Poglavlje 6: Neprekidne slučajne varijable

Snježana Lubura Strunjak i Zoran Vondraček

Zagreb, 14. prosinca 2020.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

U ovom poglavlju uvest ćemo pojam apsolutno neprekidne slučajne varijable, pokazat kako se računaju vjerojatnosti vezane uz takve slučajne varijable, navesti glavne primjere apsolutno neprekidnih slučajnih varijabli i definirati pojam matematičkog očekivanja.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

U ovom poglavlju uvest ćemo pojam apsolutno neprekidne slučajne varijable, pokazat kako se računaju vjerojatnosti vezane uz takve slučajne varijable, navesti glavne primjere apsolutno neprekidnih slučajnih varijabli i definirati pojam matematičkog očekivanja.

Prisjetimo se prvo opće definicije slučajne varijable i pripadajuće funkcije distribucije iz Poglavlja 4.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

U ovom poglavlju uvest ćemo pojam apsolutno neprekidne slučajne varijable, pokazat kako se računaju vjerojatnosti vezane uz takve slučajne varijable, navesti glavne primjere apsolutno neprekidnih slučajnih varijabli i definirati pojam matematičkog očekivanja.

Prisjetimo se prvo opće definicije slučajne varijable i pripadajuće funkcije distribucije iz Poglavlja 4.

Definicija 6.1 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. *Slučajna varijabla* na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

U ovom poglavlju uvest ćemo pojam apsolutno neprekidne slučajne varijable, pokazat kako se računaju vjerojatnosti vezane uz takve slučajne varijable, navesti glavne primjere apsolutno neprekidnih slučajnih varijabli i definirati pojam matematičkog očekivanja.

Prisjetimo se prvo opće definicije slučajne varijable i pripadajuće funkcije distribucije iz Poglavlja 4.

Definicija 6.1 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. *Slučajna varijabla* na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 6.2 *Funkcija distribucije* slučajne varijable X je funkcija $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana formulom

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

Prisjetimo se, $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-)$, gdje je $F(x-) := \lim_{y \nearrow x} F(x)$. Ako je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $D = \{a_1, a_2, \dots\}$, onda je $F(a_j) - F(a_j-) = \mathbb{P}(X = a_j) > 0$, $j = 1, 2, \dots$, tj., funkcija distribucije nije neprekidna.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

Prisjetimo se, $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-)$, gdje je $F(x-) := \lim_{y \nearrow x} F(x)$. Ako je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $D = \{a_1, a_2, \dots\}$, onda je $F(a_j) - F(a_j-) = \mathbb{P}(X = a_j) > 0$, $j = 1, 2, \dots$, tj., funkcija distribucije nije neprekidna. Svi dosadašnji primjeri bili su takvi.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

Prisjetimo se, $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-)$, gdje je $F(x-) := \lim_{y \nearrow x} F(x)$. Ako je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $D = \{a_1, a_2, \dots\}$, onda je $F(a_j) - F(a_j-) = \mathbb{P}(X = a_j) > 0$, $j = 1, 2, \dots$, tj., funkcija distribucije nije neprekidna. Svi dosadašnji primjeri bili su takvi. S druge strane, ukoliko je F neprekidna u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$, onda je $\mathbb{P}(X = x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Sljedeći primjer ilustrira jednu takvu slučajnu varijablu.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće; Primjer

Primjer 6.3 Odabiremo točku iz segmenta $[0, 1]$ na način da su, intuitivno, sve točke "jednako vjerojatne".

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće; Primjer

Primjer 6.3 Odabiremo točku iz segmenta $[0, 1]$ na način da su, intuitivno, sve točke "jednako vjerojatne". Za prostor elementarnih događaja prirodno je uzeti $\Omega = [0, 1]$. Također je prirodno zahtijevati da su intervali događaji.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće; Primjer

Primjer 6.3 Odabiremo točku iz segmenta $[0, 1]$ na način da su, intuitivno, sve točke "jednako vjerojatne". Za prostor elementarnih događaja prirodno je uzeti $\Omega = [0, 1]$. Također je prirodno zahtijevati da su intervali događaji. Neka je $\mathcal{F}$ najmanja σ-algebra generirana familijom svih otvorenih i zatvorenih intervala sadržanih u $[0, 1]$, vidi Zadatak 1.6. Ta σ-algebra zove se Borelova σ-algebra na $[0, 1]$ i označava s $\mathcal{B}([0, 1])$.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće; Primjer

Primjer 6.3 Odabiremo točku iz segmenta $[0,1]$ na način da su, intuitivno, sve točke "jednako vjerojatne". Za prostor elementarnih događaja prirodno je uzeti $\Omega = [0,1]$. Također je prirodno zahtijevati da su intervali događaji. Neka je $\mathcal{F}$ najmanja σ-algebra generirana familijom svih otvorenih i zatvorenih intervala sadržanih u $[0,1]$, vidi Zadatak 1.6. Ta σ-algebra zove se Borelova σ-algebra na $[0,1]$ i označava s $\mathcal{B}([0,1])$. Neka je $\mathbb{P} : \mathcal{B}([0,1]) \to [0,1]$ vjerojatnost takva da vrijedi $\mathbb{P}((a,b)) = b - a$ za sve otvorene intervale $(a,b) \subset \Omega$. Egzistencija takve vjerojatnosti je netrivijalna i izlazi iz okvira ovog kolegija.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće; Primjer

