Poglavlje 8: Centralni granični teoremi i zakoni velikih brojeva

Snježana Lubura Strunjak i Zoran Vondraček

Zagreb, 18. siječnja 2021.

8.1 Centralni granični teorem; Lema 8.1

Lema 8.1 Za $-1/2 \leq x \leq 1$ vrijedi

$$|\log(1+x) - x| \leq 2x^2.$$

Lema 8.1 Za $-1/2 \leq x \leq 1$ vrijedi

$$|\log(1+x) - x| \leq 2x^2.$$

Dokaz: Stavimo

$$f(x) := \log(1+x) - x, \qquad x \in [-1/2, 1].$$

Očito $f(0) = 0$.

8.1 Centralni granični teorem; Lema 8.1

Lema 8.1 Za $-1/2 \leq x \leq 1$ vrijedi

$$|\log(1+x) - x| \leq 2x^2.$$

Dokaz: Stavimo

$$f(x) := \log(1+x) - x, \qquad x \in [-1/2, 1].$$

Očito $f(0) = 0$. Nadalje, po teoremu srednje vrijednosti za svaki $x \in [0,1]$ (svaki $x \in [-1/2, 0]$) postoji $\theta \in [0, x]$ ($\theta \in [x, 0]$) takav da

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\theta)x.$$

8.1 Centralni granični teorem; Lema 8.1

Lema 8.1 Za $-1/2 \le x \le 1$ vrijedi

$$|\log(1+x) - x| \le 2x^2.$$

Dokaz: Stavimo

$$f(x) := \log(1+x) - x, \qquad x \in [-1/2, 1].$$

Očito $f(0) = 0$. Nadalje, po teoremu srednje vrijednosti za svaki $x \in [0,1]$ (svaki $x \in [-1/2, 0]$) postoji $\theta \in [0, x]$ ($\theta \in [x, 0]$) takav da

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\theta)x.$$

Budući da je

$$f'(\theta) = -\frac{\theta}{\theta+1}, \qquad \theta \in [-1/2, 1],$$

zaključujemo da je f nepozitivna te $|f'|$ neopadajuća na $[0,1]$ i nerastuća na $[-1/2, 0]$. Sada za $x \in [0,1]$ imamo

$$|f(x)| = |f'(\theta)|x \le \max_{\theta \in [0,x]} |f'(\theta)|x = \frac{x^2}{x+1} \le x^2,$$

8.1 Centralni granični teorem; Lema 8.1

Lema 8.1 Za $-1/2 \leq x \leq 1$ vrijedi

$$|\log(1+x) - x| \leq 2x^2.$$

Dokaz: Stavimo

$$f(x) := \log(1+x) - x, \qquad x \in [-1/2, 1].$$

Očito $f(0) = 0$. Nadalje, po teoremu srednje vrijednosti za svaki $x \in [0,1]$ (svaki $x \in [-1/2, 0]$) postoji $\theta \in [0, x]$ ($\theta \in [x, 0]$) takav da

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\theta)x.$$

Budući da je

$$f'(\theta) = -\frac{\theta}{\theta + 1}, \qquad \theta \in [-1/2, 1],$$

zaključujemo da je f nepozitivna te $|f'|$ neopadajuća na $[0,1]$ i nerastuća na $[-1/2, 0]$. Sada za $x \in [0,1]$ imamo

$$|f(x)| = |f'(\theta)|x \leq \max_{\theta \in [0,x]} |f'(\theta)|x = \frac{x^2}{x+1} \leq x^2,$$

dok je za $x \in [-1/2, 0]$,

$$|f(x)| = |f'(\theta)||x| \leq \max_{\theta \in [x,0]} |f'(\theta)||x| = \frac{x^2}{x+1} \leq 2x^2.$$

8.1 Centralni granični teorem; Lema 8.2

Lema 8.2 Neka je $a \in \mathbb{R}$ te neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}+a_n\right)^n = e^a.$$

8.1 Centralni granični teorem; Lema 8.2

Lema 8.2 Neka je $a \in \mathbb{R}$ te neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}+a_n\right)^n = e^a.$$

Dokaz: Pokazujemo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{a}{n}+a_n\right) = a.$$

8.1 Centralni granični teorem; Lema 8.2

Lema 8.2 Neka je $a \in \mathbb{R}$ te neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right)^n = e^a.$$

Dokaz: Pokazujemo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) = a.$$

Budući je $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $-1/4 < a_n < 1/4$ i $-1/4 < a/n < 1/4$ za sve $n \geq n_0$. Slijedi da je $-1/2 < a/n + a_n < 1/2$ za sve $n \geq n_0$.

