \in B} p_2(\omega', \omega')$. Pokažimo da je $p_2(\omega', B)$ uvjetna vjerojatnost da se u drugom pokusu dogodio B ako je ishod prvog pokusa ω', tj. vrijedi

$$\mathbb{P}(\Omega_1 \times B \mid \{\omega'\} \times \Omega_2) = p_2(\omega', B)\,.$$

Primjer 2.10 (a) Za $\omega' \in \Omega_1$ i $B \subseteq \Omega_2$, stavimo $p_2(\omega', B) := \sum_{\omega'' \in B} p_2(\omega', \omega')$. Pokažimo da je $p_2(\omega', B)$ uvjetna vjerojatnost da se u drugom pokusu dogodio B ako je ishod prvog pokusa ω', tj. vrijedi

$$\mathbb{P}(\Omega_1 \times B \mid \{\omega'\} \times \Omega_2) = p_2(\omega', B)\,.$$

Rješenje: Imamo

$$\mathbb{P}(\Omega_1 \times B \mid \{\omega'\} \times \Omega_2) = \frac{\mathbb{P}((\Omega_1 \times B) \cap (\{\omega'\} \times \Omega_2))}{\mathbb{P}(\{\omega'\} \times \Omega_2)} = \frac{\mathbb{P}(\{\omega'\} \times B)}{p_1(\omega')}$$

$$= \frac{\sum_{\omega'' \in B} \mathbb{P}(\{(\omega', \omega'')\})}{p_1(\omega')} = \frac{\sum_{\omega'' \in B} p_1(\omega') p_2(\omega', \omega'')}{p_1(\omega')} = p_2(\omega', B).$$

2.1 Uvjetna vjerojatnost; Primjer 2.10

Primjer 2.10 (a) Za $\omega' \in \Omega_1$ i $B \subseteq \Omega_2$, stavimo $p_2(\omega', B) := \sum_{\omega'' \in B} p_2(\omega', \omega')$. Pokažimo da je $p_2(\omega', B)$ uvjetna vjerojatnost da se u drugom pokusu dogodio B ako je ishod prvog pokusa ω', tj. vrijedi

$$\mathbb{P}(\Omega_1 \times B \mid \{\omega'\} \times \Omega_2) = p_2(\omega', B)\,.$$

Rješenje: Imamo

$$\mathbb{P}(\Omega_1 \times B \mid \{\omega'\} \times \Omega_2) = \frac{\mathbb{P}((\Omega_1 \times B) \cap (\{\omega'\} \times \Omega_2))}{\mathbb{P}(\{\omega'\} \times \Omega_2)} = \frac{\mathbb{P}(\{\omega'\} \times B)}{p_1(\omega')}$$
$$= \frac{\sum_{\omega'' \in B} \mathbb{P}(\{(\omega', \omega'')\})}{p_1(\omega')} = \frac{\sum_{\omega'' \in B} p_1(\omega') p_2(\omega', \omega'')}{p_1(\omega')} = p_2(\omega', B).$$

(b) Neka je $A \subseteq \Omega_1$. Pokažite da je $\mathbb{P}(A \times \Omega_2) = \sum_{\omega' \in A} p_1(\omega')$.

2.2 Nezavisnost

Za događaje A i B (pozitivne vjerojatnosti) može se dogoditi da se niti privlače niti odbijaju. To znači da je $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, odnosno $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$. Svaka od tih jednakosti ekvivalentna je s $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. U tom slučaju ćemo reći da su događaji A i B nezavisni.

2.2 Nezavisnost

Za događaje A i B (pozitivne vjerojatnosti) može se dogoditi da se niti privlače niti odbijaju. To znači da je $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, odnosno $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$. Svaka od tih jednakosti ekvivalentna je s $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. U tom slučaju ćemo reći da su događaji A i B nezavisni.

Definicija 2.11 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.

(a) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su *nezavisni* ako vrijedi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

2.2 Nezavisnost

Za događaje A i B (pozitivne vjerojatnosti) može se dogoditi da se niti privlače niti odbijaju. To znači da je $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, odnosno $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$. Svaka od tih jednakosti ekvivalentna je s $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. U tom slučaju ćemo reći da su događaji A i B nezavisni.

Definicija 2.11 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.

(a) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su *nezavisni* ako vrijedi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

(b) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su *uvjetno nezavisni uz dani $C \in \mathcal{F}$*, $\mathbb{P}(C) > 0$, ako vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C) \qquad (\text{odnosno } \mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)).$$

2.2 Nezavisnost

Za događaje A i B (pozitivne vjerojatnosti) može se dogoditi da se niti privlače niti odbijaju. To znači da je $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, odnosno $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$. Svaka od tih jednakosti ekvivalentna je s $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. U tom slučaju ćemo reći da su događaji A i B nezavisni.

Definicija 2.11 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.

