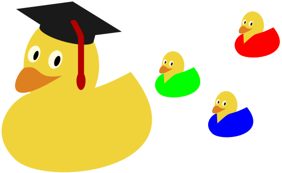
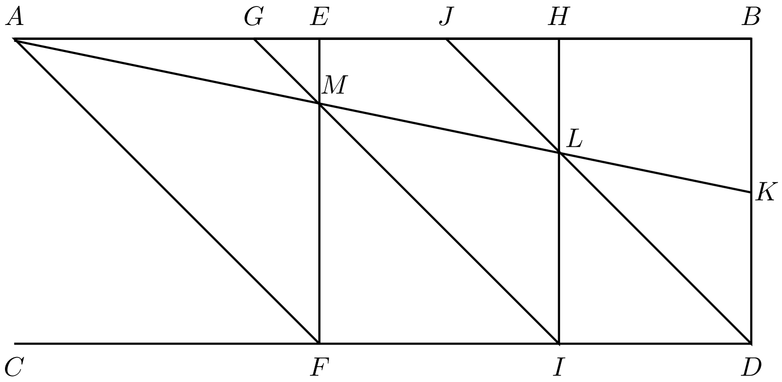
4. tjedan nastave: Klasični helenizam nakon Euklida

Franka Miriam Brückler



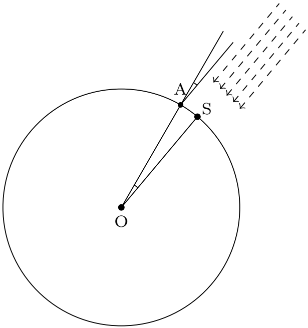
Eratosten iz Kirene (ca. 275.–195. pr. Kr.)

mezolabij



$$|DK| : |IL| = |IL| : |FM| = |FM| : (2|DK|)$$

Eratostenovo određivanje opsega Zemlje



$$\alpha \approx \frac{1}{50} \cdot 2\pi \approx 7,2^\circ$$

$$O = 50 d_{A,S} = 50 \cdot 5000 \, \text{stadija} = 250000 \, \text{stadija}$$

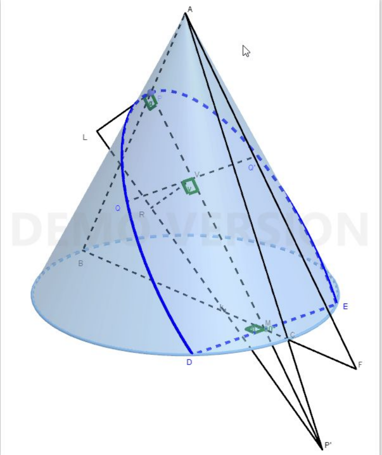
Apolonije iz Perge (ca. 262.–190. pr. Kr.)

- potpuna teorija konika;
- jedan (može i kosi stožac) — elipsa, parabola, hiperbola;

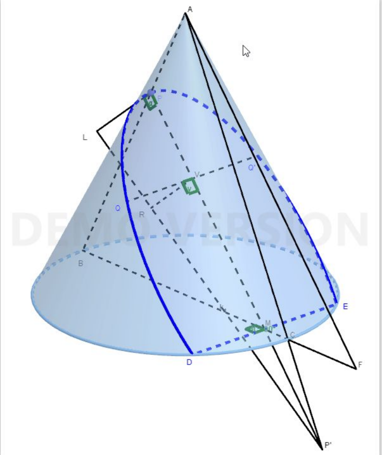
Apolonije iz Perge (ca. 262.–190. pr. Kr.)

