



Sveučilište u
Zagrebu

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10000 Zagreb

SEMINARSKI RAD IZ PREDMETA SSIF:

NAZIV TEME:

**Predviđanje oscilatornog kretanja računanjem
složenosti Cmp kratkih vremenskih nizova,
definirane pomoću permutacije i linearne
kombinacije**

Ime i prezime mentora:

Prof.dr. Zoran Rajilić, PMF Banja Luka

Ime i prezime studenta:

Grahovac Petar

Pregled Seminara:

1. Uvod i definicija *Cmp* složenosti kratkih vremenskih nizova
2. Redovite oscilacije
3. Kaos i Šum
4. Integracija Monte Carlo metodom
5. Nelinearne prigušene oscilacije
6. Predviđanje 110-tog elementa niza i *Cmp* kao funkcija 110-tog elementa niza
7. Konvencionalni i alternativni pristup
8. Realni vremenski nizovi
9. Zaključak

1. Uvod i definicija *Cmp* složenosti kratkih vremenskih nizova

- ❖ Glavni uzroci složenosti vremenskog niza: *dimenzija, nelinearnost, nestacionarnost, šum, agregacija i konačna duljina.*
- ❖ prva tri u vezi su s procesom generiranja, a slijedeća tri uzroka u vezi su sa mjerenjem
- ❖ Garland i suradnici - utvrdili da postoji korelacija složenosti, procijenjena računanjem permutacione entropije, i pogreške predviđanja vremenskog niza (Garland et al. 2014)
- ❖ Bandt i Pompe - predložili permutacionu entropiju kao mjeru složenosti vremenskog niza, zasnovanu na poređenju susjednih elemenata

Opća definicija složenosti *Cmp*:

- ❖ pojam složenosti - postojanje strukture i potrebno ga je razdvojiti od neuređenosti
- ❖ složenost- između potpune uređenosti i potpune nasumičnosti i sa sobom nosi informaciju
- ❖ mjeru složenosti- fraktalnost, metodi nelinearne dinamike i entropija

❖ Šenonova entropija:

- ❖ smatra se začetnikom teorije informacija
- ❖ prvi pokušao da uvede mjeru količine informacija iz podataka koje neki sistem producira, kao duljinu opisa samog niza podataka
- ❖ podaci dobijeni iz poznatog izvora nasumičnih podataka i da su oni karakteristika samog izvora
- ❖ entropija ili neuređenost funkcije nasumične promjenjive X se definira :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i$$

- ❖ funkcija koja preslikava skup nasumičnih brojeva u realne brojeve
- ❖ Osobine Šenonove entropije:
 - $H(X) \geq 0$ uvijek, osim kada je $p_i = 0$ za sve ishode osim za samo jedan x_1
 - $H_{max}(X) = \log_2(N)$ za sve vjerovatnosti $p_i = 1/N$

□ Permutaciona entropija:

- takođe kao i Šenonova entropija svrstana je u skupinu strukturalnih entropija
- Osnovna ideja: međusobno poređenje susjednih članova u vremenskom nizu s elementima x_i , gdje je $i = 1, 2, \dots, N$, članovi se jednakim vrijednostima $x_i = x_{i^*}$, $i^* = 1$ se ne uspoređuju
- može da se računa za različite vrijednosti strukturne dimenzije faznog prostora m koja zavisi od broja posmatranih susjeda
- za niz od sedam članova $x = \{4, 7, 9, 10, 6, 11, 3\}$ će biti 6 parova susjeda od kojih za četiri važi nejednakost $x_i < x_{i+1}$, a za dva para $x_i > x_{i+1}$ sa permutacijama 01 i 10
- Permutaciona entropija za red $m = 2$: $H_2 = -(4/6)\log_2(4/6) - (2/6)\log_2(2/6) \approx 0,918$

- Permutaciona entropija - prilagođena za procjenu složenosti kratkih vremenskih nizova promjenom vremena odgode
- kaotični vremenski nizovi se mogu izučavati, ali ne i previđati, za razliku od kvaziperiodičnih koji se mogu samo previđati
- Složenost- na razmatranju vremenskih nizova dužine 110 i stvaranju permutacija u 10 podnizova čija je linearna kombinacija jednaka jedanaestom podnizu
- Posljedica permutacija- promjena konstanti koja određuje složenost Cmp
- Osnovna razlika između složenosti Cmp i permutacione entropije- definirana je u tome što se ne vrši prebrojavanje postojećih permutacija, nego se pravi novi vremenski niz permutacijama unutar originalnog vremenskog niza

□ Definicija Cmp :

- Niz A_1, \dots, A_{110} - podijeljen na 10 podnizova, prvih deset su:

$$F_{1,j} = A_j$$

$$F_{2,j} = A_{j+10}$$

$$F_{3,j} = A_{j+20}$$

...

$$F_{10,j} = A_{j+90}$$

- gdje je $j = 1, 2, \dots, 10, \dots$
- jedanaesti niz se može pretpostaviti kao linearna kombinacija prethodnih

- za mnoge netrivialne vremenske nizove važe sljedeće jednačbe:

$$A_{101} = \sum_{i=1}^{10} c_i F_{i,1}$$

$$A_{102} = \sum_{i=1}^{10} c_i F_{i,2}$$

...

$$A_{110} = \sum_{i=1}^{10} c_i F_{i,10},$$

- su neovisne i daju konstante linearne kombinacije $\langle c_1, c_2, \dots, c_{10} \rangle$
- zatim se prave permutacije unutar prvih deset podnizova i dobijaju se sljedeći podnizovi

$$F'_{1,1} = A_{10}, \quad F'_{1,j} = A_{j-1},$$

$$F'_{2,1} = A_{20}, \quad F'_{2,j} = A_{j+9},$$

$$F'_{3,1} = A_{30}, \quad F'_{3,j} = A_{j+19},$$

....

$$F'_{10,1} = A_{100}, \quad F'_{10j} = A_{j+89},$$

- tada jednačbe:

$$A_{101} = \sum_{i=1}^{10} c'_i F'_{i,1}$$

$$A_{102} = \sum_{i=1}^{10} c'_i F'_{i,2}$$

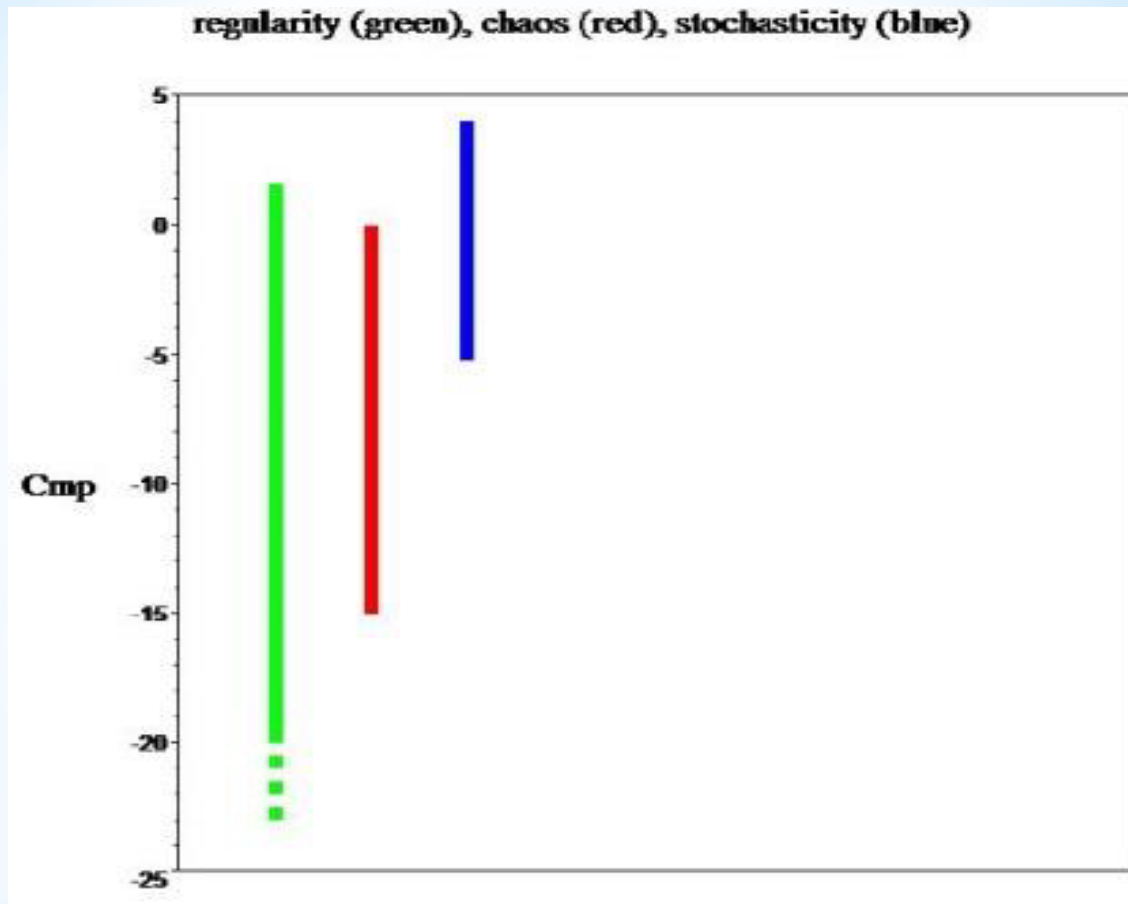
...

$$A_{110} = \sum_{i=1}^{10} c'_i F'_{i,10}$$

- daju nove konstante linearne kombinacije $\langle c'_1, c'_2, \dots, c'_{10} \rangle$
- krajnja definicija složenosti Cmp korištenjem vektorske Euklidske norme u prostoru dimenzije 10 :

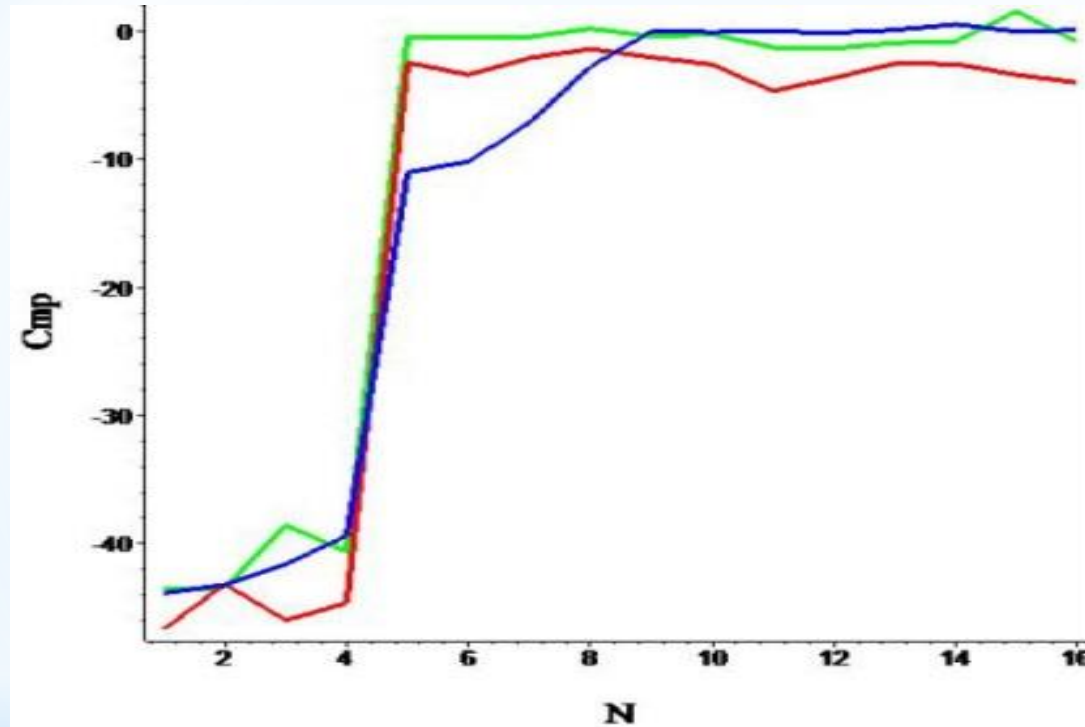
$$Cmp = -\ln \frac{\| \langle c'_1, c'_2, \dots, c'_{10} \rangle - \langle c_1, c_2, \dots, c_{10} \rangle \|}{\langle c_1, c_2, \dots, c_{10} \rangle}$$

- nakon izvršenog računa se može primijetiti da minimalna vrijednost složenosti Cmp raste u smjeru redovitost-kaos-stokastičnost



Slika 1.- Intervali u kojima se nalaze vrijednosti složenosti za redovite, stokastične i kaosne vremenske nizove duljine 110. Stokastičnost predstavlja slučajnu nepredvidivost, kaotičnost kratkoročnu predvidivost, a dugoročnu nepredvidivost, dok redovitost predstavlja potpunu predvidivost.

2. Redovite oscilacije



Slika 2.- Visoka složenost C_{mp} koja je predstavljena plavom, zelenom i crvenom linijom odgovara velikom broju različitih frekvencija N . Što je C_{mp} veće, raste broj različitih frekvencija

- Izračunajte kosinusne funkcije vremena iznose:

$$\sum_{j=1}^N \cos((2,6 + 0,9j)i - 0,041j)$$

$$\sum_{j=1}^N (-0,9)^j \cos((2,8 + 0,7j)i - 0,03j)$$

$$\sum_{j=1}^N (-1,1)^j \cos((2,1 + 0,8j)i - 0,09j)$$

3. Kaos i Šum

- Gaussov šum – funkciju gustoće raspodjele kao: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
- računajući složenost Cmp raznih slučajnih vrijednosti (oko 14 000) sa Gausovom raspodjelom (šumom) :
- složenost šuma iznosi između -5,221 i 4,039, dok je složenost jednostavnih redovitih oscilacija oko -50