8.1 Centralni granični teorem; Lema 8.2

Lema 8.2 Neka je $a \in \mathbb{R}$ te neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Tada vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}+a_n\right)^n = e^a.$$

Dokaz: Pokazujemo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{a}{n}+a_n\right) = a.$$

Budući je $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $-1/4 < a_n < 1/4$ i $-1/4 < a/n < 1/4$ za sve $n \geq n_0$. Slijedi da je $-1/2 < a/n + a_n < 1/2$ za sve $n \geq n_0$. Po Lemi 8.1, uz $x = a/n + a_n$, za sve $n \geq n_0$ imamo

$$\left|\log\left(1+\frac{a}{n}+a_n\right) - \left(\frac{a}{n}+a_n\right)\right| \leq 2\left(\frac{a}{n}+a_n\right)^2,$$

tj.

$$\left|n\log\left(1+\frac{a}{n}+a_n\right) - (a+na_n)\right| \leq 2n\left(\frac{a}{n}+a_n\right)^2.$$

8.1 Centralni granični teorem; Lema 8.2, nastavak

Zato je

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{n\to\infty} \left| n \log\left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) - a \right| \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \left| n \log\left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) - (a + na_n) \right| + \limsup_{n\to\infty} n|a_n| \\
&\leq 2 \limsup_{n\to\infty} n \left(\frac{a}{n} + a_n\right)^2 \\
&= 2 \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a^2}{n} + 2aa_n + na_n^2\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

8.1 Centralni granični teorem; Lema 8.2, nastavak

Zato je

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{n\to\infty} \left| n \log\left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) - a \right| \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \left| n \log\left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) - (a + n a_n) \right| + \limsup_{n\to\infty} n |a_n| \\
&\leq 2 \limsup_{n\to\infty} n \left(\frac{a}{n} + a_n\right)^2 \\
&= 2 \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a^2}{n} + 2 a a_n + n a_n^2\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) = a.$$

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.3

Teorem 8.3 (Centralni granični teorem) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem μ i zajedničkom varijancom σ^2. Za $n \in \mathbb{N}$, definirajmo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Tada za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.3

Teorem 8.3 (Centralni granični teorem) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem μ i zajedničkom varijancom σ^2. Za $n \in \mathbb{N}$, definirajmo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Tada za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

Drugim riječima, niz $((S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji ka $N(0,1)$.

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.3

Teorem 8.3 (Centralni granični teorem) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem μ i zajedničkom varijancom σ^2. Za $n \in \mathbb{N}$, definirajmo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Tada za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

Drugim riječima, niz $((S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji ka $N(0,1)$.

Dokaz: Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $Y_n := X_n - \mu$. Dakle,

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.3

Teorem 8.3 (Centralni granični teorem) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem μ i zajedničkom varijancom σ^2. Za $n \in \mathbb{N}$, definirajmo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Tada za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x).$$

Drugim riječima, niz $((S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji ka $N(0,1)$.

Dokaz: Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $Y_n := X_n - \mu$. Dakle,

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Dokaz teorema ćemo provesti uz pretpostavku da je funkcija izvodnica momenata $M(t) = \mathbb{E}(e^{tY_1})$ dobro definirana (tj. konačna) za $|t| < \delta$, za neki $\delta > 0$. Uočite da je ta pretpostavka ekvivalentna pretpostavci da je na $(-\delta, \delta)$ dobro definirana funkcija izvodnica momenata slučajne varijable X_1. Budući da su slučajne varijable $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednako distribuirane, vrijedi da je $M(t) = \mathbb{E}(e^{tY_n})$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, neka su $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcije izvodnice momenata od $((S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.3, nastavak

Želimo pokazati da je $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = e^{t^2/2}$ – funkcija izvodnica momenata od $N(0,1)$. Po teoremu neprekidnosti (Teorem 7.17), to povlači traženu konvergenciju po distribuciji.

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.3, nastavak

Želimo pokazati da je $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = e^{t^2/2}$ – funkcija izvodnica momenata od $N(0,1)$. Po teoremu neprekidnosti (Teorem 7.17), to povlači traženu konvergenciju po distribuciji.
Po Teoremu 7.14, za $|t| < \delta\sigma\sqrt{n}$ imamo

$$M_n(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Y_i}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_i}\right) = M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n.$$

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.3, nastavak

Želimo pokazati da je $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = e^{t^2/2}$ – funkcija izvodnica momenata od $N(0,1)$. Po teoremu neprekidnosti (Teorem 7.17), to povlači traženu konvergenciju po distribuciji.
Po Teoremu 7.14, za $|t| < \delta\sigma\sqrt{n}$ imamo

$$M_n(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Y_i}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_i}\right) = M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n.$$

