Gravitacija kao kvadrat baždarne teorije

David Orešković

Uvod

- Najbolji opis jake, slabe i elektromagnetske sile dan je s baždarnom teorijom u konzistentnom pristupu kvantne teorije polja
- Opis gravitacije dan je s Einsteinovom općom teorijom relativnosti
- OTR nije renormalizabilna teorija
- “Dvostruka kopija”[8] povezuje amplitude raspršenja u baždarnim i gravitacijskim teorijama

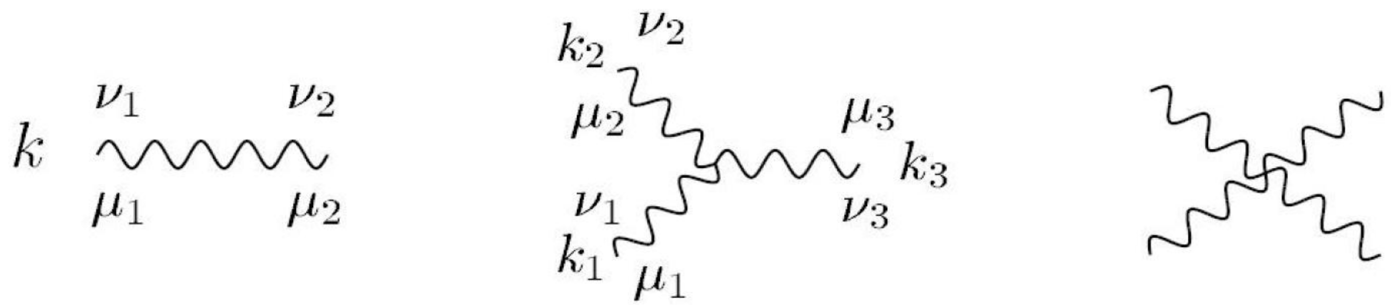
Feynmanova pravila za gravitaciju

- Graviton: čestica koja prenosi gravitacijsku silu
  - Simetrično tenzorsko polje ranka 2 čiji trag isčezava
  - Bezmasena čestica spina 2
  - Sadrži dva nezavisna stupnja slobode u četiri dimenzije
- Raspršenja u ravnom prostoru opisana Feynmanovim dijagramima
- Razvoj metrike: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$
- Feynmanova pravila slijede iz Einstein-Hilbertovog Lagranžijana:

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{2}{\kappa^2}\sqrt{-g}R$$

Feynmanova pravila za gravitaciju

- Feynmanovi dijagrami[1]:



- Propagator u De Donderovom baždarenju[1]:

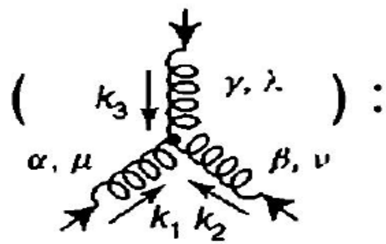
$$P_{\mu_1\nu_1;\mu_2\nu_2} = \frac{1}{2}\left[\eta_{\mu_1\mu_2}\eta_{\mu_2\nu_2} + \eta_{\mu_1\nu_2}\eta_{\nu_1\mu_2} - \frac{2}{D-2}\eta_{\mu_1\nu_1}\eta_{\mu_2\nu_2}\right]\frac{i}{k^2+i\epsilon}$$

- Tro-gravitonski vrh[1]:

$$\begin{aligned} G^{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2,\mu_3\nu_3}_{DeDonder}(k_1.k_2,k_3) \sim k_1\cdot k_2\eta^{\mu_1\nu_1}\eta^{\mu_2\nu_2}\eta^{\mu_3\nu_3} + \\ k_1^{\mu_3}k_2^{\nu_3}\eta^{\mu_1\mu_2}\eta^{\nu_1\nu_2} + \\ mnogo\ ostalih\ clanova. \end{aligned}$$