(a) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su *nezavisni* ako vrijedi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

(b) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su *uvjetno nezavisni uz dani $C \in \mathcal{F}$*, $\mathbb{P}(C) > 0$, ako vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C) \qquad (\text{odnosno } \mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)).$$

(c) Familija događaja $(A_i)_{i \in I}$ (konačna, prebrojiva ili neprebrojiva) je nezavisna ako vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in F} A_i\right) = \prod_{i \in F} \mathbb{P}(A_i)$$

za svaki konačan podskup $F \subseteq I$.

2.2 Nezavisnost

Za događaje A i B (pozitivne vjerojatnosti) može se dogoditi da se niti privlače niti odbijaju. To znači da je $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, odnosno $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$. Svaka od tih jednakosti ekvivalentna je s $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. U tom slučaju ćemo reći da su događaji A i B nezavisni.

Definicija 2.11 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.

(a) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su *nezavisni* ako vrijedi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

(b) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su *uvjetno nezavisni uz dani $C \in \mathcal{F}$*, $\mathbb{P}(C) > 0$, ako vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C) \qquad (\text{odnosno } \mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)).$$

(c) Familija događaja $(A_i)_{i \in I}$ (konačna, prebrojiva ili neprebrojiva) je nezavisna ako vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in F} A_i\right) = \prod_{i \in F} \mathbb{P}(A_i)$$

za svaki konačan podskup $F \subseteq I$.

(d) Familija događaja $(A_i)_{i \in I}$ je *po parovima nezavisna* ako za sve $i, j \in I$, $i \neq j$, vrijedi $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

2.2 Nezavisnost

Uvjetna nezavisnost događaja A i B uz dani C može se zapisati kao

$$\mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)\,,$$

tj. A i B su nezavisni događaji na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_C)$. Nezavisnost događaja je svojstvo vjerojatnosti uz koju se ti događaji promatraju.

2.2 Nezavisnost

Uvjetna nezavisnost događaja A i B uz dani C može se zapisati kao

$$\mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)\,,$$

tj. A i B su nezavisni događaji na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_C)$. Nezavisnost događaja je svojstvo vjerojatnosti uz koju se ti događaji promatraju.

Specijalni slučaj Definicije 2.11 (c): Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$. Tada je familija $\{A, B, C\}$ nezavisna ako vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C);$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

2.2 Nezavisnost

Uvjetna nezavisnost događaja A i B uz dani C može se zapisati kao

$$\mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)\,,$$

tj. A i B su nezavisni događaji na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_C)$. Nezavisnost događaja je svojstvo vjerojatnosti uz koju se ti događaji promatraju.

Specijalni slučaj Definicije 2.11 (c): Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$. Tada je familija $\{A, B, C\}$ nezavisna ako vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C);$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Uočite da ako je familija događaja $(A_i)_{i \in I}$ nezavisna, onda je i po parovima nezavisna. Sljedeći primjer, među ostalim, pokazuje da obrat ne vrijedi.

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.12

Primjer 2.12 (a) Bacamo dvije simetrične kocke i promatramo sljedeća tri događaja:
$A = \{\text{šestica na 1. kocki}\}$, $B = \{\text{jedinica na 2. kocki}\}$ i
$C = \{\text{zbroj je sedam}\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.
Vidimo da je $A \cap C = B \cap C = \{(6,1)\}$.

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.12

Primjer 2.12 (a) Bacamo dvije simetrične kocke i promatramo sljedeća tri događaja: $A = \{\text{šestica na 1. kocki}\}$, $B = \{\text{jedinica na 2. kocki}\}$ i $C = \{\text{zbroj je sedam}\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.
Vidimo da je $A \cap C = B \cap C = \{(6,1)\}$. Računamo sljedeće vjerojatnosti:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}\,,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,,$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)\,,$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\,.$$

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.12

Primjer 2.12 (a) Bacamo dvije simetrične kocke i promatramo sljedeća tri događaja:
$A = \{$šestica na 1. kocki$\}$, $B = \{$jedinica na 2. kocki$\}$ i
$C = \{\text{zbroj je sedam}\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.
Vidimo da je $A \cap C = B \cap C = \{(6,1)\}$. Računamo sljedeće vjerojatnosti:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) &= \frac{1}{6}\,,\\
\mathbb{P}(A \cap B) &= \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,,\\
\mathbb{P}(A \cap C) &= \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)\,,\\
\mathbb{P}(B \cap C) &= \frac{1}{36} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\,.
\end{aligned}
$$

Dakle, familija događaja $\{A, B, C\}$ je po parovima nezavisna .