Budući da je

$$\mathbb{E}(Y_1) = 0 \qquad \text{i} \qquad \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathrm{Var}(Y_1) = \sigma^2,$$

za $|t| < \delta\sigma\sqrt{n}$ vrijedi

$$M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^k \mathbb{E}(Y_1^k) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{t^k\mathbb{E}(Y_1^k)}{k!\sigma^k n^{k/2}}.$$

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.3, nastavak

Želimo pokazati da je $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = e^{t^2/2}$ – funkcija izvodnica momenata od $N(0,1)$. Po teoremu neprekidnosti (Teorem 7.17), to povlači traženu konvergenciju po distribuciji.
Po Teoremu 7.14, za $|t| < \delta\sigma\sqrt{n}$ imamo

$$M_n(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Y_i}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}Y_i}\right) = M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n.$$

Budući da je

$$\mathbb{E}(Y_1) = 0 \qquad \text{i} \qquad \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathrm{Var}(Y_1) = \sigma^2,$$

za $|t| < \delta\sigma\sqrt{n}$ vrijedi

$$M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^k \mathbb{E}(Y_1^k) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \sum_{k=3}^\infty \frac{t^k \mathbb{E}(Y_1^k)}{k!\sigma^k n^{k/2}}.$$

Stavimo sada

$$a_n(t) := \sum_{k=3}^\infty \frac{t^k \mathbb{E}(Y_1^k)}{k!\sigma^k n^{k/2-3/2}}, \qquad |t| < \delta\sigma\sqrt{n}.$$

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.3, nastavak

Želimo pokazati da je $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = e^{t^2/2}$ – funkcija izvodnica momenata od $N(0,1)$. Po teoremu neprekidnosti (Teorem 7.17), to povlači traženu konvergenciju po distribuciji.
Po Teoremu 7.14, za $|t| < \delta\sigma\sqrt{n}$ imamo

$$M_n(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Y_i}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_i}\right) = M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n.$$

Budući da je

$$\mathbb{E}(Y_1) = 0 \qquad \text{i} \qquad \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathrm{Var}(Y_1) = \sigma^2,$$

za $|t| < \delta\sigma\sqrt{n}$ vrijedi

$$M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^k \mathbb{E}(Y_1^k) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k \mathbb{E}(Y_1^k)}{k!\sigma^k n^{k/2}}.$$

Stavimo sada

$$a_n(t) := \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k \mathbb{E}(Y_1^k)}{k!\sigma^k n^{k/2-3/2}}, \qquad |t| < \delta\sigma\sqrt{n}.$$

Dakle,

$$M_n(t) = M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{a_n(t)}{n^{3/2}}\right)^n.$$

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.3, nastavak

Budući da je

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{a_n(t)}{n^{3/2}} = 0, \qquad |t| < \delta,$$

po Lemi 8.2 zaključujemo

$$\lim_{n\to\infty} M_n(t) = e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad |t| < \delta,$$

što po Teoremu 7.17 dokazuje tvrdnju.

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.4

Kao izravnu posljedicu Teorema 8.3 imamo tzv. *de Moivre-Laplaceov teorem* (aproksimacija binomne slučajne varijable normalnom) . Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $X_n \sim B(n,p)$, $0 < p < 1$. Vrijedi $\mathbb{E}(X_n) = np$, $\mathrm{Var}(X_n) = npq$ i $\sigma(X_n) = \sqrt{npq}$. Nadalje, definirajmo

$$Y_n := \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sigma(X_n)} = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

8.1 Centralni granični teorem; Teorem 8.4

Kao izravnu posljedicu Teorema 8.3 imamo tzv. *de Moivre-Laplaceov teorem* (aproksimacija binomne slučajne varijable normalnom) . Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $X_n \sim B(n, p)$, $0 < p < 1$. Vrijedi $\mathbb{E}(X_n) = np$, $\mathrm{Var}(X_n) = npq$ i $\sigma(X_n) = \sqrt{npq}$. Nadalje, definirajmo

$$Y_n := \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sigma(X_n)} = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Teorem 8.4 (de Moivre-Laplaceov teorem) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \Phi(x).$$

Dokaz: Neka je $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom $p \in (0, 1)$. Tada po Propoziciji 5.27 X_n ima jednaku distribuciju kao $Z_1 + \cdots + Z_n$ pa tvrdnja slijedi izravno iz Teorema 8.3.