- potpuna teorija konika;
- jedan (može i kosi stožac)— elipsa, parabola, hiperbola;
- glavno djelo: *Konike* u 8 knjiga
- I: nastanak konika i njihova osnovna svojstva; II: osi, tangente i asimptote; III: fokusi, pol i polara; IV: presjeci dvije konike; V: normale i središta zakrivljenosti; VI: sličnost konika; VII: svojstva konjugiranih promjera.
- geometrijska algebra

Apolonijeva karakterizacija tri tipa konika

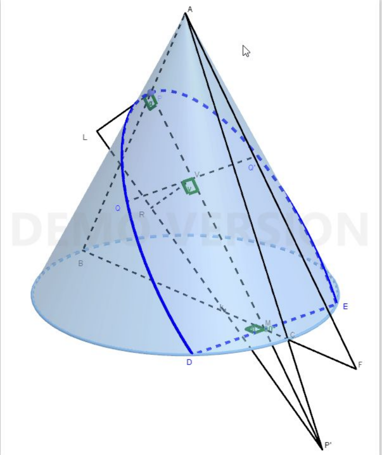


Apolonijeva karakterizacija tri tipa konika



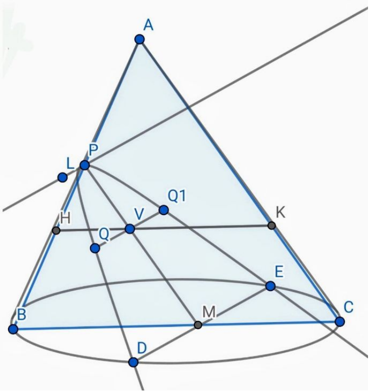
PM raspolavlja svaku tetivu konike paralelnu s *DE*;

Apolonijeva karakterizacija tri tipa konika



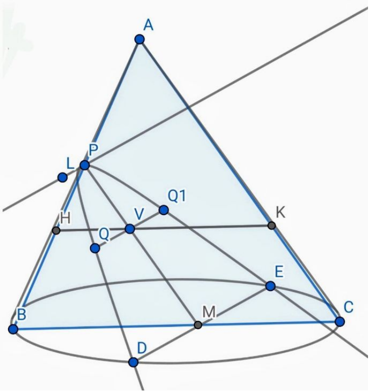
PM raspolavlja svaku tetivu konike paralelnu s *DE*;
$|QV|^2 = |HV| \cdot |VK|$

Apolonijeva karakterizacija parabole



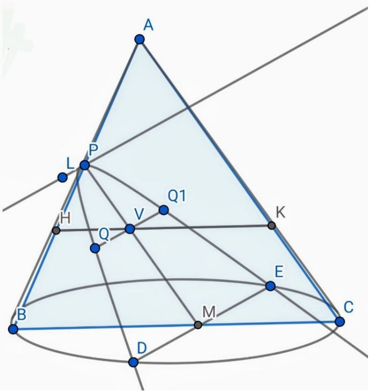
$$|PL| : |PA| = |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|);$$

Apolonijeva karakterizacija parabole



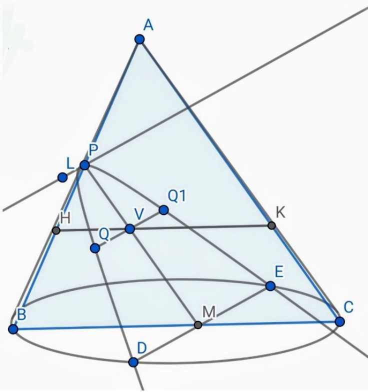
$$|PL| : |PA| = |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|);\ |VK| : |PA| = |BC| : |BA|;$$

Apolonijeva karakterizacija parabole



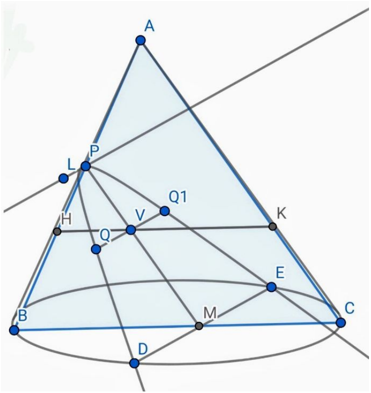
$|PL| : |PA| = |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|)$; $|VK| : |PA| = |BC| : |BA|$;
$|HV| : |PV| = |BC| : |AC|$