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.12

Primjer 2.12 (a) Bacamo dvije simetrične kocke i promatramo sljedeća tri događaja:
$A = \{$šestica na 1. kocki$\}$, $B = \{$jedinica na 2. kocki$\}$ i
$C = \{$zbroj je sedam$\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.
Vidimo da je $A \cap C = B \cap C = \{(6,1)\}$. Računamo sljedeće vjerojatnosti:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) &= \frac{1}{6}\,, \\
\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,, \\
\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{36} &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)\,, \\
\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{36} &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\,.
\end{aligned}$$

Dakle, familija događaja $\{A, B, C\}$ je po parovima nezavisna . S druge strane, $A \cap B \cap C = \{(6,1)\}$ te je zato

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\,.$$

Dakle, $\{A, B, C\}$ nije familija nezavisnih događaja.

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.12, nastavak

Nadalje,

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\,,$$

$$\mathbb{P}(B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(B)\,,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}\,,$$

otkud slijedi (i) da su A i C nezavisni, B i C nezavisni,

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.12, nastavak

Nadalje,

$$\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\,,$$

$$\mathbb{P}(B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(B)\,,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}\,,$$

otkud slijedi (i) da su A i C nezavisni, B i C nezavisni,
(ii) zbog $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) \neq \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C)$, A i B nisu uvjetno nezavisni uz dano C(iako su A i B nezavisni). Dakle, nezavisnost događaja ne povlači njihovu uvjetnu nezavisnost. U Primjeru 2.13 vidjet ćemo da ne vrijedi ni obratna implikacija.

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.12, nastavak

(b) U istom pokusu kao u dijelu (a) promatramo sljedeća tri događaja:
$E = \{\text{na 1. kocki je 1,2, ili 3}\}$, $F = \{\text{na 2. kocki je 4,5 ili 6}\}$ i
$G = \{\text{zbroj je 9}\} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$.

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.12, nastavak

(b) U istom pokusu kao u dijelu (a) promatramo sljedeća tri događaja:
$E = \{\text{na 1. kocki je 1,2, ili 3}\}$, $F = \{\text{na 2. kocki je 4,5 ili 6}\}$ i
$G = \{\text{zbroj je 9}\} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$. Vrijedi $E \cap F \cap G = \{(3,6)\}$ te

$$\mathbb{P}(E \cap F \cap G) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G)\,. \tag{5}$$

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.12, nastavak

(b) U istom pokusu kao u dijelu (a) promatramo sljedeća tri događaja:
$E = \{\text{na 1. kocki je 1,2, ili 3}\}$, $F = \{\text{na 2. kocki je 4,5 ili 6}\}$ i
$G = \{\text{zbroj je 9}\} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$. Vrijedi $E \cap F \cap G = \{(3,6)\}$ te

$$\mathbb{P}(E \cap F \cap G) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G)\,. \tag{5}$$

Međutim, očito

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)\,,$$
$$\mathbb{P}(E \cap G) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(G)\,,$$

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.12, nastavak

(b) U istom pokusu kao u dijelu (a) promatramo sljedeća tri događaja:
$E = \{\text{na 1. kocki je 1,2, ili 3}\}$, $F = \{\text{na 2. kocki je 4,5 ili 6}\}$ i
$G = \{\text{zbroj je 9}\} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$. Vrijedi $E \cap F \cap G = \{(3,6)\}$ te

$$\mathbb{P}(E \cap F \cap G) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G)\,. \tag{5}$$

Međutim, očito

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)\,,$$
$$\mathbb{P}(E \cap G) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(G)\,,$$

Dakle, familija događaja $\{E, F, G\}$ nije nezavisna, što znači da (5) nije dovoljno za nezavisnost.

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.13

Primjer 2.13 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da $B \subseteq A$ i $0 < \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) < 1$. Tada imamo

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid B) = \mathbb{P}(B \mid B) = 1 = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B \mid B).$$

Dakle, A i B su uvjetno nezavisni uz dani B. S druge strane,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

tj. A i B nisu nezavisni.

2.2 Nezavisnost; kao rezultat nezavisnih pokusa

Nezavisni događaji najčešće se javljaju kao rezultati nezavisnih pokusa. U pododjeljku 1.3.1 konstruirali smo produktni vjerojatnosni prostor koji služi kao model za dva nezavisna pokusa. Preciznije, neka su $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$ dva konačna vjerojatnosna prostora te $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ konstruirali smo vjerojatnost $\mathbb{P}$ koja je na jedinstven način zadana s

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\mathbb{P}_2(\{\omega''\}), \quad \omega = (\omega', \omega'').$$

2.2 Nezavisnost; kao rezultat nezavisnih pokusa

Nezavisni događaji najčešće se javljaju kao rezultati nezavisnih pokusa. U pododjeljku 1.3.1 konstruirali smo produktni vjerojatnosni prostor koji služi kao model za dva nezavisna pokusa. Preciznije, neka su $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$ dva konačna vjerojatnosna prostora te $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ konstruirali smo vjerojatnost $\mathbb{P}$ koja je na jedinstven način zadana s

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\mathbb{P}_2(\{\omega''\}), \quad \omega = (\omega', \omega'').$$

Neka su $A \subseteq \Omega_1$ i $B \subseteq \Omega_2$: događaj A ovisi o prvom pokusu, dok događaj B ovisi o drugom pokusu. Definiramo

$$\widetilde{A} = A \times \Omega_2, \qquad \widetilde{B} = \Omega_1 \times B.$$

Tada su $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ događaji u Ω: $\widetilde{A}$ kaže da se u prvom pokusu dogodio A, u drugom pokusu bilo što.