Primjer 6.3 Odabiremo točku iz segmenta $[0,1]$ na način da su, intuitivno, sve točke "jednako vjerojatne". Za prostor elementarnih događaja prirodno je uzeti $\Omega = [0,1]$. Također je prirodno zahtijevati da su intervali događaji. Neka je $\mathcal{F}$ najmanja σ-algebra generirana familijom svih otvorenih i zatvorenih intervala sadržanih u $[0,1]$, vidi Zadatak 1.6. Ta σ-algebra zove se Borelova σ-algebra na $[0,1]$ i označava s $\mathcal{B}([0,1])$. Neka je $\mathbb{P} : \mathcal{B}([0,1]) \to [0,1]$ vjerojatnost takva da vrijedi $\mathbb{P}((a,b)) = b - a$ za sve otvorene intervale $(a,b) \subset \Omega$. Egzistencija takve vjerojatnosti je netrivijalna i izlazi iz okvira ovog kolegija. Neka je, nadalje, $X(\omega) := \omega$, tj.,

$$X := \text{udaljenost točke } \omega \text{ od } 0.$$

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće; Primjer

Primjer 6.3 Odabiremo točku iz segmenta $[0, 1]$ na način da su, intuitivno, sve točke "jednako vjerojatne". Za prostor elementarnih događaja prirodno je uzeti $\Omega = [0, 1]$. Također je prirodno zahtijevati da su intervali događaji. Neka je $\mathcal{F}$ najmanja σ-algebra generirana familijom svih otvorenih i zatvorenih intervala sadržanih u $[0, 1]$, vidi Zadatak 1.6. Ta σ-algebra zove se Borelova σ-algebra na $[0, 1]$ i označava s $\mathcal{B}([0, 1])$. Neka je $\mathbb{P} : \mathcal{B}([0, 1]) \to [0, 1]$ vjerojatnost takva da vrijedi $\mathbb{P}((a, b)) = b - a$ za sve otvorene intervale $(a, b) \subset \Omega$. Egzistencija takve vjerojatnosti je netrivijalna i izlazi iz okvira ovog kolegija. Neka je, nadalje, $X(\omega) := \omega$, tj.,

$$X := \text{udaljenost točke } \omega \text{ od } 0.$$

Tada imamo

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}([0, x]) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće; Primjer

Primjer 6.3 Odabiremo točku iz segmenta $[0,1]$ na način da su, intuitivno, sve točke "jednako vjerojatne". Za prostor elementarnih događaja prirodno je uzeti $\Omega = [0,1]$. Također je prirodno zahtijevati da su intervali događaji. Neka je $\mathcal{F}$ najmanja σ-algebra generirana familijom svih otvorenih i zatvorenih intervala sadržanih u $[0,1]$, vidi Zadatak 1.6. Ta σ-algebra zove se Borelova σ-algebra na $[0,1]$ i označava s $\mathcal{B}([0,1])$. Neka je $\mathbb{P} : \mathcal{B}([0,1]) \to [0,1]$ vjerojatnost takva da vrijedi $\mathbb{P}((a,b)) = b - a$ za sve otvorene intervale $(a,b) \subset \Omega$. Egzistencija takve vjerojatnosti je netrivijalna i izlazi iz okvira ovog kolegija. Neka je, nadalje, $X(\omega) := \omega$, tj.,

$$X := \text{udaljenost točke } \omega \text{ od } 0.$$

Tada imamo

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}([0,x]) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Specijalno, F je neprekidna pa imamo da je $\mathbb{P}(X = x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Slučajna varijabla X se zove *uniformna slučajna varijabla* na segmentu $[0,1]$ što označavamo sa $X \sim U(0,1)$.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće; Definicija apsolutno neprekidne slučajne varijable

Definicija 6.4 Slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je *apsolutno neprekidna* ako postoji $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ takva da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Funkcija f se zove *funkcija gustoće* od X.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće; Definicija apsolutno neprekidne slučajne varijable

Definicija 6.4 Slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je *apsolutno neprekidna* ako postoji $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ takva da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Funkcija f se zove *funkcija gustoće* od X.

Napomenimo da je integral na desnoj strani u gornjoj definiciji tzv. Lebesgueov integral čiji pojam izlazi iz okvira ovog kolegija te ga ovdje nećemo diskutirati. U slučaju da funkcija f ima najviše prebrojivo mnogo prekida, onda se taj integral podudara s klasičnim Riemannovim integralom. Općenito, ako je f Riemann integrabilna, onda je ona i Lebesgue integrabilna. Zadnje dvije tvrdnje za $\int_{-\infty}^{t}$ vrijede za nenegativnu funkciju f, te se radi o nepravom Riemannovom integralu.Dodatno, omeđena funkcija na segmentu je Riemann integrabilna ako i samo ako je skup njenih prekida skup Lebesgueove mjere nula, što je slučaj kad ima konačno ili prebrojivo mnogo prekida.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

Također, napomenimo ako je X apsolutno neprekidna, onda je za "većinu točaka" $x \in \mathbb{R}$ funkcija F diferencijabilna i vrijedi $F'(x) = f(x)$ (preciznije, skup točaka za koje to eventualno ne vrijedi je skup Lebesgueove mjere nula). Ako je f neprekidna, onda $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

Također, napomenimo ako je X apsolutno neprekidna, onda je za "većinu točaka" $x \in \mathbb{R}$ funkcija F diferencijabilna i vrijedi $F'(x) = f(x)$ (preciznije, skup točaka za koje to eventualno ne vrijedi je skup Lebesgueove mjere nula). Ako je f neprekidna, onda $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Nadalje, za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, imamo

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

Također, napomenimo ako je X apsolutno neprekidna, onda je za "većinu točaka" $x \in \mathbb{R}$ funkcija F diferencijabilna i vrijedi $F'(x) = f(x)$ (preciznije, skup točaka za koje to eventualno ne vrijedi je skup Lebesgueove mjere nula). Ako je f neprekidna, onda $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Nadalje, za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, imamo

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Specijalno, za svaki $b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X = b) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbb{P}(b - \varepsilon < X \leq b) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{b-\varepsilon}^{b} f(t)dt = 0.$$

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

Također, napomenimo ako je X apsolutno neprekidna, onda je za "većinu točaka" $x \in \mathbb{R}$ funkcija F diferencijabilna i vrijedi $F'(x) = f(x)$ (preciznije, skup točaka za koje to eventualno ne vrijedi je skup Lebesgueove mjere nula). Ako je f neprekidna, onda $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Nadalje, za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, imamo

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Specijalno, za svaki $b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X = b) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbb{P}(b - \varepsilon < X \leq b) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{b-\varepsilon}^{b} f(t)dt = 0.$$

U slučaju da je f Riemann integrabilna i b točka neprekidnosti od f, gornja relacija jednostavno slijedi. U općenitoj situaciji ona je posljedica tzv. teorema o monotonoj konvergenciji.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

Također, napomenimo ako je X apsolutno neprekidna, onda je za "većinu točaka" $x \in \mathbb{R}$ funkcija F diferencijabilna i vrijedi $F'(x) = f(x)$ (preciznije, skup točaka za koje to eventualno ne vrijedi je skup Lebesgueove mjere nula). Ako je f neprekidna, onda $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Nadalje, za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, imamo

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Specijalno, za svaki $b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X = b) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbb{P}(b - \varepsilon < X \leq b) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{b-\varepsilon}^{b} f(t)dt = 0.$$

U slučaju da je f Riemann integrabilna i b točka neprekidnosti od f, gornja relacija jednostavno slijedi. U općenitoj situaciji ona je posljedica tzv. teorema o monotonoj konvergenciji. Napomenimo također da se gornja relacija može poopćiti, tj. vrijedi

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_{B} f(t)dt, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

gdje je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$ (vidi Zadatak 1.6).