8.1 Centralni granični teorem; Primjer 8.5

Primjer 8.5 Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Želimo približno odrediti $\mathbb{P}(a < X_n \leq b)$, gdje je $X_n \sim B(n, p)$ za $n \in \mathbb{N}$ velik i $0 < p < 1$. Znamo da je točna vrijednost

$$\mathbb{P}(a < X_n \leq b) = \sum_{a < k \leq b} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Odredimo približnu vrijednost primjenom de Moivre-Laplaceovog teorema. Imamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < X_n \leq b) &= \mathbb{P}\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < Y_n \leq \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Y_n \leq \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \mathbb{P}\left(Y_n \leq \frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right).
\end{aligned}$$

8.2 Zakoni velikih brojeva

Definicija 8.6 Za niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da *konvergira po vjerojatnosti* slučajnoj varijabli X ako za svako $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

Oznaka je $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

8.2 Zakoni velikih brojeva

Definicija 8.6 Za niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da *konvergira po vjerojatnosti* slučajnoj varijabli X ako za svako $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

Oznaka je $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
Niz slučajnih vrijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira gotovo sigurno* slučajnoj varijabli X ako

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

Oznaka je $X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X$.

Definicija 8.6 Za niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da *konvergira po vjerojatnosti* slučajnoj varijabli X ako za svako $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

Oznaka je $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
Niz slučajnih vrijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira gotovo sigurno* slučajnoj varijabli X ako

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

Oznaka je $X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X$.

Pokazat ćemo kasnije (vidi Teorem 8.11) da konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po vjerojatnosti.

8.2 Zakoni velikih brojeva; slabi zakon

Teorem 8.7 (Slabi zakon velikih brojeva) Neka je $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ i $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

8.2 Zakoni velikih brojeva; slabi zakon

Teorem 8.7 (Slabi zakon velikih brojeva) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ i $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Dokaz: Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Vrijedi $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ i, zbog nezavisnosti, $\mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2$.

8.2 Zakoni velikih brojeva; slabi zakon

Teorem 8.7 (Slabi zakon velikih brojeva) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ i $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Dokaz: Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Vrijedi $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ i, zbog nezavisnosti, $\mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2$. Sada, primjenom Čebiševljeve nejednakosti, imamo

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

što teži u 0 kada n teži u ∞.

8.2 Zakoni velikih brojeva; slabi zakon

Teorem 8.7 (Slabi zakon velikih brojeva) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}(X_n)=\mu$ i $\mathrm{Var}(X_n)=\sigma^2$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Tada

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\xrightarrow{\mathbb{P}}\mu.$$

Dokaz: Za $n\in\mathbb{N}$ stavimo $S_n:=X_1+\cdots+X_n$. Vrijedi $\mathbb{E}(S_n)=n\mu$ i, zbog nezavisnosti, $\mathrm{Var}(S_n)=n\sigma^2$. Sada, primjenom Čebiševljeve nejednakosti, imamo

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right)\le\frac{\mathrm{Var}(S_n/n)}{\varepsilon^2}=\frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

što teži u 0 kada n teži u ∞.

Tvrdnja gornjeg teorema vrijedi i uz sljedeću pretpostavku: neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa (konačnim) zajedničkim očekivanjem $\mathbb{E}(X_n)=\mu$. Tada $S_n/n\xrightarrow{\mathbb{P}}\mu$. Taj rezultat poznat je pod imenom *Hinčinov slabi zakon velikih brojeva*.

Lema 8.9 Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}(|X|^m) < \infty$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ za sve $n \leq m$, $n \in \mathbb{N}$.

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Lema 8.9 Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}(|X|^m) < \infty$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ za sve $n \leq m$, $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Uočimo prvo da je $\mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^m) \leq \mathbb{E}(|X|^m) < \infty$. Slijedi da je za $n \leq m$,

$$\mathbb{E}(|X|^n) = \mathbb{E}(1_{\{|X|\leq 1\}}|X|^n) + \mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^n) \leq 1 + \mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^m) < \infty .$$

Lema 8.9 Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}(|X|^m) < \infty$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ za sve $n \leq m$, $n \in \mathbb{N}$.
Dokaz: Uočimo prvo da je $\mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^m) \leq \mathbb{E}(|X|^m) < \infty$. Slijedi da je za $n \leq m$,

$$\mathbb{E}(|X|^n) = \mathbb{E}(1_{\{|X|\leq 1\}}|X|^n) + \mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^n) \leq 1 + \mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^m) < \infty .$$

Teorem 8.10 (Jaki zakon velikih brojeva) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}(X_n) = \mu$. Tada

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{g.s.}} \mu.$$

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Lema 8.9 Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}(|X|^m) < \infty$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ za sve $n \leq m$, $n \in \mathbb{N}$.
Dokaz: Uočimo prvo da je $\mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^m) \leq \mathbb{E}(|X|^m) < \infty$. Slijedi da je za $n \leq m$,

$$\mathbb{E}(|X|^n) = \mathbb{E}(1_{\{|X|\leq 1\}}|X|^n) + \mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^n) \leq 1 + \mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^m) < \infty\,.$$

Teorem 8.10 (Jaki zakon velikih brojeva) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}(X_n) = \mu$. Tada

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\text{g.s.}} \mu.$$

Dokaz: Dokaz provodimo samo za slučaj kada je $\mathbb{E}(X_1^4) = K < \infty$. Pretpostavimo prvo da je $\mu = 0$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Računamo

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)).$$

Kada razvijemo desnu stranu dobit ćemo članove sljedećeg tipa: X_i^4, $X_i^3 X_j$, $X_i^2 X_j^2$, $X_i^2 X_j X_k$ i $X_i X_j X_k X_l$.