2.2 Nezavisnost; kao rezultat nezavisnih pokusa

Nezavisni događaji najčešće se javljaju kao rezultati nezavisnih pokusa. U pododjeljku 1.3.1 konstruirali smo produktni vjerojatnosni prostor koji služi kao model za dva nezavisna pokusa. Preciznije, neka su $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$ dva konačna vjerojatnosna prostora te $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ konstruirali smo vjerojatnost $\mathbb{P}$ koja je na jedinstven način zadana s

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\mathbb{P}_2(\{\omega''\}), \quad \omega = (\omega', \omega'').$$

Neka su $A \subseteq \Omega_1$ i $B \subseteq \Omega_2$: događaj A ovisi o prvom pokusu, dok događaj B ovisi o drugom pokusu. Definiramo

$$\widetilde{A} = A \times \Omega_2, \qquad \widetilde{B} = \Omega_1 \times B.$$

Tada su $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ događaji u Ω: $\widetilde{A}$ kaže da se u prvom pokusu dogodio A, u drugom pokusu bilo što. Tvrdimo da su $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ nezavisni događaji u $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Zaista,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) &= \mathbb{P}((A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B)) = \mathbb{P}(A \times B) \\
&= \sum_{\omega=(\omega',\omega'')\in A\times B} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega'\in A}\sum_{\omega''\in B} \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\mathbb{P}_2(\{\omega''\}) \\
&= \left(\sum_{\omega'\in A} \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\right)\left(\sum_{\omega'\in B} \mathbb{P}_2(\{\omega''\})\right) = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B).
\end{aligned}$$

2.2 Nezavisnost; kao rezultat nezavisnih pokusa

Nezavisni događaji najčešće se javljaju kao rezultati nezavisnih pokusa. U pododjeljku 1.3.1 konstruirali smo produktni vjerojatnosni prostor koji služi kao model za dva nezavisna pokusa. Preciznije, neka su $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$ dva konačna vjerojatnosna prostora te $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ konstruirali smo vjerojatnost $\mathbb{P}$ koja je na jedinstven način zadana s

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\mathbb{P}_2(\{\omega''\}), \quad \omega = (\omega', \omega'').$$

Neka su $A \subseteq \Omega_1$ i $B \subseteq \Omega_2$: događaj A ovisi o prvom pokusu, dok događaj B ovisi o drugom pokusu. Definiramo

$$\widetilde{A} = A \times \Omega_2, \qquad \widetilde{B} = \Omega_1 \times B.$$

Tada su $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ događaji u Ω: $\widetilde{A}$ kaže da se u prvom pokusu dogodio A, u drugom pokusu bilo što. Tvrdimo da su $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ nezavisni događaji u $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Zaista,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) &= \mathbb{P}((A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B)) = \mathbb{P}(A \times B) \\
&= \sum_{\omega = (\omega', \omega'') \in A \times B} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega' \in A} \sum_{\omega'' \in B} \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\mathbb{P}_2(\{\omega''\}) \\
&= \left(\sum_{\omega' \in A} \mathbb{P}_1(\{\omega'\}) \right) \left(\sum_{\omega' \in B} \mathbb{P}_2(\{\omega''\}) \right) = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B).
\end{aligned}$$

Uzimanjem $B = \Omega_2$ (te stoga $\widetilde{B} = \Omega$), gornja jednakost postaje $\mathbb{P}(\widetilde{A}) = \mathbb{P}_1(A)$. Slično, $\mathbb{P}(\widetilde{B}) = \mathbb{P}_2(B)$. Uvrštavanjem u gornju jednakost slijedi

$$\mathbb{P}(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) = \mathbb{P}(\widetilde{A})\mathbb{P}(\widetilde{B}), \qquad \widetilde{A} \text{ i } \widetilde{B} \text{ su nezavisni.}$$

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.14

Sljedeća dva primjera pokazuju da s uvjetnim vjerojatnosntima treba biti oprezan. Intuicija vezana uz uvjetne vjerojatnosni kod većine nas je nerazvijena što često dovodi do pogrešnih zaključaka.

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.14

Sljedeća dva primjera pokazuju da s uvjetnim vjerojatnosntima treba biti oprezan. Intuicija vezana uz uvjetne vjerojatnosni kod većine nas je nerazvijena što često dovodi do pogrešnih zaključaka.

Primjer 2.14 (Bertrandov paradoks 1889) Imamo tri igraće karte; jedna je crvena s obje strane, druga je plava s obje strane, a treća crveno-plava . Na slučajan način odabrana je jedna karta i stavljena na stol. Gornja strana karte je plava . Kolika je vjerojatnost da je i donja strana plava ?