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable

U ovom odjeljku diskutiramo neke najpoznatije apsolutno neprekidne slučajne varijable.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable

U ovom odjeljku diskutiramo neke najpoznatije apsolutno neprekidne slučajne varijable.

Primjer 6.5 Neka je $X \sim U(0,1)$. Tada je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable

U ovom odjeljku diskutiramo neke najpoznatije apsolutno neprekidne slučajne varijable.

Primjer 6.5 Neka je $X \sim U(0,1)$. Tada je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla. Zaista, za

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ ili } x \geq 1, \end{cases}$$

vrijedi da je

$$\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

što je funkcija distribucije F uniformne slučajne varijable $U(0,1)$.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable

U ovom odjeljku diskutiramo neke najpoznatije apsolutno neprekidne slučajne varijable.

Primjer 6.5 Neka je $X \sim U(0,1)$. Tada je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla. Zaista, za

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ ili } x \geq 1, \end{cases}$$

vrijedi da je

$$\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

što je funkcija distribucije F uniformne slučajne varijable $U(0,1)$.Uočite još da je $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ te da funkcija distribucije F nije diferencijabilna u točkama 0 i 1.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable

U ovom odjeljku diskutiramo neke najpoznatije apsolutno neprekidne slučajne varijable.

Primjer 6.5 Neka je $X \sim U(0,1)$. Tada je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla. Zaista, za

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ ili } x \geq 1, \end{cases}$$

vrijedi da je

$$\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

što je funkcija distribucije F uniformne slučajne varijable $U(0,1)$.Uočite još da je $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ te da funkcija distribucije F nije diferencijabilna u točkama 0 i 1.

Neka je $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ (Lebesgue integrabilna) funkcija za koju vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Tada je f funkcija gustoće neke apsolutno neprekidne slučajne varijable.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable

U ovom odjeljku diskutiramo neke najpoznatije apsolutno neprekidne slučajne varijable.

Primjer 6.5 Neka je $X \sim U(0,1)$. Tada je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla. Zaista, za

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ ili } x \geq 1, \end{cases}$$

vrijedi da je

$$\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

što je funkcija distribucije F uniformne slučajne varijable $U(0,1)$.Uočite još da je $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ te da funkcija distribucije F nije diferencijabilna u točkama 0 i 1.

Neka je $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ (Lebesgue integrabilna) funkcija za koju vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Tada je f funkcija gustoće neke apsolutno neprekidne slučajne varijable. Zaista, stavimo $\Omega := \mathbb{R}$, $\mathcal{F} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(B) := \int_B f(t)dt$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $X(\omega) := \omega$, $\omega \in \Omega$. Tada vrijedi,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Eksponencijalna slučajna varijabla

Primjer 6.6 Neka je X slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

gdje je $\lambda > 0$ parametar. Funkcija distribucije slučajne varijable X je tada

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Slučajna varijabla X se zove *eksponencijalna slučajna varijabla* s parametrom $\lambda > 0$. Oznaka je $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Eksponencijalna slučajna varijabla

Primjer 6.6 Neka je X slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

gdje je $\lambda > 0$ parametar. Funkcija distribucije slučajne varijable X je tada

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Slučajna varijabla X se zove *eksponencijalna slučajna varijabla* s parametrom $\lambda > 0$. Oznaka je $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Eksponencijalna slučajna varijabla X ima svojstvo zaboravljanja: za sve $s, t > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s). \tag{1}$$

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Eksponencijalna slučajna varijabla; nastavak

Ukoliko slučajnu varijablu X interpretiramo kao vrijeme čekanja da se nešto dogodi, onda svojstvo zaboravljanja kaže da je vjerojatnost da je vrijeme čekanja barem $s+t$ uz uvjet da smo čekali barem vrijeme t, jednako bezuvjetnoj vjerojatnosti da je vrijeme čekanja barem s: slučajna varijabla X je "zaboravila" da je već prošlo t vremenskih trenutaka.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Eksponencijalna slučajna varijabla; nastavak

Ukoliko slučajnu varijablu X interpretiramo kao vrijeme čekanja da se nešto dogodi, onda svojstvo zaboravljanja kaže da je vjerojatnost da je vrijeme čekanja barem $s+t$ uz uvjet da smo čekali barem vrijeme t, jednako bezuvjetnoj vjerojatnosti da je vrijeme čekanja barem s: slučajna varijabla X je "zaboravila" da je već prošlo t vremenskih trenutaka. Dokaz jednakosti (1) je jednostavan i koristi činjenicu da je za sve $x>0$, $\mathbb{P}(X>x)=1-\mathbb{P}(X\leq x)=1-F(x)=e^{-\lambda x}$.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Eksponencijalna slučajna varijabla; nastavak

Ukoliko slučajnu varijablu X interpretiramo kao vrijeme čekanja da se nešto dogodi, onda svojstvo zaboravljanja kaže da je vjerojatnost da je vrijeme čekanja barem $s+t$ uz uvjet da smo čekali barem vrijeme t, jednako bezuvjetnoj vjerojatnosti da je vrijeme čekanja barem s: slučajna varijabla X je "zaboravila" da je već prošlo t vremenskih trenutaka. Dokaz jednakosti (1) je jednostavan i koristi činjenicu da je za sve $x > 0$, $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$. Slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > s+t | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > s+t, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s).\end{aligned}$$

Stavimo $\bar{F}(x) := 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Eksponencijalna slučajna varijabla; nastavak