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Računamo

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)).$$

Kada razvijemo desnu stranu dobit ćemo članove sljedećeg tipa: X_i^4, $X_i^3 X_j$, $X_i^2 X_j^2$, $X_i^2 X_j X_k$ i $X_i X_j X_k X_l$. Zbog nezavisnosti imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i^3 X_j) &= \mathbb{E}(X_i^3)\mathbb{E}(X_j) = 0 \\
\mathbb{E}(X_i^2 X_j X_k) &= \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k) = 0 \\
\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) &= \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l) = 0.
\end{aligned}$$

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Računamo

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)).$$

Kada razvijemo desnu stranu dobit ćemo članove sljedećeg tipa: X_i^4, $X_i^3 X_j$, $X_i^2 X_j^2$, $X_i^2 X_j X_k$ i $X_i X_j X_k X_l$. Zbog nezavisnosti imamo

$$\mathbb{E}(X_i^3 X_j) = \mathbb{E}(X_i^3)\mathbb{E}(X_j) = 0$$
$$\mathbb{E}(X_i^2 X_j X_k) = \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k) = 0$$
$$\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l) = 0.$$

Nadalje, za dani i imat ćemo $\binom{4}{4} = 1$ članova oblika X_i^4 te za dani par $i \neq j$ imat ćemo $\binom{4}{2} = 6$ članova oblika $X_i^2 X_j^2$.

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Računamo

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)).$$

Kada razvijemo desnu stranu dobit ćemo članove sljedećeg tipa: X_i^4, $X_i^3 X_j$, $X_i^2 X_j^2$, $X_i^2 X_j X_k$ i $X_i X_j X_k X_l$. Zbog nezavisnosti imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i^3 X_j) &= \mathbb{E}(X_i^3)\mathbb{E}(X_j) = 0 \\
\mathbb{E}(X_i^2 X_j X_k) &= \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k) = 0 \\
\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) &= \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l) = 0.
\end{aligned}$$

Nadalje, za dani i imat ćemo $\binom{4}{4} = 1$ članova oblika X_i^4 te za dani par $i \neq j$ imat ćemo $\binom{4}{2} = 6$ članova oblika $X_i^2 X_j^2$. Dakle,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^4) &= n\mathbb{E}(X_i^4) + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) = nK + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j^2) \\
&= nK + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_1^2)^2.
\end{aligned}$$

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Računamo

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)).$$

Kada razvijemo desnu stranu dobit ćemo članove sljedećeg tipa: X_i^4, $X_i^3 X_j$, $X_i^2 X_j^2$, $X_i^2 X_j X_k$ i $X_i X_j X_k X_l$. Zbog nezavisnosti imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i^3 X_j) &= \mathbb{E}(X_i^3)\mathbb{E}(X_j) = 0 \\
\mathbb{E}(X_i^2 X_j X_k) &= \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k) = 0 \\
\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) &= \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l) = 0.
\end{aligned}$$

Nadalje, za dani i imat ćemo $\binom{4}{4} = 1$ članova oblika X_i^4 te za dani par $i \neq j$ imat ćemo $\binom{4}{2} = 6$ članova oblika $X_i^2 X_j^2$. Dakle,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^4) &= n\mathbb{E}(X_i^4) + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) = nK + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j^2) \\
&= nK + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_1^2)^2.
\end{aligned}$$

Iz

$$0 \leq \mathrm{Var}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_1^4) - \mathbb{E}(X_1^2)^2$$

zaključujemo da je

$$\mathbb{E}(X_1^2)^2 \leq K.$$

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Računamo

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)).$$

Kada razvijemo desnu stranu dobit ćemo članove sljedećeg tipa: X_i^4, $X_i^3 X_j$, $X_i^2 X_j^2$, $X_i^2 X_j X_k$ i $X_i X_j X_k X_l$. Zbog nezavisnosti imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i^3 X_j) &= \mathbb{E}(X_i^3)\mathbb{E}(X_j) = 0 \\
\mathbb{E}(X_i^2 X_j X_k) &= \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k) = 0 \\
\mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) &= \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l) = 0.
\end{aligned}$$