Apolonijeva karakterizacija parabole



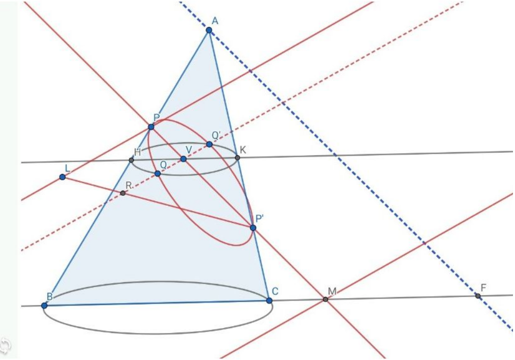
$|PL| : |PA| = |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|)$; $|VK| : |PA| = |BC| : |BA|$;
$|HV| : |PV| = |BC| : |AC| \Rightarrow |QV|^2 : (|PV| \cdot |PA|) = (|PL| \cdot |PV|) : (|PA| \cdot |PV|)$

Apolonijeva karakterizacija parabole



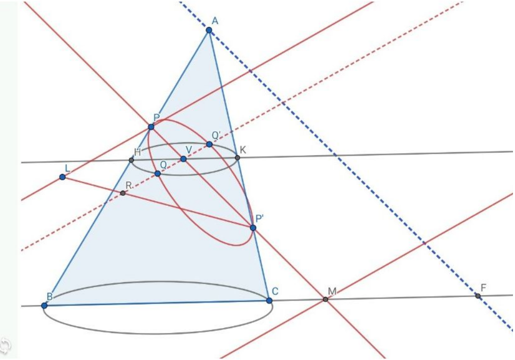
$|PL|:|PA| = |BC|^2 : (|BA|\cdot|AC|)$; $|VK|:|PA| = |BC|:|BA|$; $|HV|:|PV| = |BC|:|AC| \Rightarrow |QV|^2 : (|PV|\cdot|PA|) = (|PL|\cdot|PV|) : (|PA|\cdot|PV|) \Rightarrow |QV|^2 = |PL|\cdot|PV|$.

Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole



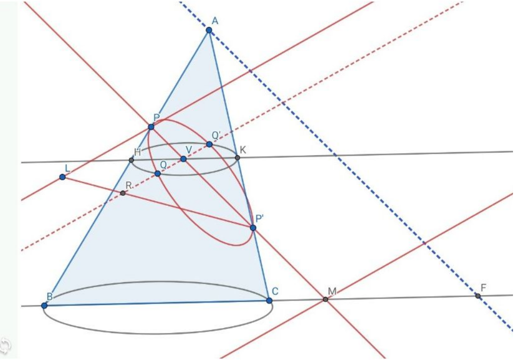
$$|PL| : |PP'| = (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2;$$

Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole



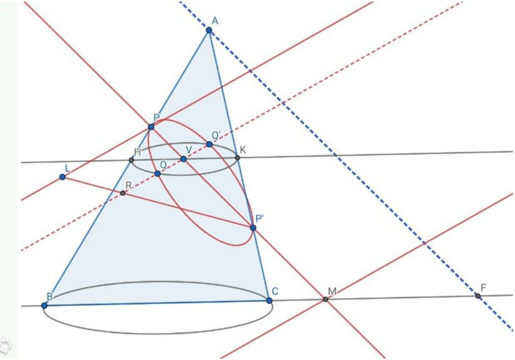
$$|PL| : |PP'| = (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2; \ |VK| : |P'V| = |FC| : |FA|;$$

Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole



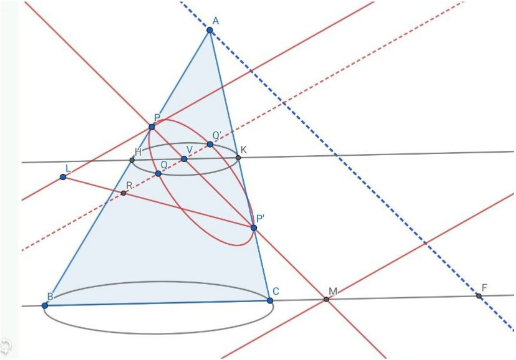
$|PL|:|PP'| = (|BF|\cdot|FC|):|AF|^2$; $|VK|:|P'V| = |FC|:|FA|$;
$|HV|:|PV| = |BF|:|AF|$

Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole



$$|PL| : |PP'| = (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2; \ |VK| : |P'V| = |FC| : |FA|;$$
$$|HV| : |PV| = |BF| : |AF| \Rightarrow |QV|^2 : (|PV| \cdot |P'V|) =$$
$$(|RV| \cdot |PV|) : (|P'V| \cdot |PV|)$$

Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole



$$|PL| : |PP'| = (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2;\ |VK| : |P'V| = |FC| : |FA|;$$
$$|HV| : |PV| = |BF| : |AF| \Rightarrow |QV|^2 : (|PV| \cdot |P'V|) =$$
$$(|RV| \cdot |PV|) : (|P'V| \cdot |PV|) \Rightarrow |QV|^2 = |RV| \cdot |PV|.$$

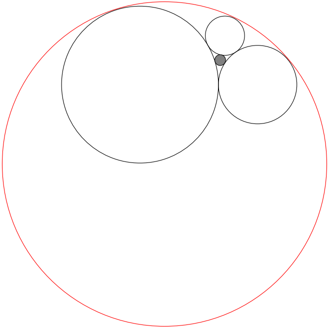
Apolonijev problem

Za dane tri kružnice u ravnini (dozvoljeni su polumjeri 0 i ∞!) treba konstruirati kružnice koje ih sve tri diraju.

Apolonijev problem

Za dane tri kružnice u ravnini (dozvoljeni su polumjeri 0 i ∞!) treba konstruirati kružnice koje ih sve tri diraju.

Imamo $\boxed{\text{10 mogućih slučajeva}}$.



Apolonijeve kružnice

Teorem (Apolonijeva definicija kružnice)

Ako su dane dvije točke A i B u ravnini, onda je geometrijsko mjesto svih točaka T u toj ravnini za koje je omjer $|AP| : |BP|$ konstantan kružnica sa središtem na pravcu AB.

Apolonijeve kružnice

Teorem (Apolonijeva definicija kružnice)

Ako su dane dvije točke A i B u ravnini, onda je geometrijsko mjesto svih točaka T u toj ravnini za koje je omjer $|AP| : |BP|$ konstantan kružnica sa središtem na pravcu AB.

Familija svih kružnica određenih raznim omjerima za fiksne A i B i familija svih kružnica koje prolaze kroz A i B su međusobno $\boxed{\text{ortogonalne}}$.

Apolonijeve kružnice

Teorem (Apolonijeva definicija kružnice)

Ako su dane dvije točke A i B u ravnini, onda je geometrijsko mjesto svih točaka T u toj ravnini za koje je omjer $|AP| : |BP|$ konstantan kružnica sa središtem na pravcu AB.

Familija svih kružnica određenih raznim omjerima za fiksne A i B i familija svih kružnica koje prolaze kroz A i B su međusobno $\boxed{\text{ortogonalne}}$.
Također, Apolonijeva kružnica je naziv i za kružnicu koja izvana dodiruje sve tri pripisane kružnice trokuta.

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov *Palimpsest*?

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov *Palimpsest*? *Metoda mehaničkih teorema*, *Stomahion*.

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov *Palimpsest*? *Metoda mehaničkih teorema*, *Stomahion*. U *O ravnoteži ravninskih likova*: princip poluge; težište paralelograma i trokuta.

$\boxed{\text{Arhimed iz Sirakuze}}$ (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov $\boxed{\textit{Palimpsest}}$? *Metoda mehaničkih teorema*, $\boxed{\textit{Stomahion}}$. U *O ravnoteži ravninskih likova*: princip poluge; težište paralelograma i trokuta.
Pješćanik: 10^4 = mirijada;

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov *Palimpsest*? *Metoda mehaničkih teorema*, *Stomahion*. U *O ravnoteži ravninskih likova*: princip poluge; težište paralelograma i trokuta.

Pješćanik: $10^4 =$ mirijada; do mirijade mirijada (10^8) brojevi prvog reda, a 10^8 je jedinica drugog reda;

$\boxed{\text{Arhimed iz Sirakuze}}$ (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov $\boxed{\textit{Palimpsest}}$? *Metoda mehaničkih teorema*, $\boxed{\textit{Stomahion}}$. U *O ravnoteži ravninskih likova*: princip poluge; težište paralelograma i trokuta.
Pješćanik: $10^4 =$ mirijada; do mirijade mirijada (10^8) brojevi prvog reda, a 10^8 je jedinica drugog reda; mirijada mirijada tih jedinica je jedinica trećeg reda i t.d.; do $P = (10^8)^(10^8)$ su brojevi prve periode, a P je jedinica druge periode;

$\boxed{\text{Arhimed iz Sirakuze}}$ (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov $\boxed{\textit{Palimpsest}}$? *Metoda mehaničkih teorema*, $\boxed{\textit{Stomahion}}$. U *O ravnoteži ravninskih likova*: princip poluge; težište paralelograma i trokuta.