Ukoliko slučajnu varijablu X interpretiramo kao vrijeme čekanja da se nešto dogodi, onda svojstvo zaboravljanja kaže da je vjerojatnost da je vrijeme čekanja barem $s+t$ uz uvjet da smo čekali barem vrijeme t, jednako bezuvjetnoj vjerojatnosti da je vrijeme čekanja barem s: slučajna varijabla X je "zaboravila" da je već prošlo t vremenskih trenutaka. Dokaz jednakosti (1) je jednostavan i koristi činjenicu da je za sve $x>0$, $\mathbb{P}(X>x)=1-\mathbb{P}(X\le x)=1-F(x)=e^{-\lambda x}$. Slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>s+t|X>t) &= \frac{\mathbb{P}(X>s+t, X>t)}{\mathbb{P}(X>t)} = \frac{\mathbb{P}(X>s+t)}{\mathbb{P}(X>t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X>s).\end{aligned}$$

Stavimo $\bar{F}(x) := 1-F(x) = \mathbb{P}(X>x)$. Tada je (1) ekvivalentno s

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t), \qquad s,t>0.$$

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Eksponencijalna slučajna varijabla; nastavak

Ukoliko slučajnu varijablu X interpretiramo kao vrijeme čekanja da se nešto dogodi, onda svojstvo zaboravljanja kaže da je vjerojatnost da je vrijeme čekanja barem $s+t$ uz uvjet da smo čekali barem vrijeme t, jednako bezuvjetnoj vjerojatnosti da je vrijeme čekanja barem s: slučajna varijabla X je "zaboravila" da je već prošlo t vremenskih trenutaka. Dokaz jednakosti (1) je jednostavan i koristi činjenicu da je za sve $x > 0$, $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$. Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > s+t | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > s+t,\, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s).
\end{aligned}$$

Stavimo $\bar{F}(x) := 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Tada je (1) ekvivalentno s

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t), \qquad s,t > 0.$$

Može se pokazati da ako zdesna neprekidna funkcija $\bar{F}$ zadovoljava gornju funkcionalnu jednakost, onda postoji $\lambda > 0$ tako da je $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$. To znači da svojstvo zaboravljanja karakterizira eksponencijalnu slučajnu varijablu.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Cauchyjeva slučajna varijabla

Primjer 6.7 Odredimo konstantu $c > 0$ takvu da funkcija

$$f(x) = \frac{c}{1 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

bude funkcija gustoće neke slučajne varijable.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Cauchyjeva slučajna varijabla

Primjer 6.7 Odredimo konstantu $c > 0$ takvu da funkcija

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

bude funkcija gustoće neke slučajne varijable. Mora vrijediti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Imamo.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1+t^2} dt = c \arctan(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = c\pi.$$

Dakle, $c = 1/\pi$.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Cauchyjeva slučajna varijabla

Primjer 6.7 Odredimo konstantu $c > 0$ takvu da funkcija

$$f(x) = \frac{c}{1 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

bude funkcija gustoće neke slučajne varijable. Mora vrijediti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Imamo.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1 + t^2} dt = c \arctan(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = c\pi.$$

Dakle, $c = 1/\pi$. Slučajna varijabla X s funkcijom gustoće f se zove *Cauchyjeva slučajna varijabla* .

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Normalna slučajna varijabla

Primjer 6.8 Neka je

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pokažimo da je ϕ funkcija gustoće neke slučajne varijable.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Normalna slučajna varijabla

Primjer 6.8 Neka je

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pokažimo da je ϕ funkcija gustoće neke slučajne varijable.Definirajmo

$$I := \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds\right)\left(\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} dsdt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} rdrd\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} rdr = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Normalna slučajna varijabla

Primjer 6.8 Neka je

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pokažimo da je ϕ funkcija gustoće neke slučajne varijable.Definirajmo

$$I := \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Tada imamo

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds\right)\left(\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} dsdt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} rdrd\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} rdr = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, $I = \sqrt{\pi/2}$. Konačno,

$$\int_{-\infty}^\infty \phi(t)dt = \frac{2I}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Normalna slučajna varijabla; nastavak

Slučajna varijabla X s funkcijom gustoće ϕ zove se *standardna normalna slučajna varijabla* . Oznaka je $X \sim N(0, 1)$. Pripadnu funkciju distribucije označavamo s Φ.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Normalna slučajna varijabla; nastavak

Slučajna varijabla X s funkcijom gustoće ϕ zove se *standardna normalna slučajna varijabla* . Oznaka je $X \sim N(0,1)$. Pripadnu funkciju distribucije označavamo s Φ. Nadalje, neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ te neka je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Budući da vrijedi (zamjena varijabli $t = (x-\mu)/\sigma$),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 1,$$

f je funkcija gustoće neke slučajne varijable.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Normalna slučajna varijabla; nastavak

Slučajna varijabla X s funkcijom gustoće ϕ zove se *standardna normalna slučajna varijabla* . Oznaka je $X \sim N(0,1)$. Pripadnu funkciju distribucije označavamo s Φ. Nadalje, neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ te neka je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Budući da vrijedi (zamjena varijabli $t = (x-\mu)/\sigma$),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 1,$$

f je funkcija gustoće neke slučajne varijable. Pripadna slučajna varijabla X zove se *normalna slučajna varijabla s parametrima μ i σ^2* . Oznaka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Gamma funkcija

Primjer 6.9 Za $\alpha > 0$ definiramo

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Funkcija Γ se zove *gama funkcija*.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Gamma funkcija

Primjer 6.9 Za $\alpha > 0$ definiramo

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Funkcija Γ se zove *gama funkcija*. Odredimo $\Gamma(n)$ za $n \in \mathbb{N}$. Očito $\Gamma(1) = 1$. Za $n \geq 2$, koristeći parcijalnu integraciju, dobivamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \\
&= -t^{n-1} e^{-t} \Big|_0^\infty + (n-1) \int_0^\infty t^{n-2} e^{-t} dt \\
&= (n-1)\Gamma(n-1).
\end{aligned}$$