Feynmanova pravila za gravitaciju

- Tro-gluonski vrh u Yang-Millsovoj teoriji:



$$-g_s f^{\alpha\beta\gamma}[g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3 - k_1)_\nu]$$

- Pokušaj faktorizacije:

$$G^{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2,\mu_3\nu_3}_{faktorizirano}(k_1,k_2,k_3) \sim V^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{YM}(k_1,k_2,k_3)\cdot V^{\nu_1\nu_2\nu_3}_{YM}(k_1,k_2,k_3).$$

Feynmanova pravila za gravitaciju

- Faktorizacija tro-gravitonskih vrhova preko Yang-Millsovih nemoguća u standardnim formulacijama gravitacije
- Problem kontrakcije “lijevih”i “desnih” indeksa u polju gravitona
- Potrebno preurediti Einstein-Hilbertov Lagranžijan

KLT (Kawai-Lewellen-Tye) relacije

- KLT relacije povezuju amplitude drvastih dijagrama ("tree-level" amplitude) otvorenih i zatvorenih struna
- Za operatore vrhova vrijedi[1]:

$$V^{zatvoreno} = V_{lijevo}^{otvoreno} \times \overline{V}_{desno}^{otvoreno}$$

- Za svako stanje zatvorene strune postoji Fockova dekompozicija:

$$|stanje\ zatvorene\ strune >= |stanje\ otvorene\ strune > \otimes\ |stanje\ otvorene\ strune >$$

KLT (Kawai-Lewellen-Tye) relacije

- Graviton opisan kao stanje zatvorene strune
- Otvorene strune u limesu teorije polje predstavljaju baždarne bozone
- Limes teorije polja:

$$|gravitacijsko\, stanje >= |stanje\, bazdarne\, teorije > \otimes$$
$$|stanje\, bazdarne\, teorije >$$

KLT (Kawai-Lewellen-Tye) relacije

- KLT relacije za četiri i pet vanjskih gravitona[4]:

$$M_4^{tree} = -is_{12}A_4^{tree}(1,2,3,4)\tilde{A}_4^{tree}(1,2,4,3)$$

$$M_5^{tree} = -is_{12}s_{34}A_5^{tree}(1,2,3,4,5)\tilde{A}_5^{tree}(2,1,4,3,5) + is_{13}s_{24}A_5^{tree}(1,3,2,4,5)\tilde{A}_5^{tree}(3,1,4,2,5)$$

- Ukupna amplituda: $\mathcal{M}_n^{tree} = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{n-2} M_n^{tree}$

$$\kappa^2 = 32\pi G_N$$

Einstein-Hilbertov Lagranžijan i baždarne teorije

- Einstein-Hilbertov i Yang-Millsov Lagranžijan:

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{2}{\kappa^2}\sqrt{-g}R, \qquad \mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$$

- Na prvi pogled ne otkrivaju očitu faktorizaciju koja bi objasnila KLT relacije
- Metrika: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$
- Kinetički dio Lagranžijana u De Donderovom baždarenju[1]: $\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\partial^2 h^{\mu\nu} + \frac{1}{4}h_\mu{}^\mu \partial^2 h_\nu{}^\nu$

Einstein-Hilbertov Lagranžijan i baždarne teorije

- Uvodimo pomoćno skalarno polje imena "dilaton" [1]:

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{2}{\kappa^2}\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi$$

- Polje dilatona se ne pojavljuje u drvastim dijagramima koji uključuju samo gravitone
- Kinetički član u De Donderovom baždarenju:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\partial^2 h^{\mu\nu} + \frac{1}{4}h_\mu{}^\mu\partial^2 h_\nu{}^\nu - \phi\partial^2\phi$$

Einstein-Hilbertov Lagranžijan i baždarne teorije

- Član s tragom moguće je ukloniti sa redefinicijama polja[1]:

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\sqrt{\frac{2}{D-2}}\phi$$

$$\phi \to \frac{1}{2}h_{\mu}{}^{\mu} + \sqrt{\frac{D-2}{2}}\phi$$

- Ovakve redefinicije ne mijenjaju dio gravitonskog polja bez traga: $P_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{D}\eta_{\mu\nu}h$