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.14

Sljedeća dva primjera pokazuju da s uvjetnim vjerojatnosntima treba biti oprezan. Intuicija vezana uz uvjetne vjerojatnosni kod većine nas je nerazvijena što često dovodi do pogrešnih zaključaka.

Primjer 2.14 (Bertrandov paradoks 1889) Imamo tri igraće karte; jedna je crvena s obje strane, druga je plava s obje strane, a treća crveno-plava . Na slučajan način odabrana je jedna karta i stavljena na stol. Gornja strana karte je plava . Kolika je vjerojatnost da je i donja strana plava ?
Označimo stranice plavo-plave karte sa p_1 i p_2, crveno-crvene sa c_1, c_2 te crveno-plave sa c_3 i p_3. Za prostor elementarnih događaja možemo uzeti $\Omega = \{p_1, p_2, p_3, c_1, c_2, c_3\}$, gdje npr. p_1 znači da je donja stranica odabrane karte jednaka p_1 . Zbog simetrije svi elementarni događaji imaju istu vjerojatnost $1/6$.

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.14

Sljedeća dva primjera pokazuju da s uvjetnim vjerojatnosntima treba biti oprezan. Intuicija vezana uz uvjetne vjerojatnosni kod većine nas je nerazvijena što često dovodi do pogrešnih zaključaka.

Primjer 2.14 (Bertrandov paradoks 1889) Imamo tri igraće karte; jedna je crvena s obje strane, druga je plava s obje strane, a treća crveno-plava . Na slučajan način odabrana je jedna karta i stavljena na stol. Gornja strana karte je plava . Kolika je vjerojatnost da je i donja strana plava ?

Označimo stranice plavo-plave karte sa p_1 i p_2, crveno-crvene sa c_1, c_2 te crveno-plave sa c_3 i p_3. Za prostor elementarnih događaja možemo uzeti $\Omega = \{p_1, p_2, p_3, c_1, c_2, c_3\}$, gdje npr. p_1 znači da je donja stranica odabrane karte jednaka p_1 . Zbog simetrije svi elementarni događaji imaju istu vjerojatnost $1/6$.

Zanimaju nas događaji $A = \{$donja stranica odabrane karte je plava $\} = \{p_1, p_2, p_3\}$ i $B = \{$gornja stranica odabrane karte je plava $\} = \{p_1, p_2, c_3\}$ (što znači da su, redom, gornje stranice p_2, p_1, p_3).

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.14

Sljedeća dva primjera pokazuju da s uvjetnim vjerojatnosntima treba biti oprezan. Intuicija vezana uz uvjetne vjerojatnosni kod većine nas je nerazvijena što često dovodi do pogrešnih zaključaka.

Primjer 2.14 (Bertrandov paradoks 1889) Imamo tri igraće karte; jedna je crvena s obje strane, druga je plava s obje strane, a treća crveno-plava . Na slučajan način odabrana je jedna karta i stavljena na stol. Gornja strana karte je plava . Kolika je vjerojatnost da je i donja strana plava ?
Označimo stranice plavo-plave karte sa p_1 i p_2, crveno-crvene sa c_1, c_2 te crveno-plave sa c_3 i p_3. Za prostor elementarnih događaja možemo uzeti $\Omega = \{p_1, p_2, p_3, c_1, c_2, c_3\}$, gdje npr. p_1 znači da je donja stranica odabrane karte jednaka p_1 . Zbog simetrije svi elementarni događaji imaju istu vjerojatnost $1/6$.
Zanimaju nas događaji $A = \{$donja stranica odabrane karte je plava $\} = \{p_1, p_2, p_3\}$ i $B = \{$gornja stranica odabrane karte je plava $\} = \{p_1, p_2, c_3\}$ (što znači da su, redom, gornje stranice p_2, p_1, p_3). Tada je

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\{p_1, p_2\})}{\mathbb{P}(\{p_1, p_2, c_3\})} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}\,.$$

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.15

Primjer 2.15 (Monty Hall - auto i koze) Natječete se u TV showu i trebate odabrati jedna od triju zatvorenih vrata. Iza jednih vrata se nalazi auto, a iza ostalih po jedna koza. Vaš cilj je osvojiti auto. Izabirete prva vrata nakon čega voditelj showa otvara treća vrata iza kojih je koza. Voditelj Vam zatim nudi mogućnost da promijenite svoj izbor vrata (tj. da prva vrata zamijenite drugim). Isplati li Vam se to? Možete li izračunati vjerojatnost da je auto iza drugih vrata?