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Gamma funkcija

Primjer 6.9 Za $\alpha > 0$ definiramo

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Funkcija Γ se zove *gama funkcija*. Odredimo $\Gamma(n)$ za $n \in \mathbb{N}$. Očito $\Gamma(1) = 1$. Za $n \geq 2$, koristeći parcijalnu integraciju, dobivamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \\
&= -t^{n-1} e^{-t}\Big|_0^\infty + (n-1) \int_0^\infty t^{n-2} e^{-t} dt \\
&= (n-1)\Gamma(n-1).
\end{aligned}$$

Dakle, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Gamma funkcija

Primjer 6.9 Za $\alpha > 0$ definiramo

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Funkcija Γ se zove *gama funkcija*. Odredimo $\Gamma(n)$ za $n \in \mathbb{N}$. Očito $\Gamma(1) = 1$. Za $n \geq 2$, koristeći parcijalnu integraciju, dobivamo

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= -t^{n-1} e^{-t} \Big|_0^\infty + (n-1) \int_0^\infty t^{n-2} e^{-t} dt \\ &= (n-1)\Gamma(n-1).\end{aligned}$$

Dakle, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
Nadalje, za $\lambda > 0$, uz zamjenu varijabli $t = \lambda s$, imamo

$$\int_0^\infty \lambda^\alpha s^{\alpha-1} e^{-\lambda s} ds = \int_0^\infty \lambda^\alpha \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha).$$

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Gamma distribucija

Definiramo funkciju

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Gamma distribucija

Definiramo funkciju

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Tada je

(i) $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$;

(ii) koristeći zamjenu varijabli $t = \lambda x$ i definiciju gama funkcije,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = 1.$$

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable; Gamma distribucija

Definiramo funkciju

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Tada je

(i) $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$;

(ii) koristeći zamjenu varijabli $t = \lambda x$ i definiciju gama funkcije,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt = 1.$$

Slučajna varijabla X s funkcijom gustoće f zove se *gama distribucija s parametrima α i λ* . Oznaka je $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.

Uočimo, za $\alpha = 1$ dobivamo

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

tj. pripadna slučajna varijabla je eksponencijalna s parametrom λ.

Uočimo, za $\alpha = 1$ dobivamo

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

tj. pripadna slučajna varijabla je eksponencijalna s parametrom λ. Nadalje, za $\lambda = 1/2$ i $\alpha = n/2$, $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(n/2)} (\frac{1}{2})^{n/2} x^{n/2-1} e^{-x/2} dx, & x > 0. \end{cases}$$

Slučajna varijabla $X \sim \Gamma(n/2, 1/2)$ zove se *hi-kvadrat distribucija s n stupnjeva slobode*. Oznaka je $X \sim \chi^2(n)$.

6.2 Funkcije slučajnih varijabli

Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X, definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada je (uz neke dodatne uvjete na g, npr. g ima najviše prebrojivo mnogo prekida) $Y := g \circ X = g(X)$ slučajna varijabla. Funkcija distribucije F_Y od Y je dana s

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \int_{\{x:\, g(x) \leq y\}} f_X(x)dx.$$

6.2 Funkcije slučajnih varijabli

Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X, definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada je (uz neke dodatne uvjete na g, npr. g ima najviše prebrojivo mnogo prekida) $Y := g \circ X = g(X)$ slučajna varijabla. Funkcija distribucije F_Y od Y je dana s

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \int_{\{x:\, g(x) \leq y\}} f_X(x) dx.$$

Ako je F_Y diferencijabilna na $\mathbb{R}$, onda možemo naći pripadnu funkciju gustoće f_Y. Primjerice, pretpostavimo da je g strogo rastuća i diferencijabilna. Neka je $m = \inf_{x \in X(\Omega)} g(x) \geq -\infty$ i $M = \sup_{x \in X(\Omega)} g(x) \leq \infty$. Tada vrijedi

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq m \\ 1, & y \geq M. \end{cases}$$

6.3 Funkcije slučajnih varijabli

Nadalje, za $m < y < M$ imamo

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{y} f_X(g^{-1}(t))(g^{-1})'(t)dt.$$

6.3 Funkcije slučajnih varijabli

Nadalje, za $m < y < M$ imamo

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{y} f_X(g^{-1}(t))(g^{-1})'(t)dt.$$

Dakle, Y je apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq m\,,\ y \geq M \\ f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y), & m < y < M\,. \end{cases}$$

6.3 Funkcije slučajnih varijabli

Nadalje, za $m < y < M$ imamo

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{y} f_X(g^{-1}(t))(g^{-1})'(t)dt.$$

Dakle, Y je apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq m\,,\ y \geq M \\ f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y), & m < y < M\,. \end{cases}$$

U slučaju da je g strogo padajuća, uz iste oznake kao i gore, imamo

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq m\,,\ y \geq M \\ f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)|, & m < y < M\,. \end{cases}$$

6.3 Funkcije slučajnih varijabli

Nadalje, za $m < y < M$ imamo

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \le g^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{y} f_X(g^{-1}(t))(g^{-1})'(t)dt.$$

Dakle, Y je apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le m\,,\ y \ge M \\ f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y), & m < y < M\,. \end{cases}$$

U slučaju da je g strogo padajuća, uz iste oznake kao i gore, imamo

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le m\,,\ y \ge M \\ f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)|, & m < y < M\,. \end{cases}$$

Primjer 6.10 Neka je $X \sim U(0,1)$ i neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definirajmo $g(x) := (b-a)x + a$. Tada je $Y := g(X)$ slučajna varijabla s fukcijom gustoće

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < y < b \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

Slučajnu varijablu Y zovemo *uniformna slučajna varijabla na segmetu $[a, b]$*. Oznaka $Y \sim U(a, b)$.

Primjer 6.11 Neka je $X \sim U(0,1)$ i neka je $\lambda > 0$. Definirajmo $g(x) := -1/\lambda \log x$. Tada je $Y := g(X)$ dobro definirana slučajna varijabla i vrijedi $Y \in (0, \infty)$. Odredimo pripadnu funkciju gustoće f_Y. Imamo,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\log X \leq y\right) = \mathbb{P}(\log X \geq -\lambda y) \\ &= \mathbb{P}(X \geq e^{-\lambda y}) = 1 - e^{-\lambda y}. \end{aligned}$$

Dakle, $Y \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$.

6.3 Funkcije slučajnih varijabli

Primjer 6.12 Neka je $X \sim U(-1,1)$ i neka je $g(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Odredimo funkciju gustoće f_Y od $Y := g(X)$.