Nadalje, za dani i imat ćemo $\binom{4}{4} = 1$ članova oblika X_i^4 te za dani par $i \neq j$ imat ćemo $\binom{4}{2} = 6$ članova oblika $X_i^2 X_j^2$. Dakle,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^4) &= n\mathbb{E}(X_i^4) + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) = nK + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j^2) \\
&= nK + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_1^2)^2.
\end{aligned}$$

Iz

$$0 \leq \mathrm{Var}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_1^4) - \mathbb{E}(X_1^2)^2$$

zaključujemo da je

$$\mathbb{E}(X_1^2)^2 \leq K.$$

Dakle,

$$\mathbb{E}(S_n^4) \leq nK + 3n(n-1)K.$$

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Podijelimo s n^4 i dobivamo

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n^4}{n^4}\right) \le \frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Podijelimo s n^4 i dobivamo

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n^4}{n^4}\right) \leq \frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sada zaključujemo

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4}\right) \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{S_n^4}{n^4}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}\right) < \infty.$$

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Podijelimo s n^4 i dobivamo

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n^4}{n^4}\right) \leq \frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sada zaključujemo

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4}\right) \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{S_n^4}{n^4}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}\right) < \infty.$$

Specijalno, imamo

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4} < \infty\right) = 1,$$

iz čega zaključujemo da je

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^4}{n^4} = 0\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right) = 1.$$

8.2 Zakoni velikih brojeva; jaki zakon

Podijelimo s n^4 i dobivamo

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n^4}{n^4}\right) \leq \frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sada zaključujemo

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4}\right) \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{S_n^4}{n^4}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}\right) < \infty.$$

Specijalno, imamo

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4} < \infty\right) = 1,$$

iz čega zaključujemo da je

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^4}{n^4} = 0\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right) = 1.$$

Neka je sada $\mu \in \mathbb{R}$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $Y_n := X_n - \mu$. Tada je $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takav da $\mathbb{E}(Y_n) = 0$. Primjenom gornjeg dokaza zaključujemo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) &= \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{(X_1 - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)}{n} = 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} = 0\right) = 1.\end{aligned}$$

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti

U ovom odjeljku diskutiramo vrste konvergencija slučajnih varijabli i njihov odnos. U sljedećem teoremu opravdavamo nazive “jaki” i “slabi” zakon velikih brojeva.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti

U ovom odjeljku diskutiramo vrste konvergencija slučajnih varijabli i njihov odnos. U sljedećem teoremu opravdavamo nazive "jaki" i "slabi" zakon velikih brojeva.

Teorem 8.11 Konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po vjerojatnosti.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti

U ovom odjeljku diskutiramo vrste konvergencija slučajnih varijabli i njihov odnos. U sljedećem teoremu opravdavamo nazive "jaki" i "slabi" zakon velikih brojeva.

Teorem 8.11 Konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po vjerojatnosti.

Dokaz: Neka niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira gotovo sigurno prema slučajnoj varijabli X. Sve slučajne varijable definirane su na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti

U ovom odjeljku diskutiramo vrste konvergencija slučajnih varijabli i njihov odnos. U sljedećem teoremu opravdavamo nazive "jaki" i "slabi" zakon velikih brojeva.

Teorem 8.11 Konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po vjerojatnosti.

Dokaz: Neka niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira gotovo sigurno prema slučajnoj varijabli X. Sve slučajne varijable definirane su na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i, za $n \in \mathbb{N}$, definirajmo $A_n(\varepsilon) := \{|X_n - X| > \varepsilon\}$. Očito, $A_n(\varepsilon) \in \mathcal{F}$ za $n \in \mathbb{N}$.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti

U ovom odjeljku diskutiramo vrste konvergencija slučajnih varijabli i njihov odnos. U sljedećem teoremu opravdavamo nazive "jaki" i "slabi" zakon velikih brojeva.

Teorem 8.11 Konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po vjerojatnosti.

Dokaz: Neka niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira gotovo sigurno prema slučajnoj varijabli X. Sve slučajne varijable definirane su na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i, za $n \in \mathbb{N}$, definirajmo $A_n(\varepsilon) := \{|X_n - X| > \varepsilon\}$. Očito, $A_n(\varepsilon) \in \mathcal{F}$ za $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $B_n(\varepsilon) := \cup_{k\geq n} A_k(\varepsilon)$ i

$$B(\varepsilon) := \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n(\varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon \text{ b.m.p.}\}.$$

Budući da $X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X$, zaključujemo da $\mathbb{P}(B(\varepsilon)) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti

U ovom odjeljku diskutiramo vrste konvergencija slučajnih varijabli i njihov odnos. U sljedećem teoremu opravdavamo nazive "jaki" i "slabi" zakon velikih brojeva.