Pješćanik: 10^4 = mirijada; do mirijade mirijada (10^8) brojevi prvog reda, a 10^8 je jedinica drugog reda; mirijada mirijada tih jedinica je jedinica trećeg reda i t.d.; do $P = (10^8)^(10^8)$ su brojevi prve periode, a P je jedinica druge periode; analogno dalje do $\left((10^8)^{(10^8)}\right)^{(10^8)} = 10^{8 \cdot 10^{64}}$.

$\boxed{\textit{Problema bovinum}}$ je zadatak pripisan Arhimedu: Odredi broj goveda, koja su raspodijeljena u 4 stada raznih boja: bijela, crna, šarena i žuta. U svakom stadu je mnogo bikova i krava:

- Bijelih bikova je bilo koliko $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ crnih i žutih zajedno.
- Crnih bikova je bilo koliko $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ šarenih i žutih zajedno.
- Šarenih bikova je bilo koliko $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ bijelih i žutih zajedno.
- Bijelih krava je bilo koliko $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ cijelog crnog stada.
- Crnih krava je bilo koliko $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ cijelog šarenog stada.
- Šarenih krava je bilo koliko $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ cijelog žutog stada.
- Žutih krava je bilo koliko $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ cijelog bijelog stada.

Dodatno se zahtijeva da ukupni broj bijelih i crnih bikova bude kvadratni broj te da je ukupni broj žutih i šarenih bikova trokutni broj.

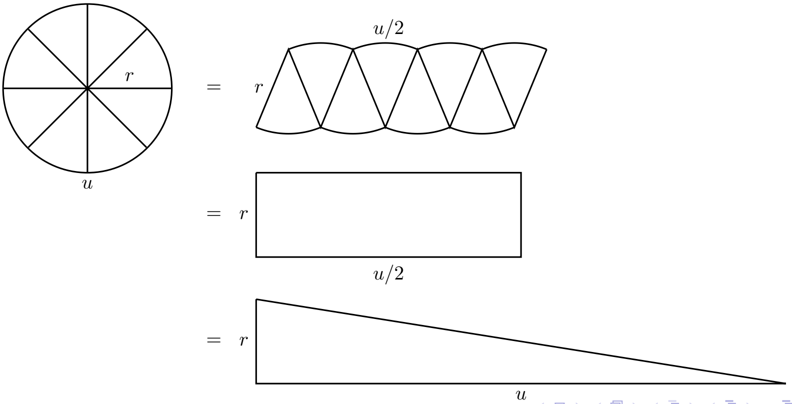
Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije

Arhimed se Arhimed eksplicitno poziva na Eudoksa, a njegovu definiciju omjera je preoblikovao u lemu koja je postala poznata kao Arhimedov aksiom.

Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije

Arhimed se Arhimed eksplicitno poziva na Eudoksa, a njegovu definiciju omjera je preoblikovao u lemu koja je postala poznata kao Arhimedov aksiom.

Arhimedov teorem o krugu



Uočimo da Arhimedov teorem o krugu povlači da je omjer površine kruga i kvadrata nad njegovim polumjerom jednak je omjeru opsega i promjera kruga, tj. tek sad ima smisla govoriti od π kao omjeru vezanom i za opseg i za površinu kruga. Oznaku π u današnjem smislu koristio je prvi 1706. Englez William Jones, a popularizirao 1736. Leonhard Euler.

Uočimo da Arhimedov teorem o krugu povlači da je omjer površine kruga i kvadrata nad njegovim polumjerom jednak je omjeru opsega i promjera kruga, tj. tek sad ima smisla govoriti od π kao omjeru vezanom i za opseg i za površinu kruga. Oznaku π u današnjem smislu koristio je prvi 1706. Englez William Jones, a popularizirao 1736. Leonhard Euler.