Einstein-Hilbertov Lagranžijan i baždarne teorije

- Kinetički dio Lagranžijana sa redefiniranim poljima:

$$\mathcal{L}_2 \to -\frac{1}{2} h^{\mu}{}_{\nu} \partial^2 h_{\mu}{}^{\nu} + \phi \partial^2 \phi$$

- Potrebno je ukloniti i sve ostale članove oblika:

$$h_{\mu}{}^{\mu}\,, \qquad h_{\mu}{}^{\nu} h_{\nu}{}^{\lambda} h_{\lambda}{}^{\mu}\,, \qquad \cdots$$

- Moguće je napraviti daljnju redefiniciju polja i uvesti određeno ne-linearno baždarenje tako da se tro-gravitonski vrhovi mogu izraziti preko Yang-Millsovih

Einstein-Hilbertov Lagranžijan i baždarne teorije

- Tro-gravitonski vrh[1]:

$$iG^{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2,\mu_3\nu_3}(k_1,k_2,k_3) =$$
$$-\frac{i}{2}\left(\frac{\kappa}{2}\right)\left(V_{GN}^{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3)\times V_{GN}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(k_1,k_2,k_3)+\right.$$
$$\left.V_{GN}^{\mu_2\mu_1\mu_3}(k_2,k_1,k_3)\times V_{GN}^{\nu_2\nu_1\nu_3}(k_2,k_1,k_3)\right)$$

- Pritom vrijedi:

$$V_{GN}^{\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3) = i\sqrt{2}(k_1^\rho\eta^{\mu\nu} + k_2^\mu\eta^{\nu\rho} + k_3^\nu\eta^{\rho\mu})$$

Einstein-Hilbertov Lagranžijan i baždarne teorije

- On-shell polje gravitona: $h_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu e^{ip\cdot x}$
- Cirkularna polarizacija: $\varepsilon_\mu \varepsilon^\mu = 0$
- Transverzalno baždarenje: $p_\mu \varepsilon^\mu = 0$
- Broj stupnjeva slobode gravitona: $\frac{(D-2)(D-1)}{2} - 1$
- Preostali stupnjevi slobode pripadaju dilatonu i antisimetričnom tenzorskom polju ranka 2

Dvostruka kopija

- Dekompozicija boje[4]:

$$\mathcal{A}_m^{tree} = g_s^{m-2} \sum_{P(2,...m)} [Tr\left(T^{a_1}T^{a_1}...T^{a_m}\right) \cdot A_m^{tree}(1,2,...,m)]$$

- Strukturne konstante: $\tilde{f}^{abc} = i\sqrt{2}f^{abc} = Tr\left([T^a, T^b]T^c)\right)$
- Generatori baždarne transformacije poštuju Liejevu algebru: $[T_a,[T_b,T_c]] + [T_b,[T_c,T_a]] + [T_c,[T_a,T_b]] = 0$
- Jacobijev identitet: $f_{ad}{}^e f_{bc}{}^d + f_{bd}{}^e f_{ca}{}^d + f_{cd}{}^e f_{ab}{}^d = 0$