-Feignebaumov broj-

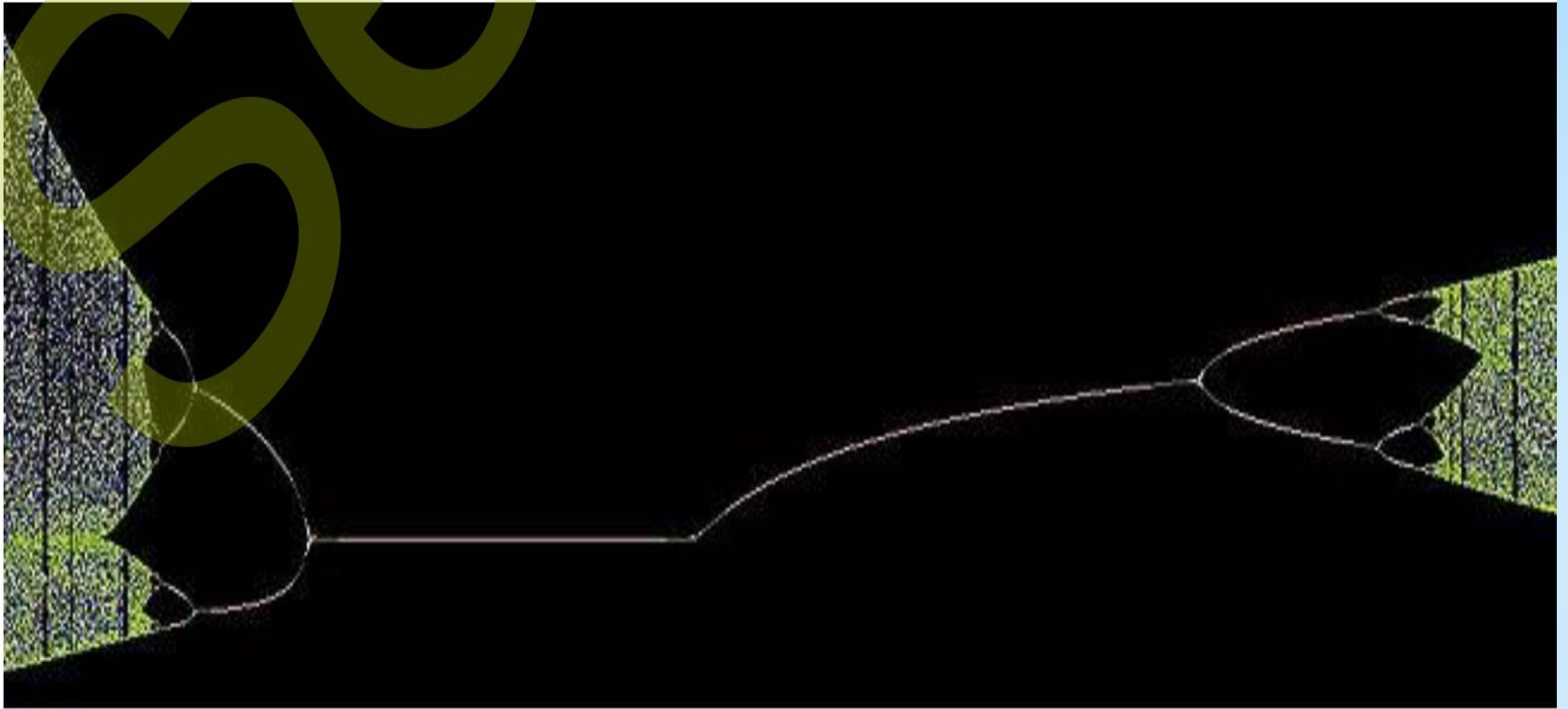
- Prijelaz u kaos ne karakteriziraju bifurkacije (stanice na putu za kaos) beskonačnog reda, nego se temelji na principima:
 - I) determinizam,
 - II) univerzalnost i
 - III) osjetljivost na početne uvjete (senzibilnost)

- ✓ Feigenbaumova eksperimentalna istraživanja u razdoblju od 1974.-1976. na populacijskom procesu u obliku logističke mape (preslikavanje se vrši iz jednog skupa elemenata na taj isti skup):

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad 0 < r < 4$$

$x_1 > 0$, x_1 je zadano, r je kontrolni parametar

- ✓ su dovela do otkrića Feigenbaumove konstante koja se dobija preko niza r_k i pripadnih nizova njihovih razlika $\delta_k = r_{k-1} - r_k$ i iznosi: $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k / \delta_{k+1} = \delta = 4,6609201609$
- ✓ ona se upotrebljuje kada se radi o jednoj vrsti reda (determinizma) prijelaza u kaos,
- ✓ te o jednoj vrsti univerzalnosti prelaza u kaos jer ta konstanta ne ovisi o nelinearnom iteratoru odnosno o prirodi konkretnih objekata dane pojave
- ✓ na sljedećoj slici- Bifurkacija s udvostručenjem perioda- populacijska jednadžba belgijskog matematičara Pierre François Verhulst (1804.-1849.)



Slika 3.- Bifurkacija s udvostručenjem perioda, primjer za populacijsku jednadžbu belgijskog matematičara Pierre François Verhulst (1804.-1849.)

-Ljapunovljevi eksponenti-

- jasan i mjerljiv način za prepoznavanje kaosa i razdvajanje pravog kaotičnog ponašanja od ponašanja sa prisustvom šuma ili nepravilnosti
- teži se tome da se povežu promjene u mjerama kaotičnog ponašanja sa promjenama u fizičkom ponašanju sistema
- analiza vremenskih nizova podataka o sistemu- o promjeni stanja i ponašanja sustava u pravilnim vremenskim intervalima
- jedna od glavnih karakteristika haotičnog ponašanja jeste velika osjetljivost na početne uvjete, koja se manifestira divergencijom bliskih trajektorija u faznom prostoru
- mjera koja pokazuje divergenciju naziva se Ljapunovljev eksponent
- izraz je uveo *Oseledec* (1968)

- jednodimensionalna logistička mapa: $x_{n+1}=f(x_n)$ sa početnim tačkama x_0 i $x_0+\Delta x_0$
- ako je : $f'(x)=\partial f/\partial x$ onda se dobija: $\Delta x_1=f(x_0 + \Delta x_0)-f(x_0) \approx \Delta x_0 f'(x_0)$
- lokalni Ljapunovljev eksponent:

$$e^\lambda = |\Delta x_1 / \Delta x_0|, \text{ odnosno}$$

$$\lambda = |\Delta x_1 / \Delta x_0| \approx \ln f'(x_0)$$



- lokalni Ljapunovljev broj (apsolutna vrijednost označava pozitivan Ljapunovljev eksponent)

- globalni Ljapunovljev eksponent- usrednjavanje za veliki broj iteracija
- rezultati koji se dobijeni uvrštavanjem početnih vrijednosti u izraz i predstavljaju ulazne podatke za novi krug proračuna tog istog izraza
- relacija:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |f'(x_n)|,$$



- srednji eksponencijalni rast udaljenosti između dva bliska početna uvjeta ili srednje istežanje prostora, kaos je pozitivna, a fiksna točka negativna vrijednost

q	λ	Cmp	q	λ	Cmp
1,3	-0,425	-41,59	1,46	0,19	-0,9
1,35	-0,097	-36,36	1,794	0,351	-0,507
1,402	0,028	-8,31	1,57	0,361	0,008
1,405	0,054	-6,46	1,68	0,403	-0,825
1,41	0,094	-8,85	1,83	0,481	-0,01
1,42	0,11	-8,05	1,89	0,548	-0,37
1,45	0,17	-6,96	1,94	0,585	-1,7
1,44	0,18	-7,84	1,99	0,684	-0,5

Tablica 1.- Vremenske nizovi koji su generirani po Feigenbaumovoj slici, na osnovu parametra q računati su Cmp i Ljapunovljev eksponent λ , može se zaključiti da sa rastom Ljapunovljevog eksponenta raste i Cmp , te da je složenost Cmp niža kada se doda manji broj šuma