Teorem 8.11 Konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po vjerojatnosti.

Dokaz: Neka niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira gotovo sigurno prema slučajnoj varijabli X. Sve slučajne varijable definirane su na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i, za $n \in \mathbb{N}$, definirajmo $A_n(\varepsilon) := \{|X_n - X| > \varepsilon\}$. Očito, $A_n(\varepsilon) \in \mathcal{F}$ za $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $B_n(\varepsilon) := \cup_{k\geq n} A_k(\varepsilon)$ i

$$B(\varepsilon) := \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n(\varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon \text{ b.m.p.}\}.$$

Budući da $X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X$, zaključujemo da $\mathbb{P}(B(\varepsilon)) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$. Specijalno, zbog neprekidnosti vjerojatnosti s obzirom na nerastuće nizove događaja, imamo $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$. Međutim, kako je $A_n(\varepsilon) \subseteq B_n(\varepsilon)$ za $n \in \mathbb{N}$, imamo $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$, tj. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti

Napomenimo da općenito konvergencija gotovo sigurno i po vjerojatnosti nisu ekvivalentne. Naime, neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti

Napomenimo da općenito konvergencija gotovo sigurno i po vjerojatnosti nisu ekvivalentne. Naime, neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pretpostavimo, nadalje, da je

$$X_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 1/n & 1/n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Imamo,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon,\, X_n = 1) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \varepsilon \leq 1 \\ 0, & \varepsilon > 1, \end{cases}$$

što pokazuje da $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti

Napomenimo da općenito konvergencija gotovo sigurno i po vjerojatnosti nisu ekvivalentne. Naime, neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pretpostavimo, nadalje, da je

$$X_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 1/n & 1/n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Imamo,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon,\, X_n = 1) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \varepsilon \le 1 \\ 0, & \varepsilon > 1, \end{cases}$$

što pokazuje da $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Kada bi niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergirao gotovo sigurno, onda bi zbog Teorema 8.11 konvergirao g.s prema nuli. Pokažimo da je to nemoguće.

Napomenimo da općenito konvergencija gotovo sigurno i po vjerojatnosti nisu ekvivalentne. Naime, neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pretpostavimo, nadalje, da je

$$X_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-1/n & 1/n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Imamo,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon,\, X_n = 1) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \varepsilon \leq 1 \\ 0, & \varepsilon > 1, \end{cases}$$

što pokazuje da $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Kada bi niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergirao gotovo sigurno, onda bi zbog Teorema 8.11 konvergirao g.s prema nuli. Pokažimo da je to nemoguće. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $A_n := \{X_n > 1/2\}$. Tada imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Sada Lema 2.17 (Borel-Cantelli) implicira da

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1,$$

tj. $X_n > 1/2$ za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ na događaju vjerojatnosti 1. To pokazuje da $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira prema 0 gotovo sigurno,

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti; Teorem 8.12

Konvergencija po distribuciji najslabija je od tri konvergencije koje smo spomenuli u ovom kolegiju.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti; Teorem 8.12

Konvergencija po distribuciji najslabija je od tri konvergencije koje smo spomenuli u ovom kolegiju.

Teorem 8.12 Konvergencija po vjerojatnosti povlači konvergenciju po distribuciji.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti; Teorem 8.12

Konvergencija po distribuciji najslabija je od tri konvergencije koje smo spomenuli u ovom kolegiju.

Teorem 8.12 Konvergencija po vjerojatnosti povlači konvergenciju po distribuciji.

Dokaz: Neka niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po vjerojatnosti prema slučajnoj varijabli X, koje su definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Označimo s $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i F, redom, funkcije distribucije od $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i X. Neka je $x \in C_F$. Tada, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) &= \mathbb{P}(X_n \leq x,\, X \leq x+\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq x,\, X > x+\varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(X \leq x+\varepsilon) + \mathbb{P}(X - X_n > \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(X \leq x+\varepsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Dakle,

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x+\varepsilon).$$

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti; Teorem 8.12

S druge strane,

$$\begin{aligned}
F(x-\varepsilon) &= \mathbb{P}(X \leq x-\varepsilon) \\
&= \mathbb{P}(X \leq x-\varepsilon,\, X_n \leq x) + \mathbb{P}(X \leq x-\varepsilon,\, X_n > x) \\
&\leq \mathbb{P}(X_n \leq x) + \mathbb{P}(X_n - X > \varepsilon) \\
&\leq \mathbb{P}(X_n \leq x) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon).
\end{aligned}$$