Dvostruka kopija

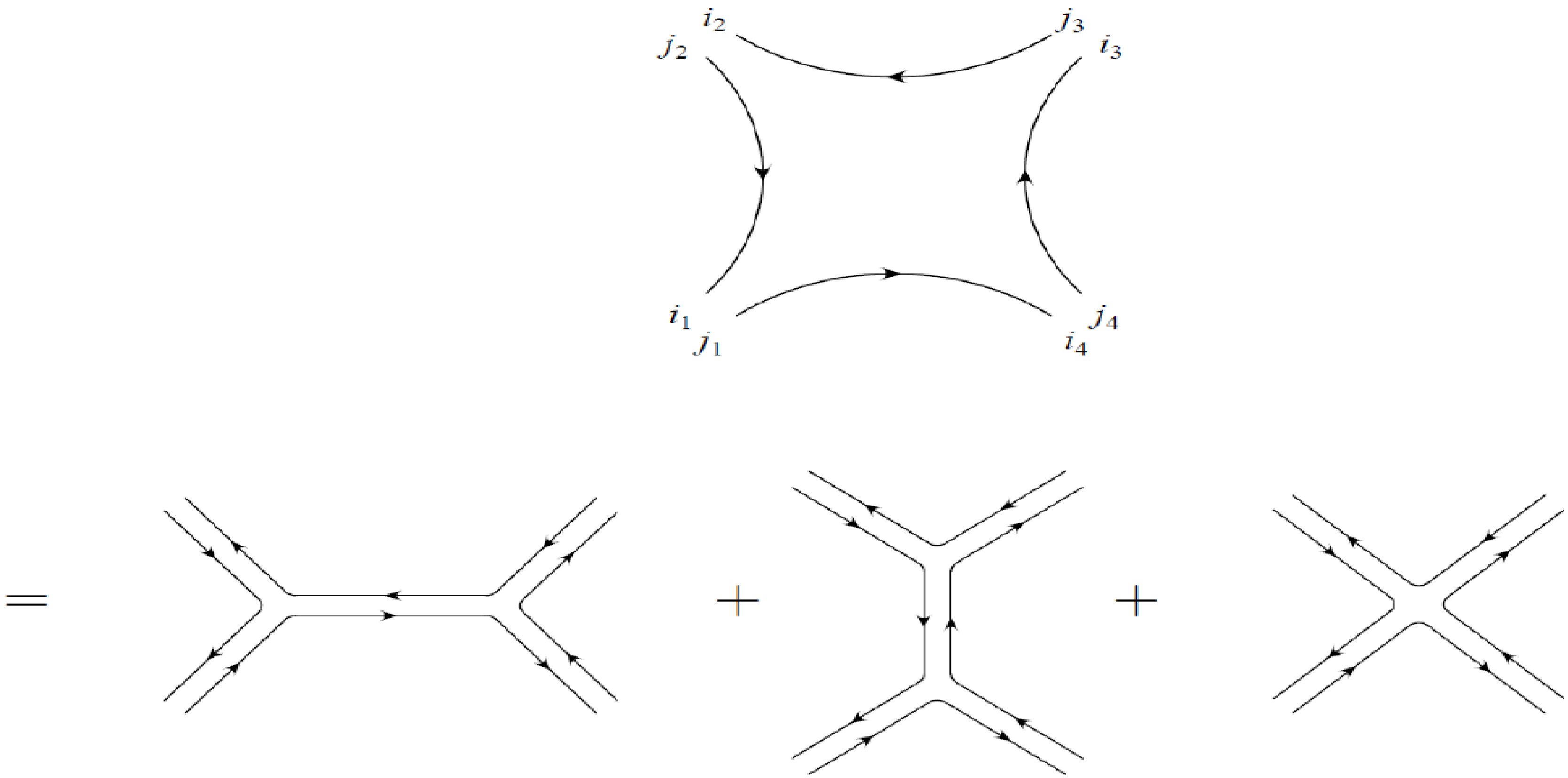
- m=4 simplifikacija
- Amplituda:

$$\mathcal{A}_4^{tree} = g_s^2[Tr(1\,2\,3\,4)A_4^{tree}(1,2,3,4) + Tr(4\,3\,2\,1)A_4^{tree}(4,3,2,1) + Tr(1\,3\,2\,4)A_4^{tree}(1,3,2,4) + Tr(4\,2\,3\,1)A_4^{tree}(4,2,3,1) + Tr(1\,2\,4\,3)A_4^{tree}(1,2,4,3) + Tr(3\,4\,2\,1)A_4^{tree}(3,4,2,1)].$$