Dokaz (glavne ideje, u suvremenoj notaciji).

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Uočimo da Arhimedov teorem o krugu povlači da je omjer površine kruga i kvadrata nad njegovim polumjerom jednak je omjeru opsega i promjera kruga, tj. tek sad ima smisla govoriti od π kao omjeru vezanom i za opseg i za površinu kruga. Oznaku π u današnjem smislu koristio je prvi 1706. Englez William Jones, a popularizirao 1736. Leonhard Euler.

Dokaz (glavne ideje, u suvremenoj notaciji).

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Pretpostavimo suprotno 1.: $P(K) - P(T) > 0$. Tada u krug upisujemo pravilne n-terokute P_n. Očigledno je $\forall n$
$\delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$.

Uočimo da Arhimedov teorem o krugu povlači da je omjer površine kruga i kvadrata nad njegovim polumjerom jednak je omjeru opsega i promjera kruga, tj. tek sad ima smisla govoriti od π kao omjeru vezanom i za opseg i za površinu kruga. Oznaku π u današnjem smislu koristio je prvi 1706. Englez William Jones, a popularizirao 1736. Leonhard Euler.

Dokaz (glavne ideje, u suvremenoj notaciji).

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Pretpostavimo suprotno 1.: $P(K) - P(T) > 0$. Tada u krug upisujemo pravilne n-terokute P_n. Očigledno je $\forall n$ $\delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$. Može se dokazati da $\forall n$ $\delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$.

Uočimo da Arhimedov teorem o krugu povlači da je omjer površine kruga i kvadrata nad njegovim polumjerom jednak je omjeru opsega i promjera kruga, tj. tek sad ima smisla govoriti od π kao omjeru vezanom i za opseg i za površinu kruga. Oznaku π u današnjem smislu koristio je prvi 1706. Englez William Jones, a popularizirao 1736. Leonhard Euler.

Dokaz (glavne ideje, u suvremenoj notaciji).

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

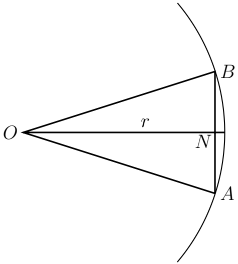
Pretpostavimo suprotno 1.: $P(K) - P(T) > 0$. Tada u krug upisujemo pravilne n-terokute P_n. Očigledno je $\forall n$ $\delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$. Može se dokazati da $\forall n\ \delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$. Gledamo samo $n = 2^k$.

EEX1 $\Rightarrow$ za dovoljno velik k je

$$0 < \delta_{2^k} < P(K) - P(T) \Rightarrow P(P_{2^k}) > P(T).$$

EEX1 $\Rightarrow$ za dovoljno velik k je

$$0 < \delta_{2^k} < P(K) - P(T) \Rightarrow P(P_{2^k}) > P(T).$$



$$P(P_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot a_n}{2} < n \cdot \frac{r \cdot a_n}{2} = \frac{r}{2} o(P_n) < \frac{r}{2} o = P(T),$$

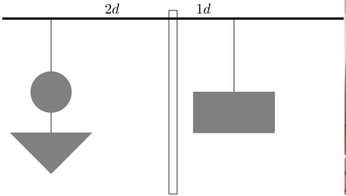
$\Rightarrow \forall k \; P(P_{2^k}) - P(T) < 0$ – kontradikcija!

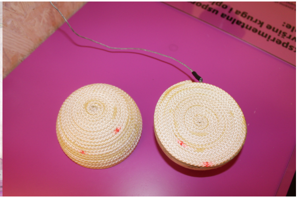
Arhimed i volumen kugle

U *O kugli i valjku* $\boxed{\text{Arhimed je dokazao}}$:

Teorem (Volumen i oplošje kugle)

Volumen kugle je $\frac{2}{3}$ volumena valjka istog polumjera i visine (odnosno 4 volumena stošca istog polumjera i visine jednake polumjeru). Oplošje kugle je 4 puta veće od površine kruga istog polumjera, odnosno oplošje kugle je $\frac{2}{3}$ oplošja opisanog joj valjka.