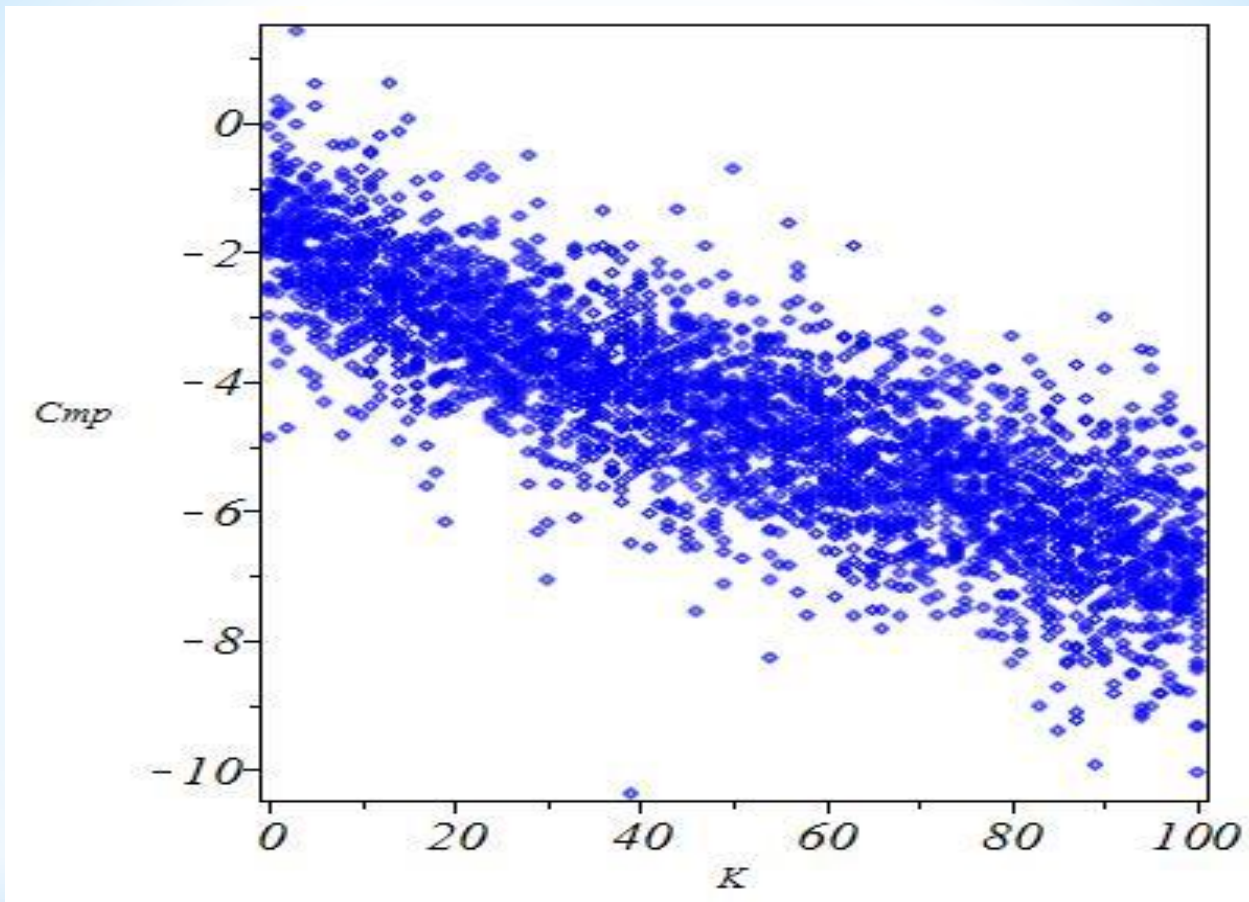
η	λ (bez šuma)	Cmp (sa 0,1% šuma)	Cmp (sa 1% šuma)
1,405	0,054	-6,36	-3,55
1,402	0,028	-6,19	-3,7
1,406	0,069	-5,41	-3,6
1,44	0,18	-3,4	-2,95
1,94	0,585	-1,67	-1,44
1,99	0,654	-0,49	-0,43

Tablica 2.- Izračunavanje Ljapunovljevog eksponenta i složenosti za kratke vremenske nizove koji sadrže šum gdje su razina šuma i Ljapunovljev eksponent dovoljno niski (opadajući)

4. Integracija Monte Carlo metodom

Integrali	Cmp_{x1}	Cmp_{y1}	$reška_1(\%)$	Cmp_{y1}	Cmp_{y2}	$greška_2(\%)$
$\int_0^1 e^{-v} \cos^2 5v dv$	-0,967	-0,812	5,9	-0,735	0,937	0,9
$\int_0^{2,53} \left[0,3v + \frac{2}{\sqrt{5 + 3\sin 4v}} \right] v dv$	-1,42	-0,82	14,16	-0,26	-0,09	10,82
$\int_0^{5,41} e^{v-(v-2)^2} dv$	-0,992	-0,711	17,12	-0,742	0,178	5,04


Tablica 3.- Izračunavanje proizvoljnih integrala Monte Carlo metodom uporabom slučajno distribuiranih točaka (x_i, y_i) ($j = 1, 2, \dots, 110$) , integracija je mnogo preciznija za složenije stokastične nizove x_i i y_i



Slika 4.-Povećanje složenosti C_{mp} približavanjem sistema termičkoj ravnoteži se može definirati na način da sustav ide u ravnotežu, dok klasična entropija raste

5. Nelinearne prigušene oscilacije

- Analiza koordinate čestice $x(0,1j)$, sa $j = 1, 2, \dots, 110$ na koju djeluje sila:

$$F = -x - \beta x^3 - 0,005v$$
The diagram consists of two blue arrows originating from the equation above. The first arrow starts from the coefficient β in the cubic term βx^3 and points diagonally down and to the left towards the first explanatory text block. The second arrow starts from the coefficient $0,005$ in the linear velocity term $-0,005v$ and points diagonally down and to the right towards the second explanatory text block.