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.15

Primjer 2.15 (Monty Hall - auto i koze) Natječete se u TV showu i trebate odabrati jedna od triju zatvorenih vrata. Iza jednih vrata se nalazi auto, a iza ostalih po jedna koza. Vaš cilj je osvojiti auto. Izabirete prva vrata nakon čega voditelj showa otvara treća vrata iza kojih je koza. Voditelj Vam zatim nudi mogućnost da promijenite svoj izbor vrata (tj. da prva vrata zamijenite drugim). Isplati li Vam se to? Možete li izračunati vjerojatnost da je auto iza drugih vrata?

Ovo je vrlo poznati problem te postoji puno različitih objašnjenja zašto je povoljno promijeniti vrata. Mi ćemo problem riješiti korištenjem Bayesove formule te malo detaljnije analizirati pretpostavke problema. Procedura u problemu ima nekoliko koraka (pokusa) od kojih je prvi Vaš originalni izbor vrata iza kojih je auto. Tu postoje tri mogućnosti:

$$A_i = \{\text{auto je iza } i\text{-tih vrata}\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Budući da na početku nemate nikakvu dodatnu informaciju, realno je pretpostaviti da su sva tri događaja jednako vjerojatna, tj. $\mathbb{P}(A_i) = 1/3$, $i = 1, 2, 3$. Izabirete prva vrata te voditelj otvara treća iza kojih je koza. Stavimo

$$\begin{aligned} K &= \{\text{koza otkrivena iza trećih vrata}\} \\ &= \{\text{otvorena treća vrata iza kojih je koza}\}. \end{aligned}$$

Uz danu informaciju želimo izračunati vjerojatnost da je auto iza drugih vrata, tj. zanima nas uvjetna vjerojatnost $\mathbb{P}(A_2 \mid K)$.

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.15, nastavak

Po Bayesovoj formuli vrijedi

$$\mathbb{P}(A_2 \mid K) = \frac{\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(K \mid A_2)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(K \mid A_i)} = \frac{\mathbb{P}(K \mid A_2)}{\mathbb{P}(K \mid A_1) + \mathbb{P}(K \mid A_2)},$$

gdje smo iskoristili $\mathbb{P}(A_i) = 1/3$ te očiglednu činjenicu da je $\mathbb{P}(K \mid A_3) = 0$ (ako je auto iza trećih vrata, onda koza nije iza trećih vrata). Dakle, da bismo izračunali $\mathbb{P}(A_2 \mid K)$, trebamo poznavati uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}(K \mid A_1)$ i $\mathbb{P}(K \mid A_2)$. Te uvjetne vjerojatnosti ovise o protokolu po kojem voditelj otvara vrata nakon Vašeg originalnog izbora vrata. Protokol otvaranja vrata ustanovljen je prije Vašeg odabira vrata.

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.15, nastavak

Po Bayesovoj formuli vrijedi

$$\mathbb{P}(A_2 \mid K) = \frac{\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(K \mid A_2)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(K \mid A_i)} = \frac{\mathbb{P}(K \mid A_2)}{\mathbb{P}(K \mid A_1) + \mathbb{P}(K \mid A_2)},$$

gdje smo iskoristili $\mathbb{P}(A_i) = 1/3$ te očiglednu činjenicu da je $\mathbb{P}(K \mid A_3) = 0$ (ako je auto iza trećih vrata, onda koza nije iza trećih vrata). Dakle, da bismo izračunali $\mathbb{P}(A_2 \mid K)$, trebamo poznavati uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}(K \mid A_1)$ i $\mathbb{P}(K \mid A_2)$. Te uvjetne vjerojatnosti ovise o protokolu po kojem voditelj otvara vrata nakon Vašeg originalnog izbora vrata. Protokol otvaranja vrata ustanovljen je prije Vašeg odabira vrata.

Protokol 1: (implicitno pretpostavljen) (i) koja god vrata odabrali, voditelj otvara jedna od preostalih vrata iza kojih je koza, (ii) ako ima izbor od dvije koze, izabrat će jednu na slučajan način. Uz ovaj protokol je

$$\mathbb{P}(K \mid A_1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(K \mid A_2) = 1,$$

(uz A_1 koze iza drugih i trećih vrata, treća vrata izabrana slučajno; uz A_2 koza iza prvih i trećih vrata, voditelj mora otvoriti treća). Sada je

$$\mathbb{P}(A_2 \mid K) = \frac{1}{1/2 + 1} = \frac{2}{3}.$$

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.16

Primjer 2.17 Dva igrača, Fabijan i Baltazar, igraju niz igara od kojih svaka završava pobjedom Fabijana s vjerojatnošću p, pobjedom Baltazara s vjerojatnošću q i neriješeno s vjerojatnošću r, $0 < p, q, r < 1$, $p + q + r = 1$. Igre su nezavisne. Niz igara završava prvom pobjedom jednog od igrača. Nađite vjerojatnost da će Fabijan pobijediti.