S druge strane,

$$\begin{aligned} F(x-\varepsilon) &= \mathbb{P}(X \leq x-\varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x-\varepsilon,\, X_n \leq x) + \mathbb{P}(X \leq x-\varepsilon,\, X_n > x) \\ &\leq \mathbb{P}(X_n \leq x) + \mathbb{P}(X_n - X > \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(X_n \leq x) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Sada imamo,

$$F(x-\varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x).$$

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti; Teorem 8.12

S druge strane,

$$\begin{aligned} F(x-\varepsilon) &= \mathbb{P}(X \le x-\varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(X \le x-\varepsilon,\, X_n \le x) + \mathbb{P}(X \le x-\varepsilon,\, X_n > x) \\ &\le \mathbb{P}(X_n \le x) + \mathbb{P}(X_n - X > \varepsilon) \\ &\le \mathbb{P}(X_n \le x) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Sada imamo,

$$F(x-\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x).$$

Konačno, kako je

$$F(x-\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F(x+\varepsilon),$$

puštajući ε u 0 i uzimajući u obzir da je F neprekidna u x slijedi tvrdnja.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti; Teorem 8.13

Kao i u slučaju konvergencija gotovo sigurno i po vjerojatnosti, konvergencije po vjerojatnosti i po distribuciji nisu ekvivalentne. Neka je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

te neka je $X_n = X$ za $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, stavimo $Y = 1 - X$. Očito $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji ka Y. S druge strane za $n \in \mathbb{N}$ i $0 < \varepsilon < 1$ imamo

$$\mathbb{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|2X - 1| > \varepsilon) = 1.$$

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti; Teorem 8.13

Kao i u slučaju konvergencija gotovo sigurno i po vjerojatnosti, konvergencije po vjerojatnosti i po distribuciji nisu ekvivalentne. Neka je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

te neka je $X_n = X$ za $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, stavimo $Y = 1 - X$. Očito $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji ka Y. S druge strane za $n \in \mathbb{N}$ i $0 < \varepsilon < 1$ imamo

$$\mathbb{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|2X - 1| > \varepsilon) = 1.$$

Teorem 8.13 Neka niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, konvergira po distribuciji ka $c \in \mathbb{R}$. Tada, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti; Teorem 8.13

Dokaz: Označimo s $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i F, redom, funkcije distribucije od $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i c. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti; Teorem 8.13

Dokaz: Označimo s $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i F, redom, funkcije distribucije od $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i c. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n > c + \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n < c - \varepsilon) \\
&\leq 1 - \mathbb{P}\left(X_n \leq c + \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(X_n \leq c - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= 1 - F_n(c + \varepsilon) + F_n\left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right).
\end{aligned}$$

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti; Teorem 8.13

Dokaz: Označimo s $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i F, redom, funkcije distribucije od $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i c. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n > c+\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n < c-\varepsilon) \\
&\leq 1 - \mathbb{P}\left(X_n \leq c+\varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(X_n \leq c - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= 1 - F_n(c+\varepsilon) + F_n\left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right).
\end{aligned}$$

Budući da su $c+\varepsilon$ i $c-\varepsilon/2$ točke neprekidnosti od F (jedina točka prekida od F je c – $F = 1_{[c,\infty)}$), iz pretpostavke da $(X_n)_{n\geq 1}$ konvergira po distribuciji prema c slijedi $\lim_{n\to\infty} F_n(c+\varepsilon) = F(c+\varepsilon) = 1$ te $\lim_{n\to\infty} F_n(c-\varepsilon/2) = F(c-\varepsilon/2) = 0$.

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti; Teorem 8.13

Dokaz: Označimo s $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i F, redom, funkcije distribucije od $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i c. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n > c + \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n < c - \varepsilon)\\ &\le 1 - \mathbb{P}\left(X_n \le c + \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(X_n \le c - \frac{\varepsilon}{2}\right)\\ &= 1 - F_n(c + \varepsilon) + F_n\left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right).\end{aligned}$$

Budući da su $c + \varepsilon$ i $c - \varepsilon/2$ točke neprekidnosti od F (jedina točka prekida od F je c – $F = 1_{[c,\infty)}$), iz pretpostavke da $(X_n)_{n\ge 1}$ konvergira po distribuciji prema c slijedi $\lim_{n\to\infty} F_n(c + \varepsilon) = F(c + \varepsilon) = 1$ te $\lim_{n\to\infty} F_n(c - \varepsilon/2) = F(c - \varepsilon/2) = 0$. Zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) \le \lim_{n\to\infty} 1 - F_n(c + \varepsilon) + F_n\left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$