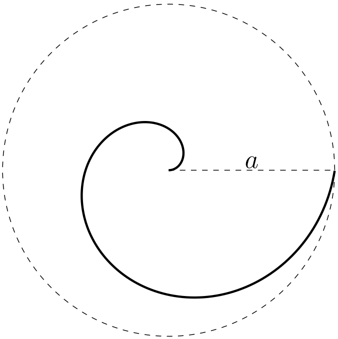




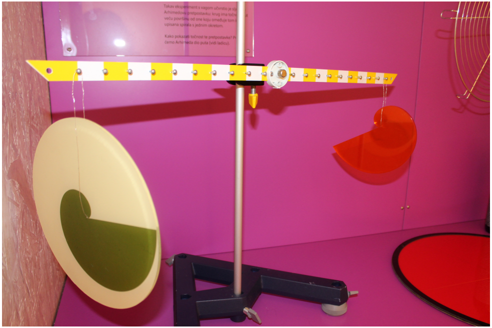
Desne slike su snimljene tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.

Arhimedova spirala

Arhimedova spirala je putanja točke koja se jednoliko giba po polupravcu koji jednoliko rotira oko polazne točke ($r = a\varphi$).[1]



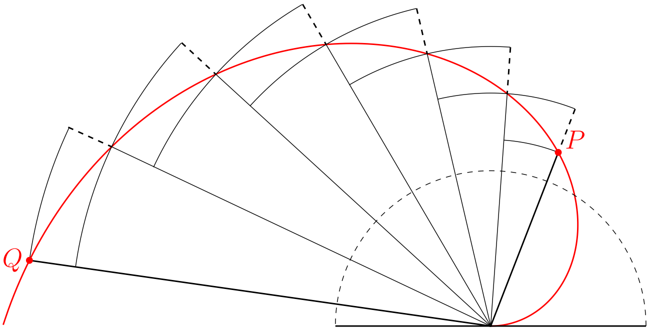
[1] Polarne koordinate uvedene su tek krajem 17. st. (sir Isaac Newton, Jacob Bernoulli).



Slika je snimljena tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.

Teorem

Isječak Arhimedove spirale između dva radij-vektora jednak je razlici kubova njihovih duljina podijeljenoj sa $6a$*. Posebno, površina jednog okreta je trećina površine opisanog kruga.*

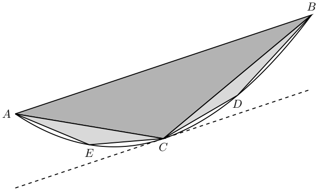


Dokaz je proveo metodom ekshaustije, dijeleći isječak u isječke s jednakim središnjim kutovima. Primijetio je da tako dobiveni r-ovi čine aritmetički niz. Zatim je gledao tim isječcima upisane i opisane kružne isječke i dobio figuru manje i figuru veće površine. Zatim ekshaustijom, mi bismo rekli uzimanjem limesa, dokazuje tvrdnju teorema.

Arhimedova kvadratura segmenta parabole

Teorem

Površina segmenta parabole jednaka je $\frac{4}{3}$ površine trokuta kojemu je jedna stranic tetiva tog segmenta, a treći vrh je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom.



Arhimed dokazuje da je $T = P(\triangle ABC)$ točno 4 put veća od zbroja površina $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$. Stoga se u svakom koraku uklanjanjem trokuta površina ostatka smanjuje 4 puta. Eudoksov princip ekshaustije daje:

$$P = T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{16}T + \ldots = T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}T.$$

Arhimed i odnos opsega i promjera kruga

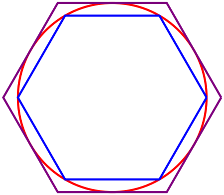
Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ *i veći od* $\frac{10}{71}$ *promjera.*

Arhimed i odnos opsega i promjera kruga

Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ *i veći od* $\frac{10}{71}$ *promjera.*



1. Krugu upišemo i opišemo pravilni šesterokut $(n = 0)$.

1. Krugu upišemo i opišemo pravilni šesterokut ($n = 0$).
2. Neka je o_n opseg upisanog, a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta (u svakom koraku se udvostručuje broj stranica).
3. Dakle, ako bi polumjer kruga bio 1, početne su vrijednosti $o_0 = 6$, $O_0 = 4\sqrt{3}$.