- Uveli smo: $T^{a_i} \to i$

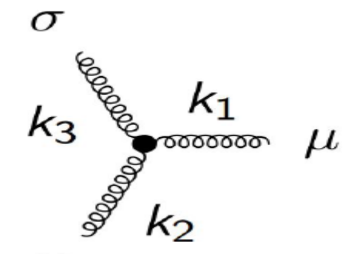
Dvostruka kopija

- Konstrukcija parcijalnih amplituda[7]:

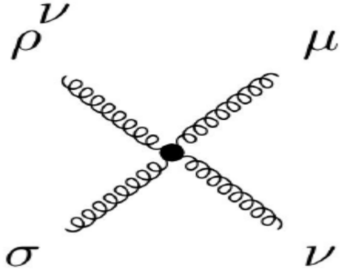


Dvostruka kopija

- Feynmanova pravila za parcijalne amplitude:



$$\frac{i}{\sqrt{2}}\left(g^{\mu\nu}(k1-k2)^{\sigma}+g^{\nu\sigma}(k2-k3)^{\mu}\right.$$
$$\left.+g^{\sigma\mu}(k3-k1)^{\nu}\right)$$



$$ig^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-\frac{i}{2}\left(g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho}+g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\right)$$

- Bojni članovi već sadržani u tragovima generatora

Dvostruka kopija

- Parcijalne amplitude zadovoljavaju određena pravila[2]:
  1) Cikličko pravilo:

$$A_m^{tree}(1,2...,m) = A_m^{tree}(2,...,m,1)$$

  2) Pravilo refleksije:

$$A_m^{tree}(1,2...,m) = (-1)^m A_m^{tree}(m,...,2,1)$$

  3) Pravilo "odvezivanja fotona":

$$\sum_{\sigma \in cyclic} A_m^{tree}(1,\sigma(2,3,...,m)) = 0$$

Dvostruka kopija

- Koristeći pravilo refleksije može se pojednostaviti izraz za ukupnu amplitudu:

$$\mathcal{A}_4^{tree} = g_s^2 [\overline{Tr}(1\,2\,3\,4) A_4^{tree}(1,2,3,4) + \overline{Tr}(1\,3\,2\,4) A_4^{tree}(1,3,2,4) + \overline{Tr}(1\,2\,4\,3) A_4^{tree}(1,2,4,3)]$$

- Pritom je uvedeno:

$$\overline{Tr}(i_1\,i_2\,i_3\,i_4) = Tr(i_1\,i_2\,i_3\,i_4) + Tr(i_4\,i_3\,i_2\,i_1)$$

Dvostruka kopija

- Koristi se konvencija u kojoj su svi impulsi vanjskih nogu izlazni (on-shell).
- Mandelstamove varijable:

$$s = (k_1 + k_2)^2$$

$$t = (k_2 + k_3)^2$$

$$u = (k_1 + k_3)^2$$

Vrijedi: s+t+u=0

Dvostruka kopija

- Prva parcijalna amplituda:

$$A_4^{tree}(1,2,3,4) = \frac{n'_s}{s} + \frac{n'_t}{t} + n_4$$

- Četvero-gluonski vrh može se apsorbirati pomoću zamjena: $n_s = n'_s + s n_4$ i $n_t = n'_t + t n_4$.
- Amplituda poprima oblik:

$$A_4^{tree}(1,2,3,4) = \frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t}$$

Dvostruka kopija

- Druga parcijalna amplituda:

$$A_4^{tree}(1,3,2,4) = \frac{n_s(1,3,2,4)}{s(1,3,2,4)} + \frac{n_t(1,3,2,4)}{t(1,3,2,4)}$$

- Potrebno izraziti sve faktore preko članova u fizikalnom poretku (1,2,3,4):

$$\begin{aligned}
s(1,3,2,4) &= (k_1 + k_3)^2 = u \\
t(1,3,2,4) &= (k_3 + k_2)^2 = t \\
n_s(1,3,2,4) &= n_u(1,2,3,4) = n_u \\
n_t(1,3,2,4) &= -n_t(1,2,3,4) = -n_t
\end{aligned}$$