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.16

Primjer 2.17 Dva igrača, Fabijan i Baltazar, igraju niz igara od kojih svaka završava pobjedom Fabijana s vjerojatnošću p, pobjedom Baltazara s vjerojatnošću q i neriješeno s vjerojatnošću r, $0 < p, q, r < 1$, $p + q + r = 1$. Igre su nezavisne. Niz igara završava prvom pobjedom jednog od igrača. Nađite vjerojatnost da će Fabijan pobijediti.

Rješenje 1: Promatramo sljedeće događaje:

$$\begin{aligned} F_n &= \{\text{Fabijan dobiva meč u } n\text{-toj igri}\}\,, \\ D_k &= \{k\text{-ta igra je neriješena}\}\,, \\ E_k &= \{\text{Fabijan dobiva } k\text{-tu igru}\}\,. \end{aligned}$$

Tada je $F_n = D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_{n-1} \cap E_n$ i zbog nezavisnosti igara (te stoga događaja), $\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(D_1) \cdots \mathbb{P}(D_{n-1})\mathbb{P}(E_n) = r^{n-1}p$. Događaji $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su po parovima disjunktni, $F = \{\text{Fabijan dobiva meč}\} = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ te je po σ-aditivnosti,

$$\mathbb{P}(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}p = \frac{p}{1-r} = \frac{p}{p+q}\,.$$

2.2 Nezavisnost; Primjer 2.17, nastavak

Rješenje 2: Događaji $\{E_1, D_1, (E_1 \cup D_1)^c\}$ tvore potpun sustav događaja (uočite, $(E_1 \cup D_1)^c = \{\text{Baltazar dobiva prvu igru}\}$). Uvjetujemo na rezultat prve igre: po formuli potpune vjerojatnosti

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(F \mid E_1) + \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(F \mid D_1) + \mathbb{P}((E_1 \cup D_1)^c)\mathbb{P}(F \mid (E_1 \cup D_1)^c) \\ &= p \cdot 1 + r\mathbb{P}(F \mid D_1) + q \cdot 0 = p + r\mathbb{P}(F \mid D_1)\,.\end{aligned}$$

Međutim, zbog nezavisnosti igara, $\mathbb{P}(F \mid D_1) = \mathbb{P}(F)$ – ako je prva igra neriješena sve "počinje ispočetka". Zato je

$$\mathbb{P}(F) = p + r\mathbb{P}(F)\,,$$

otkud rješavanjem slijedi

$$\mathbb{P}(F) = \frac{p}{1-r} = \frac{p}{p+q}\,.$$

2.2 Nezavisnost; obrat Borel-Cantellijeve leme

Lema 2.17 Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz *nezavisnih* događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \,,$$

onda je

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1 \,.$$

2.2 Nezavisnost; obrat Borel-Cantellijeve leme

Lema 2.17 Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz *nezavisnih* događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty\,,$$

onda je

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1\,.$$

Prisjetimo se, $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k = \{A_n \text{ b.m.p.}\}$.

Lema 2.17 Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz *nezavisnih* događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \,,$$

onda je

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1 \,.$$

Prisjetimo se, $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k = \{A_n \ \text{ b.m.p.}\}$. Lema 1.19: Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \,,$$

onda je

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0 \,.$$

2.2 Nezavisnost; dokaz Leme 2.17

Dokaz: Stavimo $B_n := \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Tada je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nerastući niz događaja i vrijedi $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Ukoliko pokažemo da je $\mathbb{P}(B_n) = 1$ za svaki $n \geq 1$, onda će tvrdnja leme slijediti iz neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće nizove događaja.

Dokaz: Stavimo $B_n := \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Tada je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nerastući niz događaja i vrijedi $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Ukoliko pokažemo da je $\mathbb{P}(B_n) = 1$ za svaki $n \geq 1$, onda će tvrdnja leme slijediti iz neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće nizove događaja.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $m > n$ proizvoljan. Tada je zbog nezavisnosti familije $(A_j)_{j\geq 1}$ te činjenice da je $e^{-x} \geq 1 - x$ za sve $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c) = \prod_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{m}(1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)}. \tag{6}$$

2.2 Nezavisnost; dokaz Leme 2.17

Dokaz: Stavimo $B_n := \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Tada je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nerastući niz događaja i vrijedi $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Ukoliko pokažemo da je $\mathbb{P}(B_n) = 1$ za svaki $n \geq 1$, onda će tvrdnja leme slijediti iz neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće nizove događaja.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $m > n$ proizvoljan. Tada je zbog nezavisnosti familije $(A_j)_{j\geq 1}$ te činjenice da je $e^{-x} \geq 1 - x$ za sve $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c) = \prod_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{m}(1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{m}\mathbb{P}(A_k)}. \tag{6}$$

Iz pretpostavke $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ i neprekidnosti eksponencijalne funkcije, slijedi da je

$$\lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m}\mathbb{P}(A_k)} = 0. \tag{7}$$