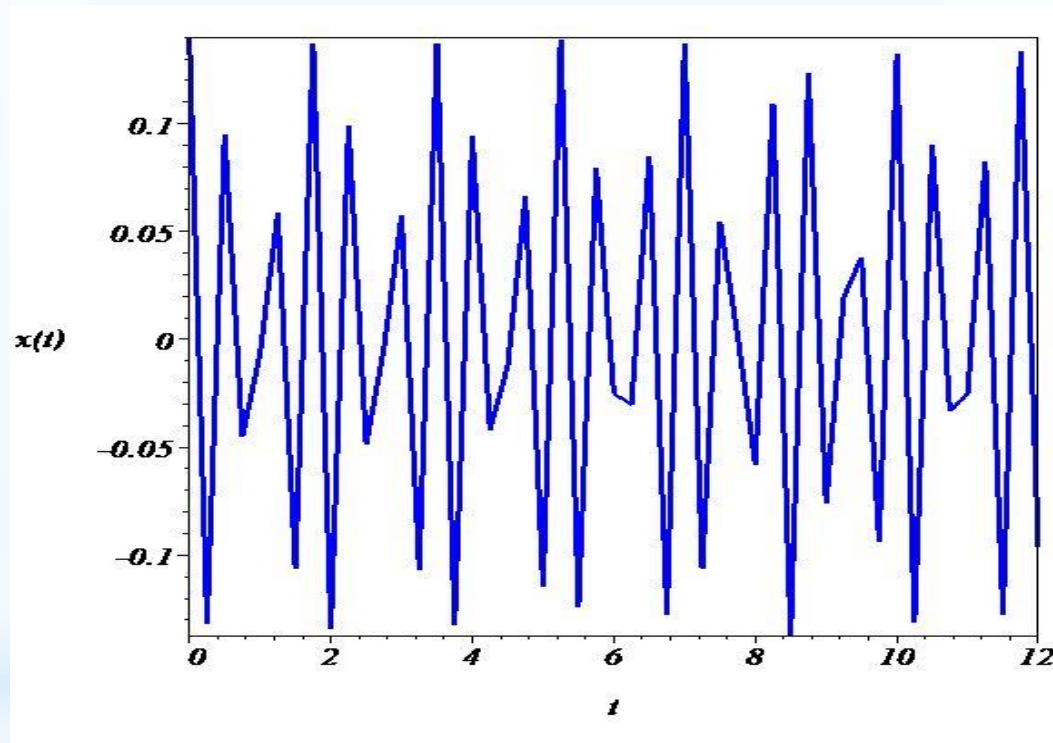
-koeficijent nelinearnosti koji određuje veličinu nelinearnog dijela sile, Cmp raste

koeficijent proporcionalnosti između sile otpora sredine i brzine kretanje tijela

β	λ	Cmp	η
1	-0,032	-14,86	1,46
5	-0,002	-12,23	1,794
10	0,010	-14,58	1,57
500	0,063	-7,55	1,68
5941	0,089	-3,03	1,83
6000	0,098	-1,43	1,89
6500	0,095	-3,66	1,94
6541	0,097	-3,47	1,99

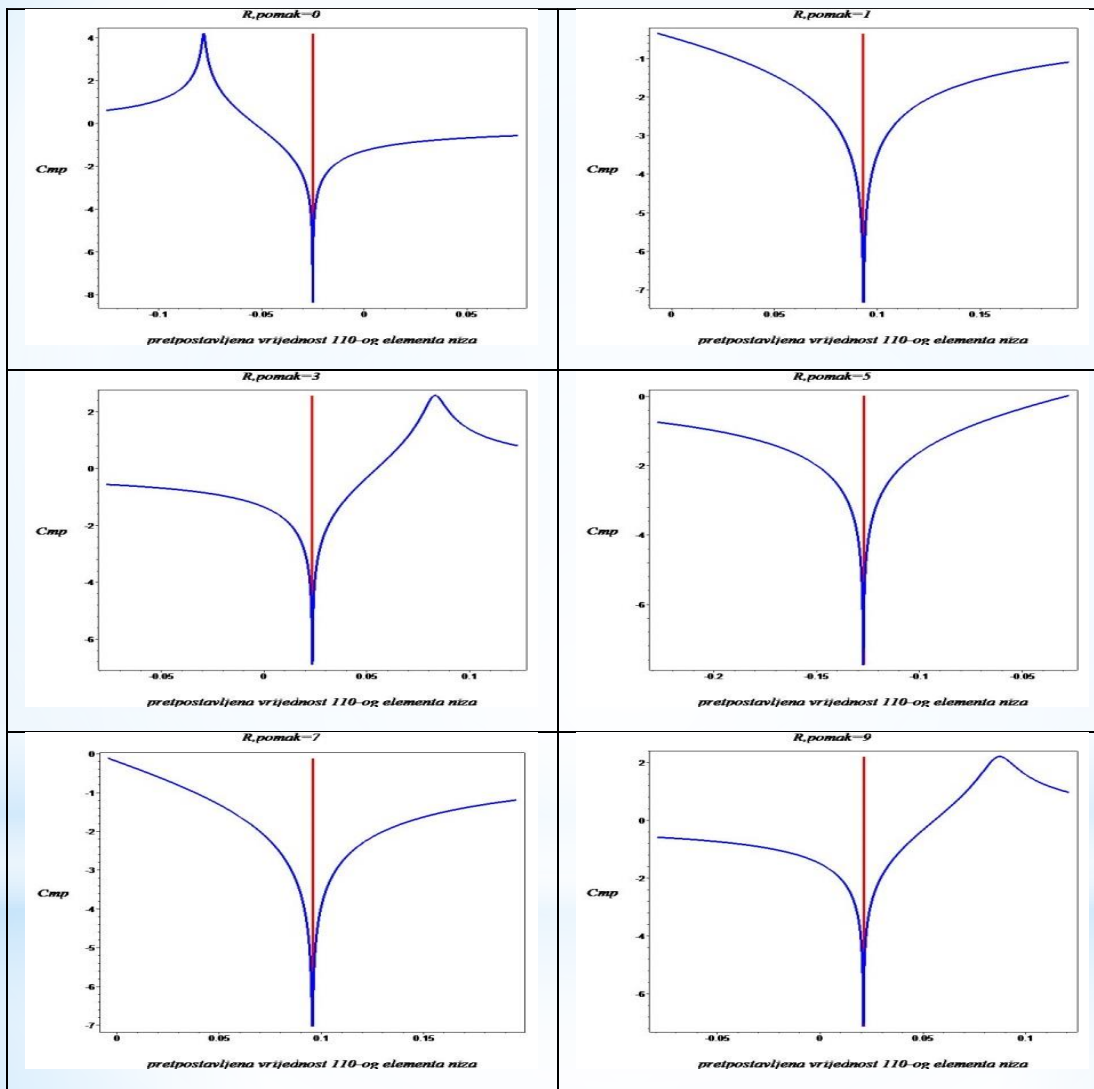
Tablica 4.-Predstavljene su vrijednosti koeficijenta nelinearnosti, složenosti i Ljapunovljevog eksponenta nelinearnih prigušenih oscilacija. Mogu se primijetiti tri vrste kretanja: redovito $Cmp < -11$ i $\lambda < 0$, kaotično sa $Cmp < -5,221$ i $0 \leq \lambda \leq 0,063$ gdje se razlikuje od šuma, jer je interval složenosti šuma prisutan spolja i kaotično sa $-5,221 < Cmp < 4,039$ i $0,089 \leq \lambda$, gdje nema razlike u odnosu na interval složenosti šuma.