6.3 Funkcije slučajnih varijabli

Primjer 6.12 Neka je $X \sim U(-1,1)$ i neka je $g(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Odredimo funkciju gustoće f_Y od $Y := g(X)$.

Rješenje: Imamo dva slučaja.

(i) U slučaju da je n neparan imamo $Y \in [-1,1]$ te g je strogo rastuća i diferencijabilna. Dakle,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2n} y^{\frac{1}{n}-1}, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

6.3 Funkcije slučajnih varijabli

Primjer 6.12 Neka je $X \sim U(-1,1)$ i neka je $g(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Odredimo funkciju gustoće f_Y od $Y := g(X)$.

Rješenje: Imamo dva slučaja.

(i) U slučaju da je n neparan imamo $Y \in [-1,1]$ te g je strogo rastuća i diferencijabilna. Dakle,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2n} y^{\frac{1}{n}-1}, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

(ii) U slučaju kada je n paran imamo $Y \in [0,1]$ i g nije rastuća. Međutim, za $0 < y < 1$ vrijedi

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^n \leq y) = \mathbb{P}\left(-y^{\frac{1}{n}} \leq X \leq y^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \int_{-y^{1/n}}^{y^{1/n}} \frac{1}{2} dx = y^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

6.3 Funkcije slučajnih varijabli

Primjer 6.13 Neka je $X \sim N(0,1)$ i neka su $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$. Definirajmo $g(x) := \sigma x + \mu$. Tada je $Y := g(X)$ dobro definirana slučajna varijabla i pripadna funkcija gustoće je

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dakle, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

6.3 Funkcije slučajnih varijabli

Primjer 6.13 Neka je $X \sim N(0,1)$ i neka su $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$. Definirajmo $g(x) := \sigma x + \mu$. Tada je $Y := g(X)$ dobro definirana slučajna varijabla i pripadna funkcija gustoće je

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dakle, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Primjer 6.14 Neka je X slučajna varijabla sa strogo rastućom funkcijom distribucije F. Definirajmo $Y := F(X)$. Tada je $Y \sim U(0,1)$. Zaista, kako Y poprima vrijednosti u $(0,1)$, za $0 < x < 1$ imamo

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(F(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x,$$

što dokazuje tvrdnju.
Nadalje, uočimo da ako je $U \sim U(0,1)$, onda $Z := F^{-1}(U)$ ima funkciju distribucije F. Imamo

$$\mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x).$$

6.4 Matematičko očekivanje; Definicija

Definicija 6.15 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$, onda postoji *matematičko očekivanje* od X koje definiramo sa

$$\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

6.4 Matematičko očekivanje; Definicija

Definicija 6.15 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$, onda postoji *matematičko očekivanje* od X koje definiramo sa

$$\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Primjer 6.16

(i) Neka je $X \sim U(a, b)$. Tada imamo

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}.$$

6.4 Matematičko očekivanje; Definicija

Definicija 6.15 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$, onda postoji *matematičko očekivanje* od X koje definiramo sa

$$\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Primjer 6.16

(i) Neka je $X \sim U(a, b)$. Tada imamo

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

(ii) Neka je $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Tada imamo

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

6.4 Matematičko očekivanje; Primjer 6.16 nastavak

(iii) Neka je $X \sim N(0,1)$. Tada je

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

(iii) Neka je $X \sim N(0,1)$. Tada je

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

(iv) Neka je $\alpha > 1$ te neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha-1)x^{-\alpha}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

Slučajnu varijablu X zovemo *Paretova slučajna varijabla s parametrom α*. Sada imamo

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{\infty} (\alpha-1)x^{1-\alpha} dx = \begin{cases} \infty, & 1 < \alpha \leq 2 \\ \frac{\alpha-1}{\alpha-2}, & \text{inače}. \end{cases}$$

6.4 Matematičko očekivanje; Primjer 6.16 nastavak

(iii) Neka je $X \sim N(0,1)$. Tada je

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

(iv) Neka je $\alpha > 1$ te neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha - 1)x^{-\alpha}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

Slučajnu varijablu X zovemo *Paretova slučajna varijabla s parametrom α*. Sada imamo

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{1}^{\infty} (\alpha - 1) x^{1-\alpha} dx = \begin{cases} \infty, & 1 < \alpha \leq 2 \\ \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}, & \text{inače.} \end{cases}$$

(v) Neka je X Cauchyeva slučajna varijabla. Uočimo da očekivanje od X ne postoji. Zaista,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x} = \infty.$$

6.4 Matematičko očekivanje

Teorem 6.17 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X i neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija (koja zadovoljava određena svojstva, npr. g ima najviše prebrojivo mnogo prekida). Definirajmo $Y := g \circ X = g(X)$. Ako $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x) dx < \infty$, onda Y ima matematičko očekivanje i vrijedi

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

6.4 Matematičko očekivanje

Teorem 6.17 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X i neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija (koja zadovoljava određena svojstva, npr. g ima najviše prebrojivo mnogo prekida). Definirajmo $Y := g \circ X = g(X)$. Ako $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x) dx < \infty$, onda Y ima matematičko očekivanje i vrijedi

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Dokaz: Dokaz provodimo za slučaj kada je g strogo rastuća i diferencijabilna funkcija. Tada je

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le m,\ y \ge M \\ f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y), & m < y < M, \end{cases}$$

gdje je f_Y funkcija gustoće od Y, $m = \inf_{x \in X(\Omega)} g(x)$ i $M = \sup_{x \in X(\Omega)} g(x)$.