2.2 Nezavisnost; dokaz Leme 2.17

Dokaz: Stavimo $B_n := \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Tada je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nerastući niz događaja i vrijedi $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Ukoliko pokažemo da je $\mathbb{P}(B_n) = 1$ za svaki $n \geq 1$, onda će tvrdnja leme slijediti iz neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće nizove događaja. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $m > n$ proizvoljan. Tada je zbog nezavisnosti familije $(A_j)_{j\geq 1}$ te činjenice da je $e^{-x} \geq 1 - x$ za sve $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big) = \prod_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{m}(1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)}. \tag{6}$$

Iz pretpostavke $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ i neprekidnosti eksponencijalne funkcije, slijedi da je

$$\lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)} = 0. \tag{7}$$

Iz (6) i (7) te neprekidnosti vjerojatnosti na neopadajuće nizove događaja slijedi

$$\mathbb{P}(B_n) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k=n}^{m} A_k) = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big)\right) = 1.$$

Primjer 1.20, nastavak

Primjer 1.20 Igrač igra niz različitih igara na sreću. Vjerojatnost dobitka u n-toj igri je $p_n \in [0, 1]$. Svaka sljedeća igra je teža i vjerojatnost dobitka se smanjuje. Pretpostavite da je $p_n = n^{-\alpha}$ za $\alpha > 0$.

Primjer 1.20, nastavak

Primjer 1.20 Igrač igra niz različitih igara na sreću. Vjerojatnost dobitka u n-toj igri je $p_n \in [0, 1]$. Svaka sljedeća igra je teža i vjerojatnost dobitka se smanjuje. Pretpostavite da je $p_n = n^{-\alpha}$ za $\alpha > 0$.

(a) Ako je $\alpha > 1$, onda je vjerojatnost da igrač dobije u beskonačno mnogo igara jednaka 0.

Primjer 1.20, nastavak

Primjer 1.20 Igrač igra niz različitih igara na sreću. Vjerojatnost dobitka u n-toj igri je $p_n \in [0,1]$. Svaka sljedeća igra je teža i vjerojatnost dobitka se smanjuje. Pretpostavite da je $p_n = n^{-\alpha}$ za $\alpha > 0$.

(a) Ako je $\alpha > 1$, onda je vjerojatnost da igrač dobije u beskonačno mnogo igara jednaka 0.

(b) Pretpostavite da su igre nezavisne jedna od druge. Ako je $\alpha \in (0,1]$, onda je vjerojatnost da igrač dobije u beskonačno mnogo igara jednaka 1. (Uputa: pogledajte Lemu 2.17 na kraju drugog poglavlja.)

Primjer 1.20, nastavak

Primjer 1.20 Igrač igra niz različitih igara na sreću. Vjerojatnost dobitka u n-toj igri je $p_n \in [0,1]$. Svaka sljedeća igra je teža i vjerojatnost dobitka se smanjuje. Pretpostavite da je $p_n = n^{-\alpha}$ za $\alpha > 0$.

(a) Ako je $\alpha > 1$, onda je vjerojatnost da igrač dobije u beskonačno mnogo igara jednaka 0.

(b) Pretpostavite da su igre nezavisne jedna od druge. Ako je $\alpha \in (0,1]$, onda je vjerojatnost da igrač dobije u beskonačno mnogo igara jednaka 1. (Uputa: pogledajte Lemu 2.17 na kraju drugog poglavlja.)

Rješenje: Stavimo $A_n = \{\text{igrač je dobio u } n\text{-oj igri}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Po pretpostavci $\mathbb{P}(A_n) = p_n = n^{-\alpha}$.

(a) Za $\alpha > 1$ vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty$ pa tvrdnja slijedi izravno iz Borel-Cantellijeve leme.

Primjer 1.20, nastavak

Primjer 1.20 Igrač igra niz različitih igara na sreću. Vjerojatnost dobitka u n-toj igri je $p_n \in [0,1]$. Svaka sljedeća igra je teža i vjerojatnost dobitka se smanjuje. Pretpostavite da je $p_n = n^{-\alpha}$ za $\alpha > 0$.

(a) Ako je $\alpha > 1$, onda je vjerojatnost da igrač dobije u beskonačno mnogo igara jednaka 0.

(b) Pretpostavite da su igre nezavisne jedna od druge. Ako je $\alpha \in (0,1]$, onda je vjerojatnost da igrač dobije u beskonačno mnogo igara jednaka 1. (Uputa: pogledajte Lemu 2.17 na kraju drugog poglavlja.)

Rješenje: Stavimo $A_n = \{\text{igrač je dobio u } n\text{-oj igri}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Po pretpostavci $\mathbb{P}(A_n) = p_n = n^{-\alpha}$.

(a) Za $\alpha > 1$ vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty$ pa tvrdnja slijedi izravno iz Borel-Cantellijeve leme.

(b) Za $\alpha \leq 1$ vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \infty$ pa tvrdnja slijedi iz Leme 2.17 (svojevrstan obrat Borel-Cantellijeve leme).