Dvostruka kopija

- Druga parcijalna amplituda može se pisati kao:

$$A_4^{tree}(1,3,2,4) = \frac{n_u}{u} - \frac{n_t}{t}$$

- Slična razmatranja daju izraz za posljednju amplitudu:

$$A_4^{tree}(1,2,4,3) = -\frac{n_s}{s} - \frac{n_u}{u}$$

Dvostruka kopija

- Ukupna amplituda poprima formu:

$$\mathcal{A}_4^{tree} = g_s^2 \Big((\overline{Tr}(1\,2\,3\,4) - \overline{Tr}(1\,2\,4\,3))\frac{n_s}{s} + (\overline{Tr}(1\,2\,3\,4) - \overline{Tr}(1\,3\,2\,4))\frac{n_t}{t} + (\overline{Tr}(1\,3\,2\,4) - \overline{Tr}(1\,2\,4\,3))\frac{n_u}{u} \Big) .$$

- Kombinacije tragova mogu se pretvoriti u strukturne konstante: $\overline{Tr}(1\,2\,3\,4) - \overline{Tr}(1\,2\,4\,3) = \tilde{f}^{a_1 a_2 e}\tilde{f}^{e a_3 a_4}$
- Slijedi:

$$\mathcal{A}_4^{tree} = g_s^2 \left(\frac{\tilde{f}^{a_1 a_2 e}\tilde{f}^{e a_3 a_4} n_s}{s} + \frac{\tilde{f}^{a_2 a_3 e}\tilde{f}^{e a_4 a_1} n_t}{t} + \frac{\tilde{f}^{a_1 a_3 e}\tilde{f}^{e a_2 a_4} n_u}{u} \right) = g_s^2 \sum_{g \in \Gamma_4} \frac{c_g n_g}{p_g^2} .$$

Dvostruka kopija

- Poopćenje:

$$\mathcal{A}_m^{tree} = g_s^{m-2} \sum_{g \in \Gamma_m} \frac{c_g n_g}{\prod_{l \in P_g} p_l^2}$$

- Pravilo odvezivanja fotona za m=4:

$$A_4^{tree}(1,2,3,4) + A_4^{tree}(1,4,2,3) + A_4^{tree}(1,3,4,2) = 0$$

- Jedini način da ova suma netrivijalno isčezne je tako da bude proporcionalna sumi Mandelstamovih varijabli: $(s+t+u)\chi = 0$

Dvostruka kopija

- Amplituda u (1,2,3,4) poretku ima polove u varijablama “s” i “t”.
- Može se napraviti identifikacija:

$$A_4^{tree}(1,2,3,4) = u\chi$$

- Preostale amplitude:

$$A_4^{tree}(1,3,4,2) = t\chi \quad i \quad A_4^{tree}(1,4,2,3) = s\chi$$

Dvostruka kopija

- Eliminacija zajedničkog faktora daje:

$$tA_4^{tree}(1,2,3,4) = uA_4^{tree}(1,3,4,2),$$
$$sA_4^{tree}(1,2,3,4) = uA_4^{tree}(1,4,2,3) \quad i$$
$$tA_4^{tree}(1,4,2,3) = sA_4^{tree}(1,3,4,2).$$

- Usporedbom s eksplicitnim izrazima za parcijalne amplitude dobiva se: $n_s = n_t + n_u$
- Kinetički faktori zadovoljavaju isti Jacobijev identitet kao bojni članovi (BCJ dualnost):

$$\tilde{f}^{a_1 a_2 e}\tilde{f}^{e a_3 a_4} = \tilde{f}^{a_2 a_3 e}\tilde{f}^{e a_4 a_1} + \tilde{f}^{a_1 a_3 e}\tilde{f}^{e a_2 a_4}$$

Dvostruka kopija

- Uvrste se parcijalne amplitude u KLT relaciju za m=4:

$$M_4^{tree} = -is\left(\frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t}\right)\left(-\frac{\tilde{n}_s}{s} - \frac{\tilde{n}_u}{u}\right)$$