6.4 Matematičko očekivanje

Teorem 6.17 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X i neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija (koja zadovoljava određena svojstva, npr. g ima najviše prebrojivo mnogo prekida). Definirajmo $Y := g \circ X = g(X)$. Ako $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x) dx < \infty$, onda Y ima matematičko očekivanje i vrijedi

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Dokaz: Dokaz provodimo za slučaj kada je g strogo rastuća i diferencijabilna funkcija. Tada je

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq m\,,\ y \geq M \\ f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y), & m < y < M\,, \end{cases}$$

gdje je f_Y funkcija gustoće od Y, $m = \inf_{x \in X(\Omega)} g(x)$ i $M = \sup_{x \in X(\Omega)} g(x)$. Dakle,

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{m}^{M} y f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx\,.$$

6.4 Matematičko očekivanje

Primjer 6.18 Neka je $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pokažimo da je $\mathbb{E}(Y) = \mu$. Neka je $X \sim N(0, 1)$. Budući da je $\sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, po Teoremu 6.17 zaključujemo da je

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma x + \mu) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mu.$$

6.4 Matematičko očekivanje

Primjer 6.18 Neka je $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pokažimo da je $\mathbb{E}(Y) = \mu$. Neka je $X \sim N(0,1)$. Budući da je $\sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, po Teoremu 6.17 zaključujemo da je

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma x + \mu) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mu.$$

Teorem 6.19 Neka je X nenegativna apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f, funkcijom distribucije F i konačnim očekivanjem. Tada je

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

6.4 Matematičko očekivanje

Primjer 6.18 Neka je $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pokažimo da je $\mathbb{E}(Y) = \mu$. Neka je $X \sim N(0,1)$. Budući da je $\sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, po Teoremu 6.17 zaključujemo da je

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma x + \mu) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mu.$$

Teorem 6.19 Neka je X nenegativna apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f, funkcijom distribucije F i konačnim očekivanjem. Tada je

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

Dokaz: Za $y > 0$, uz primjenu parcijalne integracije, imamo

$$\begin{aligned}\int_0^y x f(x) dx &= -x(1 - F(x))\Big|_0^y + \int_0^y (1 - F(x)) dx \\ &= -y(1 - F(y)) + \int_0^y (1 - F(x)) dx.\end{aligned}$$

6.4 Matematičko očekivanje

Međutim,

$$0 \leq y(1 - F(y)) = y \int_y^{\infty} f(x)dx \leq \int_y^{\infty} xf(x)dx$$

te zadnji član u gornjoj relaciji teži u 0 kada y teži u ∞ jer $\int_0^{\infty} xf(x)dx = \mathbb{E}(X) < \infty$. Dakle,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^{\infty} xf(x)dx = \lim_{y\to\infty} \int_0^{y} xf(x)dx = \lim_{y\to\infty} \int_0^{y} (1 - F(x))dx \\ &= \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x)dx.\end{aligned}$$

Međutim,

$$0 \leq y(1 - F(y)) = y \int_y^\infty f(x)dx \leq \int_y^\infty xf(x)dx$$

te zadnji član u gornjoj relaciji teži u 0 kada y teži u ∞ jer $\int_0^\infty xf(x)dx = \mathbb{E}(X) < \infty$. Dakle,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty xf(x)dx = \lim_{y\to\infty} \int_0^y xf(x)dx = \lim_{y\to\infty} \int_0^y (1 - F(x))dx \\ &= \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx.\end{aligned}$$

Primjer 6.20 Neka je X nenegativna apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f te neka je $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ neka funkcija takva da $\mathbb{E}(g(X)) < \infty$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X)) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(g(X) > y)dy = \int_0^\infty \int_{\{x:\, g(x)>y\}} f(x)dxdy \\ &= \int_0^\infty f(x) \int_{\{y:\, 0<y<g(x)\}} dydx = \int_0^\infty f(x)g(x)dx.\end{aligned}$$

6.4 Matematičko očekivanje; Momenti apsolutno neprekidne slučajne varijable

Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f te neka je $k \in \mathbb{N}$. Ukoliko je $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x)dx < \infty$, *k-ti moment* od X definiramo kao

$$\mu_k := \mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx.$$

6.4 Matematičko očekivanje; Momenti apsolutno neprekidne slučajne varijable

Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f te neka je $k \in \mathbb{N}$. Ukoliko je $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x)dx < \infty$, *k-ti moment* od X definiramo kao

$$\mu_k := \mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx.$$

Analogno, *k-ti centralni moment* od X je definiran kao

$$\sigma_k := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^k f(x)dx.$$

6.4 Matematičko očekivanje; Momenti apsolutno neprekidne slučajne varijable

Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f te neka je $k \in \mathbb{N}$. Ukoliko je $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x)dx < \infty$, *k-ti moment* od X definiramo kao

$$\mu_k := \mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx.$$

Analogno, *k-ti centralni moment* od X je definiran kao

$$\sigma_k := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^k f(x)dx.$$

Očito, $\sigma_1 = 0$ i $\sigma_2 = \mathrm{Var}(X)$. Nadalje,

$$\begin{aligned}
\sigma_2 = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mu_1)^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu_1 x + \mu_1^2) f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2\mu_1 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx + \mu_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu_1^2 = \mu_2 - \mu_1^2.
\end{aligned}$$

6.4 Matematičko očekivanje

Primjer 6.21 Neka je $X \sim N(0, \sigma^2)$. Odredimo μ_k, $k \in \mathbb{N}$.

Primjer 6.21 Neka je $X \sim N(0, \sigma^2)$. Odredimo μ_k, $k \in \mathbb{N}$.

Rješenje: Prvo uočimo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Zaista, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $M(k) > 0$ takav da $|x|^k \leq e^{|x|}$ za sve $|x| \geq M(k)$.

Primjer 6.21 Neka je $X \sim N(0, \sigma^2)$. Odredimo μ_k, $k \in \mathbb{N}$.

Rješenje: Prvo uočimo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx < \infty, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Zaista, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $M(k) > 0$ takav da $|x|^k \leq e^{|x|}$ za sve $|x| \geq M(k)$. Dakle,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx &= \int_{-M(k)}^{M(k)} |x|^k e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx + \int_{\{x:\, |x| \geq M(k)\}} |x|^k e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \\ &\leq 2M(k)^{k+1} + e^{\frac{1}{2}} \int_{\{x: |x| \geq M(k)\}} e^{-\frac{(|x|-1)^2}{2}} \, dx < \infty. \end{aligned}$$

6.4 Matematičko očekivanje; Primjer 6.21; nastavak

Nadalje, za k neparan očito imamo $\mu_k = 0$.