1. Krugu upišemo i opišemo pravilni šesterokut ($n = 0$).
2. Neka je o_n opseg upisanog, a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta (u svakom koraku se udvostručuje broj stranica).
3. Dakle, ako bi polumjer kruga bio 1, početne su vrijednosti $o_0 = 6$, $O_0 = 4\sqrt{3}$.
4. Za opseg o kruga vrijedi:
   $o_0 < o_1 < \ldots < o_n < \ldots < o < \ldots < O_n < \ldots < O_1 < O_0$.

1. Krugu upišemo i opišemo pravilni šesterokut ($n = 0$).
2. Neka je o_n opseg upisanog, a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta (u svakom koraku se udvostručuje broj stranica).
3. Dakle, ako bi polumjer kruga bio 1, početne su vrijednosti $o_0 = 6$, $O_0 = 4\sqrt{3}$.
4. Za opseg o kruga vrijedi:
$o_0 < o_1 < \ldots < o_n < \ldots < o < \ldots < O_n < \ldots < O_1 < O_0$.
5. Arhimed je otkrio rekurzivnu vezu među opsezima u dva uzastopna koraka: Svaki sljedeći opseg opisanog mnogokuta je harmonijska sredina opsega upisanog i opisanog mnogokuta iz prethodnog koraka: $O_{n+1} = \frac{2O_n o_n}{O_n + o_n}$. Također, svaki sljedeći opseg upisanog mnogokuta je geometrijska sredina opsega opisanog mnogokuta iz istog koraka i opsega prethodnog upisanog mnogokuta: $o_{n+1} = \sqrt{o_n O_{n+1}}$.

1. Krugu upišemo i opišemo pravilni šesterokut ($n = 0$).
2. Neka je o_n opseg upisanog, a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta (u svakom koraku se udvostručuje broj stranica).
3. Dakle, ako bi polumjer kruga bio 1, početne su vrijednosti $o_0 = 6$, $O_0 = 4\sqrt{3}$.
4. Za opseg o kruga vrijedi: $o_0 < o_1 < \ldots < o_n < \ldots < o < \ldots < O_n < \ldots < O_1 < O_0$.
5. Arhimed je otkrio rekurzivnu vezu među opsezima u dva uzastopna koraka: Svaki sljedeći opseg opisanog mnogokuta je harmonijska sredina opsega upisanog i opisanog mnogokuta iz prethodnog koraka: $O_{n+1} = \frac{2O_n o_n}{O_n + o_n}$. Također, svaki sljedeći opseg upisanog mnogokuta je geometrijska sredina opsega opisanog mnogokuta iz istog koraka i opsega prethodnog upisanog mnogokuta: $o_{n+1} = \sqrt{o_n O_{n+1}}$.
6. Arhimed je u 4 koraka došao do opsega upisanog i opisanog 96-erokuta (o_4 i O_4) i tako dobio navedenu procjenu.

Poliedri i trisekcija

Po Arhimedu se zovu i $\boxed{\text{Arhimedova tijela}}$. Prema Papusu, Arhimed je napisao tekst u kojem je opisao svih 13 tipova tih polupravilnih tijela. Taj tekst nije sačuvan i Arhimedova su tijela kasnije zaboravljena, sve do renesanse kad ih je ponovno otkrio Kepler, nabrojavo sve i primijetio da definiciju zadovoljavaju i pravilne prizme i $\boxed{\text{antiprizme}}$.

Poliedri i trisekcija

Po Arhimedu se zovu i Arhimedova tijela. Prema Papusu, Arhimed je napisao tekst u kojem je opisao svih 13 tipova tih polupravilnih tijela. Taj tekst nije sačuvan i Arhimedova su tijela kasnije zaboravljena, sve do renesanse kad ih je ponovno otkrio Kepler, nabrojavo sve i primijetio da definiciju zadovoljavaju i pravilne prizme i antiprizme.

Arhimedova „mehanička” trisekcija kuta $\alpha = \angle ABC$