- Iz činjenice da kinetički faktori zadovoljavaju Jacobijev identitet slijedi:

$$M_4^{tree} = i\left(\frac{n_s\tilde{n}_s}{s} + \frac{n_t\tilde{n}_t}{t} + \frac{n_u\tilde{n}_u}{u}\right)$$

Dvostruka kopija

- Gravitacijska amplituda:

$$\mathcal{M}_4^{tree} = i\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \sum_{g\in\Gamma_4} \frac{n_g \tilde{n}_g}{p_g^2}$$

- Yang-Millsova amplituda:

$$\mathcal{A}_4^{tree} = g_s^2 \sum_{g\in\Gamma_4} \frac{c_g n_g}{p_g^2}$$

- Dvostruka kopija: zamjenom bojnih faktora u Yang-Millsovoj amplitudi sa kinetičkim faktorima (za koje vrijedi BCJ dualnost) dobiva se gravitacijska amplituda

Dvostruka kopija

- Dijagrami se mogu urediti u skup setova od tri dijagrama tako da svaki set vrijedi BCJ dualnost[2]: $c_i = c_j + c_k \rightarrow n_i = n_j + n_k$
- Kinetički faktori se mogu translatirati za neku proizvolju funkciju: $n_g \rightarrow n_g + \Delta_g$
- Pritom mora vrijediti[3]:

$$\sum_{g \in \Gamma_m} \frac{c_g \Delta_g}{\prod_{l \in P_g} p_l^2} = 0$$

Dvostruka kopija

- Yang-Millsova amplituda za m vanjskih gluona:

$$\mathcal{A}_m^{tree} = g_s^{m-2} \sum_{g \in \Gamma_m} \frac{c_g n_g}{\prod_{l \in P_g} p_l^2}$$

- Primjenom dvostruke kopije može se konstruiratu gravitacijska amplituda za m gravitona:

$$\mathcal{M}_m^{tree} = i \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{m-2} \sum_{g \in \Gamma_m} \frac{\tilde{n}_g n_g}{\prod_{l \in P_g} p_l^2}$$

Dvostruka kopija

- Poopćenje na amplitude s petljama

- Yang-Mills: $$\mathcal{A}_m^L = i^L g_s^{m-2+2L} \sum_{g\in\Gamma_m^L} \int \prod_{l=1}^{L} \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{S_g} \frac{c_g n_g}{\prod_{j\in P_g} p_j^2}$$

- Gravitacija: $$\mathcal{M}_m^L = i^{L+1} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{m-2+2L} \sum_{g\in\Gamma_m^L} \int \prod_{l=1}^{L} \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{S_g} \frac{\tilde{n}_g n_g}{\prod_{j\in P_g} p_j^2}$$

- Dokaz slijedi iz unitarne metode[9]

Dvostruka kopija

- Mogu se zamjeniti kinetički faktori sa setom drugih bojnih faktora[8]:

$$\Lambda_m^L = i^L y^{m-2+2L} \sum_{g \in \Gamma_m^L} \int \prod_{l=1}^{L} \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{S_g} \frac{c_g \tilde{c}_g}{\prod_{j \in P_g} p_j^2}$$

- Ovakva amplituda odgovara “biadjungiranoj skalarnoj teoriji”
- Lagranžijan koji definira teoriju:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \Phi^{aa'} \partial_\mu \Phi^{aa'} + \frac{y}{3} f^{abc} \tilde{f}^{a'b'c'} \Phi^{aa'} \Phi^{bb'} \Phi^{cc'}$$

- Jednadžba gibanja: $\partial^2 \Phi^{aa'} - y f^{abc} \tilde{f}^{a'b'c'} \Phi^{bb'} \Phi^{cc'} = 0$