6.4 Matematičko očekivanje; Primjer 6.21; nastavak

Nadalje, za k neparan očito imamo $\mu_k = 0$.Neka je $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Uz primjenu parcijalne integracije imamo

$$\begin{aligned}
\mu_{2n} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= \frac{(2n-1)\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= (2n-1)\sigma^2 \mu_{2(n-1)}.
\end{aligned}$$

6.4 Matematičko očekivanje; Primjer 6.21; nastavak

Nadalje, za k neparan očito imamo $\mu_k = 0$.Neka je $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Uz primjenu parcijalne integracije imamo

$$\begin{aligned}\mu_{2n} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx \\ &= \frac{(2n-1)\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx \\ &= (2n-1)\sigma^2 \mu_{2(n-1)}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\mu_{2n} = \sigma^{2n}(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1 = \sigma^{2n}\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Specijalno, $\mu_2 = \sigma^2$.

6.4 Matematičko očekivanje; Primjer 6.21; nastavak

Nadalje, za k neparan očito imamo $\mu_k = 0$.Neka je $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Uz primjenu parcijalne integracije imamo

$$\begin{aligned}
\mu_{2n} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= \frac{(2n-1)\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= (2n-1)\sigma^2 \mu_{2(n-1)}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\mu_{2n} = \sigma^{2n}(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1 = \sigma^{2n}\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Specijalno, $\mu_2 = \sigma^2$. Neka je sada $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Uočimo da je onda $X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$. Dakle, za $n \in \mathbb{N}$ imamo $\sigma_{2n-1} = 0$ i $\sigma_{2n} = \sigma^{2n}\frac{(2n)!}{2^n n!}$. Specijalno, $\sigma_2 = \sigma^2$.

6.4 Matematičko očekivanje; Svojstva matematičkog očekivanja

Teorem 6.22 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f.

(i) Ako su $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije takve da $g(X)$ i $h(X)$ imaju očekivanje, onda vrijedi

$$\mathbb{E}(g(X) + h(X)) = \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X)).$$

6.4 Matematičko očekivanje; Svojstva matematičkog očekivanja

Teorem 6.22 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f.

(i) Ako su $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije takve da $g(X)$ i $h(X)$ imaju očekivanje, onda vrijedi

$$\mathbb{E}(g(X) + h(X)) = \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X)).$$

(ii) Ako je $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1$ za $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, onda $a \leq \mathbb{E}(X) \leq b$.

6.4 Matematičko očekivanje; Svojstva matematičkog očekivanja

Teorem 6.22 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f.

(i) Ako su $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije takve da $g(X)$ i $h(X)$ imaju očekivanje, onda vrijedi

$$\mathbb{E}(g(X) + h(X)) = \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X)).$$

(ii) Ako je $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1$ za $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, onda $a \leq \mathbb{E}(X) \leq b$.

(iii) Ako je $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, onda

$$\mathbb{P}(g(X) \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{a}, \qquad a > 0.$$

6.4 Matematičko očekivanje; Svojstva matematičkog očekivanja

Teorem 6.22 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f.

(i) Ako su $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije takve da $g(X)$ i $h(X)$ imaju očekivanje, onda vrijedi

$$\mathbb{E}(g(X) + h(X)) = \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X)).$$

(ii) Ako je $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1$ za $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, onda $a \leq \mathbb{E}(X) \leq b$.

(iii) Ako je $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, onda

$$\mathbb{P}(g(X) \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{a}, \qquad a > 0.$$

Dokaz:

(i) Vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(g+h)(x)| f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| f(x) dx$$

pa $(g+h)(X)$ ima očekivanje.

6.4 Matematičko očekivanje; Teorem 5.22; nastavak

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)+h(X)) = \mathbb{E}((g+h)(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty}(g+h)(x)f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(g(x)+h(x))f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty}h(x)f(x)dx \\
&= \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X)).
\end{aligned}$$

6.4 Matematičko očekivanje; Teorem 5.22; nastavak

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)+h(X)) = \mathbb{E}((g+h)(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (g+h)(x)f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (g(x)+h(x))f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx \\
&= \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X)).
\end{aligned}$$

(ii) Imamo

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} af(x)dx \leq \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)dx = b.$$

6.4 Matematičko očekivanje; Teorem 5.22; nastavak

Sada imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X)+h(X)) = \mathbb{E}((g+h)(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty}(g+h)(x)f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(g(x)+h(x))f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx \\ &= \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X)).\end{aligned}$$

(ii) Imamo

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} af(x)dx \leq \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)dx = b.$$

(iii) Ako je $\mathbb{E}(g(X)) = \infty$, tvrdnja slijedi trivijalno.

6.4 Matematičko očekivanje; Teorem 5.22; nastavak

Sada imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X)+h(X)) = \mathbb{E}((g+h)(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty}(g+h)(x)f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(g(x)+h(x))f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty}h(x)f(x)dx \\ &= \mathbb{E}(g(X))+\mathbb{E}(h(X)).\end{aligned}$$

(ii) Imamo

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} af(x)dx \leq \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)dx = b.$$

(iii) Ako je $\mathbb{E}(g(X)) = \infty$, tvrdnja slijedi trivijalno. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}(g(X)) < \infty$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx &\geq \int_{\{x:\, g(x)\geq a\}} g(x)f(x)dx \\ &\geq \int_{\{x:\, g(x)\geq a\}} af(x)dx = a\mathbb{P}(g(X)\geq a),\end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnju.

6.4 Matematičko očekivanje; Čebiševljeva nejednakost

Kao posljedicu Teorema 6.22 imamo Čebiševljevu nejednakost.

6.4 Matematičko očekivanje; Čebiševljeva nejednakost

Kao posljedicu Teorema 6.22 imamo Čebiševljevu nejednakost.

Korolar 5.23 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Pretpostavimo da X ima očekivanje. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a}, \qquad a > 0.$$

6.4 Matematičko očekivanje; Čebiševljeva nejednakost

Kao posljedicu Teorema 6.22 imamo Čebiševljevu nejednakost.

Korolar 5.23 Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Pretpostavimo da X ima očekivanje. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a}, \qquad a > 0.$$

Dokaz: Definirajmo $g(x) := (x - \mathbb{E}(X))^2$, $x \in \mathbb{R}$. Tada, po Teroremu 6.22, imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \mathbb{P}(g(X) \geq a^2) &\leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{a^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.\end{aligned}$$