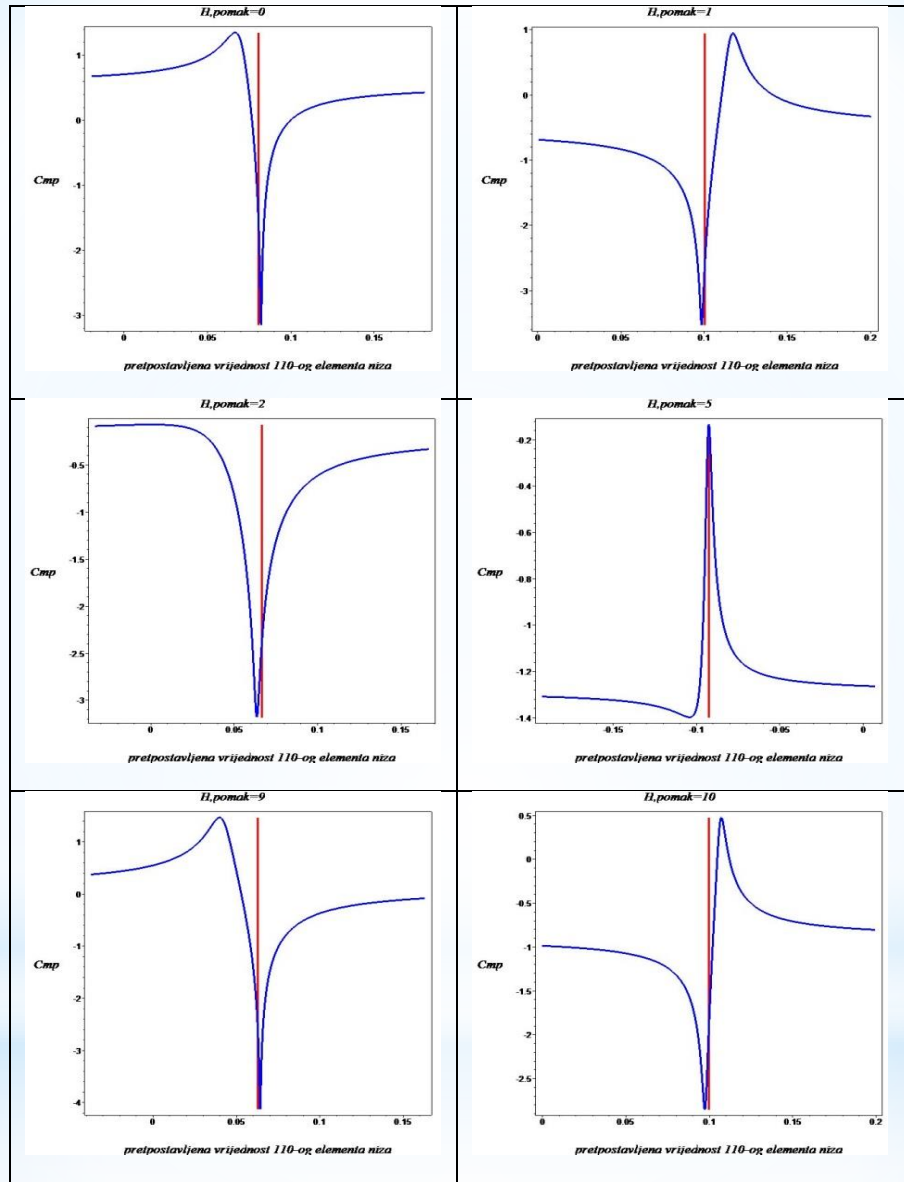
- oscilacije čestice - opisane diferencijabilnom jednađbom kretanja
- pomoću ove jednađbe i generiranja vremenskog niza mogu razmatrati podnizovi $A_j = x_{j+p}$, $p = 0,1,2$, sa različitim pomacima p , dok $0,1j$ predstavlja diskretno vrijeme
- sa mnogo kraćim postupkom, uz $1 \leq j \leq 100$ promatrao bi se samo jedan dio oscilacije

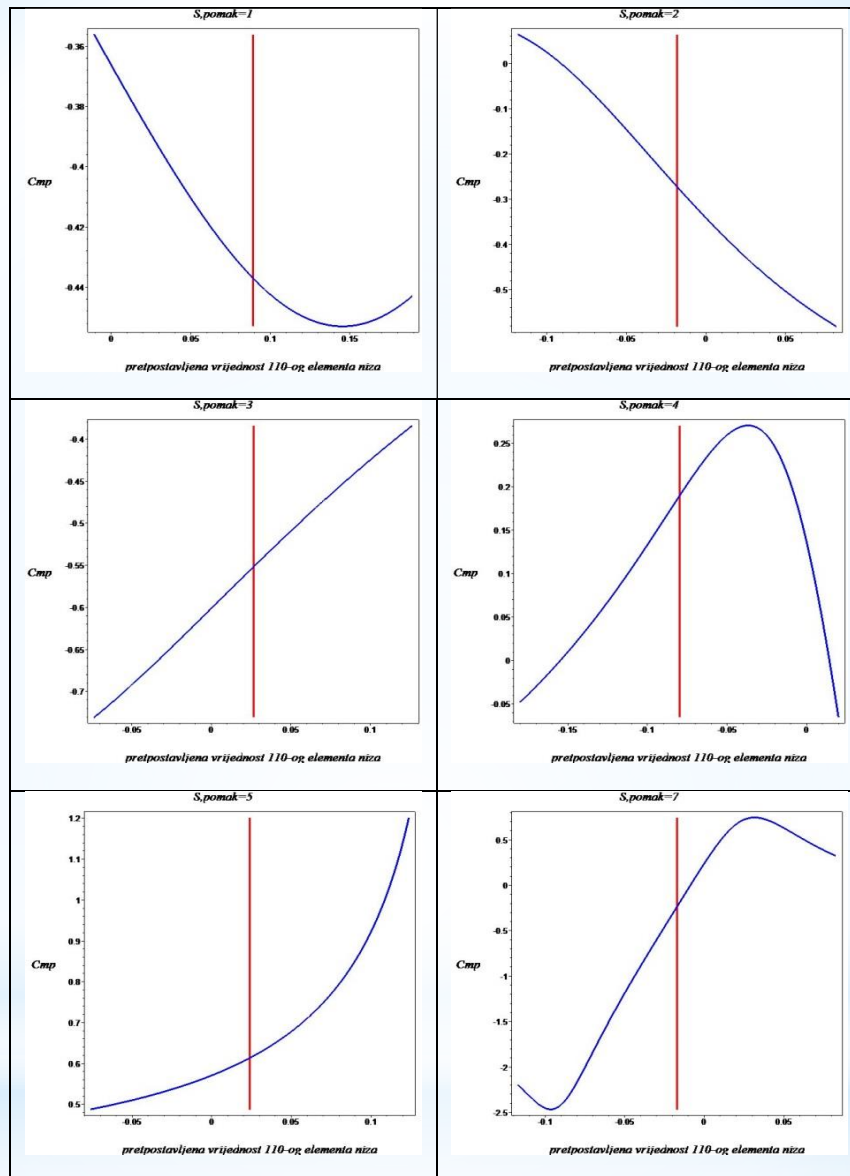


Slika 5.-Koordinata čestice kao funkcija vremena

6. Predviđanje 110-tog elementa niza i Cmp kao funkcija 110-tog elementa niza







7. Konvencionalni i alternativni pristup

- izmjerena je koordinata čestice $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$, utvrđuje se položaj čestice u budćnosti
- u konvencionalnom pristupu - definirati sila kao funkcija položaja, brzine i vremena , a onda se rješava diferencijabilna jednadžba kretanja
- alternativni pristup - omogućuje predviđanje bez znanja o pravilima generiranja vremenskog niza
- računamo Cmp za razne pretpostavljene vrijednosti budućeg položaja čestice
- ako je minimum oštar i dubok- prilično pouzdano predviđanje tog položaja
- diferencijabilnoj jednadžbi kretanja i osjetljivosti na početne uvjete u konvencionalnom pristupu odgovaraju princip minimalne složenosti i odstupanje od tog principa u alternativnom pristupu

9. Realni vremenski nizovi

S&P 500 burzovni indeks:

- ✓ računanjem složenosti vremenskih nizova vrijednosti burzovnog indeksa S&P 500 - oštri maksimumi pokazuju pravu vrijednost 110-og elementa
- ✓ nešto rjeđe oštri minimumi pokazuju pravu vrijednost
- ✓ izgleda da stokastizacija prethodi velikim skokovima burzovnog indeksa, na dolje ili na gore, a da minimumi i maksimumi znače da postoje pravila promjene indeksa, koja ne znamo
- ✓ na osnovu dodatne analize burze, neovisne od računanja složenosti, možemo očekivati da će većina onih koji trguju dionicama postupiti u skladu sa pravilima ili će većina postupiti suprotno pravilima
- ✓ tad bismo mogli približno predvidjeti vrijednost indeksa S&P 500
- ✓ minimum pokazuje tu vrijednost ako većina postupa po pravilima, a maksimum pokazuje približnu vrijednost indeksa ako se većina ponaša (prodaje, kupuje ili samo zadržava dionice) suprotno pravilima

- sljedeća relacija predstavlja račun srednje vrijednosti složenosti vremenskih nizova S & P 500 za 140 raznih vrijednosti unutar jedne godine kao:

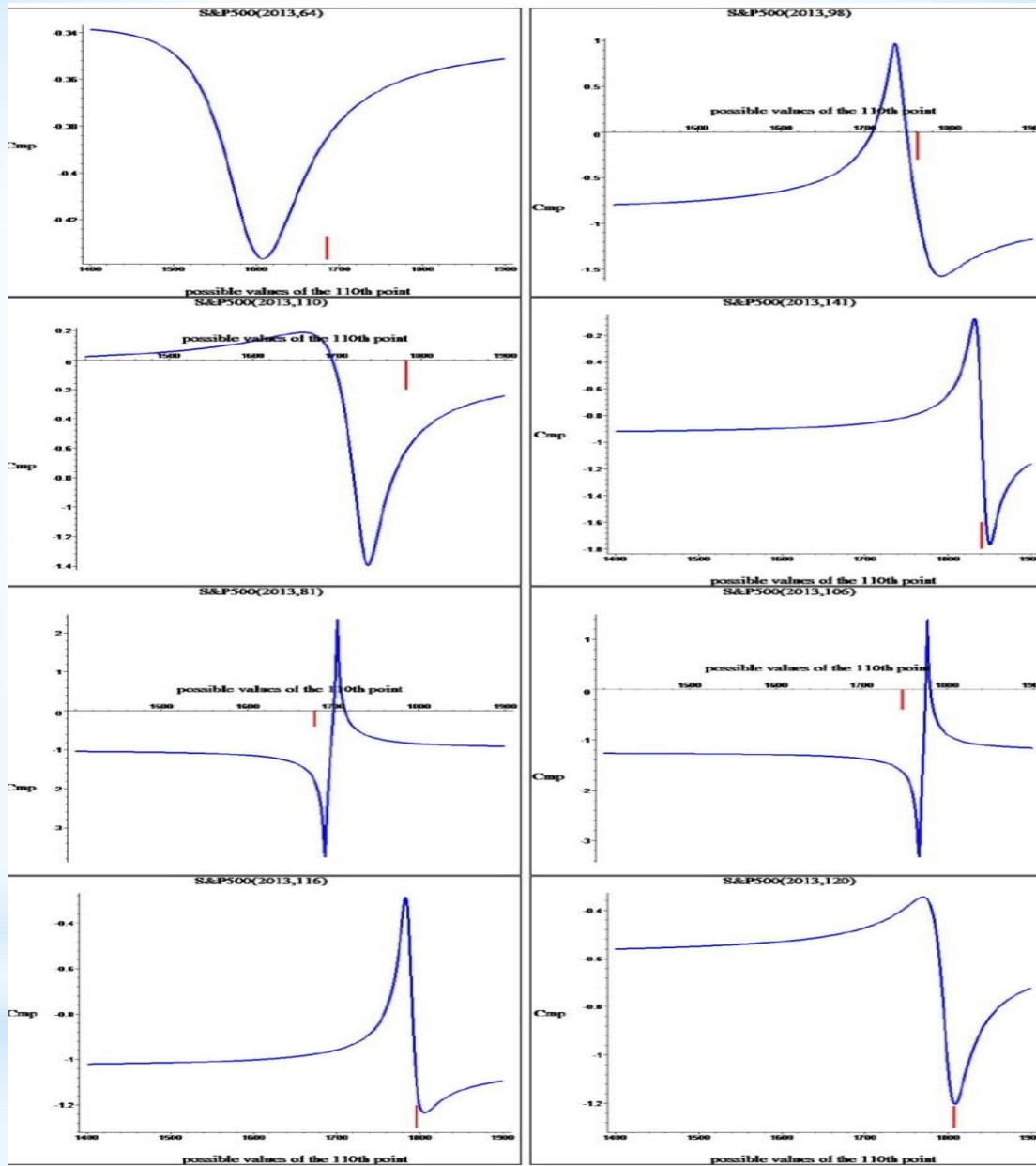
$$\langle Cmp \rangle = \frac{1}{141} \sum_{p=0}^{141} Cmp(p)$$

- predstavljajući da je:

$$A_i = SDP_{i+p} \quad i = 1, 2, \dots, 110 \quad p = 0, 1, 2, \dots, 140$$

podniz

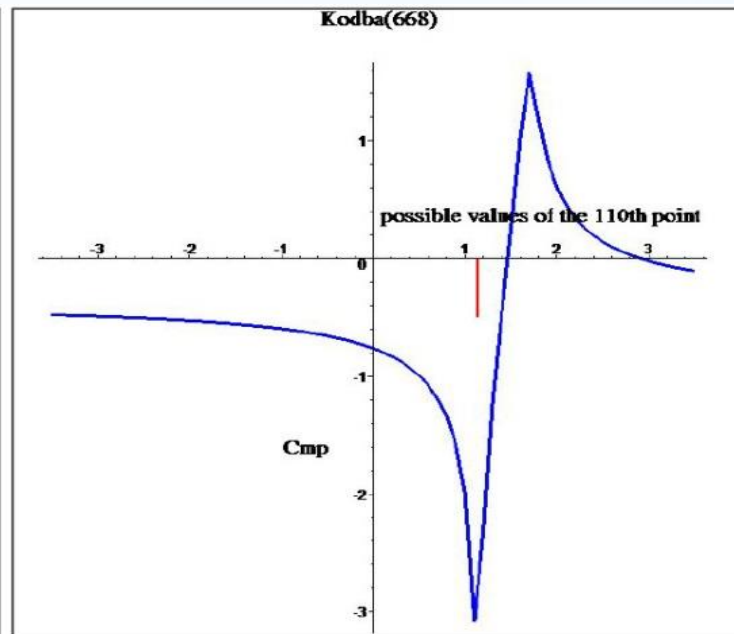
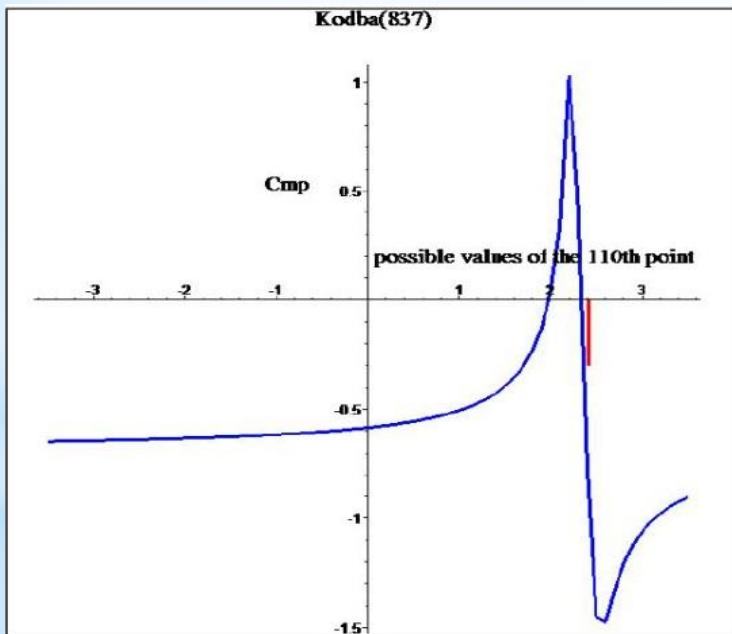
izmjerena vrijednost sa različitim pomacima p



Eksperiment sa RLC kolom:

- izmjeren vremenski niz i izračunat pozitivan Lapunovljev eksponent
- računanjem složenosti se mogu predviđati 110-eti elementi podnizova
- nakon mjerenja izlaznog napona K_i , Ljapunovljev eksponent iznosi 0,33

$$A_i = K_{i+p} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 109$$



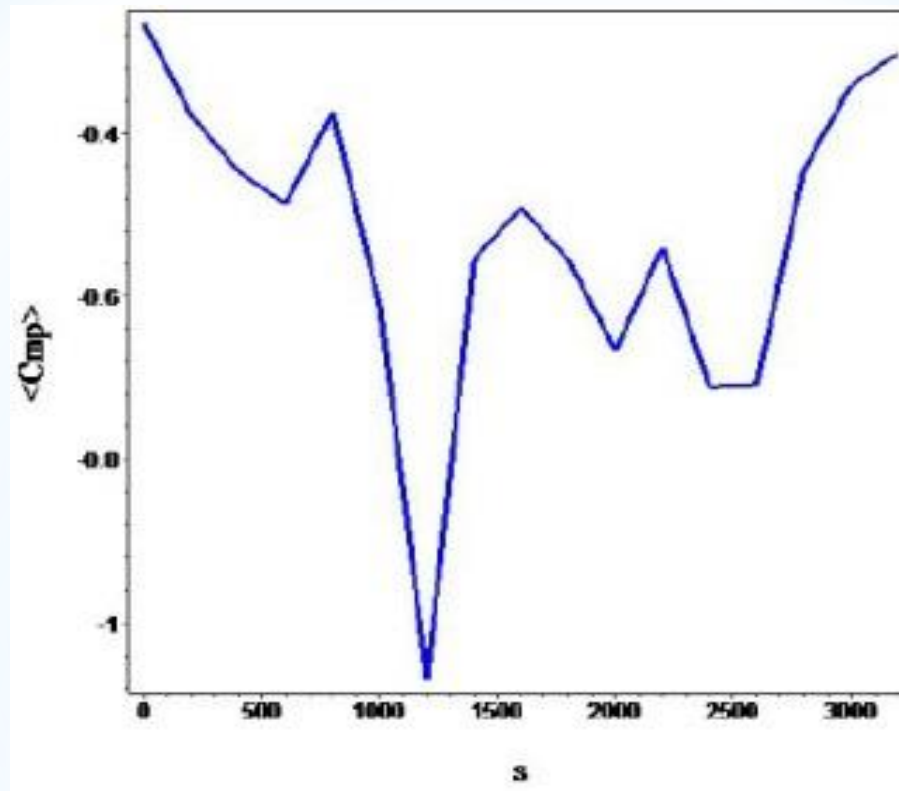
Elektroencefalografski EEG vremenski nizovi:

- EEG- metod neurofiziologije koji se između ostalog bavi i analizom prostorno-vremenskih obrazaca električne aktivnosti mozga tijekom psihičkih procesa
- oblast neurofiziologije je konstitucionalni dio kognitivne psihofiziologije, interdisciplinarne oblasti koja proučava fiziološke funkcije u cilju rasvjetljavanja procesa i mehanizama koji su u osnovi kognicije
- kognitivna psihofiziologija, kognitivna psihologija i kompjutersko modeliranje čine kognitivne neuroznanosti i to je najširi okvir primjene teorije determiniziranog kaosa
- EEG vremenski nizovi u obliku EEG_j ($j = 1, 2, \dots, 3595$) su evidentirani na pacijentima koji su podvrgnuti ECT terapiji za kliničku depresiju. Dobija se:

$$A_i = EEG_{i+p} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 110$$

podniz

izmjerena vrijednost sa različitim pomacima p



Slika 11.- Prosječna složenost Cmp EEG vremenskih nizova u intervalu $s \leq p \leq s + 90$. Može se primijetiti visok porast $\langle Cmp \rangle$.

9. Zaključak

- Cmp , kao mjera složenosti, definira se pomoću permutacije i linearne kombinacije
- Cmp je povezan s:

- I.** brojem različitih frekvencija u redovitim oscilacijama,
- II.** Ljapunovljevim eksponentom kaotičnih vremenskih nizova,
- III.** razinom šuma,
- IV.** točnošću metode Monte Carlo integracije i
- V.** koeficijentom nelinearnosti u izrazu za fluktuirajuću silu ako je složenost dovoljno niska, moguće je predviđati pod njenom uporabom i procijenjivati pouzdanost predviđanja koja je velika, ako je minimum Cmp oštar i dubok.

- Računanjem složenosti vremenskog niza također se može:

- (1) Točno predviđati redoviti vremenski niz jer tad važi princip minimalne složenosti
- (2) Približno predviđati kaotičan vremenski niz sa točnošću određenom širinom i dubinom minimuma u dijagramu
- (3) Razlučiti šum i kaos u mnogim situacijama

10. Literatura

- [1] Bandt, C., & Pompe, B. (2002). Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series. *Physical Review Letters*, 88(17), 174102. <http://journals.aps.org/prl/issues/88/17>
- [2] Freking, A., Kinzel, W., & Kanter, I. (2002). Learning and predicting time series by neural networks. *Physical Review E*, 65(5), 050903. <http://journals.aps.org/pre/issues/65/5>
- [3] Garland, J., James, R., & Bradley, E. (2014). Model-free quantification of time-series predictability. *Physical Review E*, 90(5), 052910. <http://journals.aps.org/pre/issues/90/5>
- [4] Joo, T.W., & Kim, S.B. (2015). Time series forecasting based on wavelet filtering. *Expert Systems with Applications*, 42(8), 3868-3874. <http://www.sciencedirect.com/science/journal/09574174/42/8>
- [5] Kodba, S., Perc, M., & Marhl, M. (2005). Detecting chaos from a time series. *European Journal of Physics*, 26(1), 205-215. <http://www.matjazperc.com/ejp/time.html>
- [6] Rosso, O.A., Larrondo, H.A., Martin, M.T., Plastino, A., & Fuentes, M.A. (2007). Distinguishing Noise from Chaos. *Physical Review Letters*, 99(15), 154102. <http://journals.aps.org/prl/issues/99/15>
- [7] <https://www.rastko.rs/cms/files/books/4f4b842acd6f5>
- [8] https://www.fer.unizg.hr/download/repository/Predavanje_3.pdf