Kerr-Schildove koordinate

- Metrika: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$
- Mala perturbacija: $|h_{\mu\nu}| << 1$
- Inverzna metrika: $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$
- Perturbacija predstavlja polje koje propagira u ravnom prostor-vremenu.
- Indeksi gravitonskog polja dižu se i spuštaju sa metrikom Minkowskog: $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$
- Cilj je riješiti Einsteinovu jednadžbu u vakuumu: $R_{\mu\nu} = 0$

Kerr-Schildove koordinate

- Račun
  i. Christoffelovi simboli:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu})$$

  ii. Riemannov tenzor:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma})$$

  iii. Riccijev tenzor:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h^{\sigma}{}_{\mu} + \partial_\sigma\partial_\mu h^{\sigma}{}_{\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu}) = 0$$

Kerr-Schildove koordinate

- Definicija: $h_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu \phi$
- Vektori svjetlosnog tipa: $\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$
- Statičan slučaj: $\partial_0 \phi = \partial_0 k^\mu = 0$
- Pretpostavlja se da je dinamika vremenske komponente sadržana u skalarnom polju
- Bez smanjenja općenitosti: $k^0 = 1$

Kerr-Schildove koordinate

- Riccijev tenzor u komponentama:

$$R^0{}_0 = \frac{1}{2} \nabla^2 \phi$$

$$R^i{}_0 = -\frac{1}{2}\partial_j(\partial^i(\phi k^j) - \partial^j(\phi k^i))$$

- Polje $A_\mu = \phi k_\mu$ zadovoljava Maxwellove jednadžbe:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \nabla^2 \phi \qquad \partial_\mu F^{\mu i} = \partial_j \partial^j(\phi k^i) - \partial_j \partial^i(\phi k^j)$$

- Skalarno polje zadovoljava linearizirano jednadžbu gibanja u biadjungiranoj skalarnoj teoriji.

Kerr-Schildove koordinate

- Definicije:

  1: $A_\mu^a = \phi c^a k_\mu$

  2: $\Phi^{aa'} = c^a \tilde{c}^{a'} \phi$

- Yang-Millsova jednadžba gibanja:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A^{\mu b} F_{\mu\nu}^c = 0$$

- Jednadžba gibanja u biadjungiranoj skalarnoj teoriji: $\partial^2 \Phi^{aa'} - y f^{abc} \tilde{f}^{a'b'c'} \Phi^{bb'} \Phi^{cc'} = 0$
- Moguće je napraviti skaliranja tako da polja zadovoljavaju ove jednadžbe: $k_\mu \to f k_\mu$, $\phi \to \frac{\phi}{f^2}$

Kerr-Schildove koordinate

- Biadjungirana skalarna teorija

$$\Phi^{aa'} = c^a \tilde{c}^{a'} \phi$$

$$\partial^2 \Phi^{aa'} - y f^{abc} \tilde{f}^{a'b'c'} \Phi^{bb'} \Phi^{cc'} = 0$$

$$\Lambda_m^L = i^L y^{m-2+2L} \sum_{g \in \Gamma_m^L} \int \prod_{l=1}^{L} \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{S_g} \frac{c_g \tilde{c}_g}{\prod_{j \in P_g} p_j^2}$$

- Baždarna teorija

$$A_\mu^a = \phi c^a k_\mu$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A^{\mu b} F_{\mu\nu}^c = 0$$

$$\mathcal{A}_m^L = i^L g_s^{m-2+2L} \sum_{g \in \Gamma_m^L} \int \prod_{l=1}^{L} \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{S_g} \frac{c_g n_g}{\prod_{j \in P_g} p_j^2}$$

- Gravitacija

$$h_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu \phi$$

$$R_{\mu\nu} = 0$$

$$\mathcal{M}_m^L = i^{L+1} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{m-2+2L} \sum_{g \in \Gamma_m^L} \int \prod_{l=1}^{L} \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{S_g} \frac{\tilde{n}_g n_g}{\prod_{j \in P_g} p_j^2}$$

Zaključak

- Einstein-Hilbertov Lagranžijan moguće urediti u formu kompatibilnu s teorijom struna
- Gravitacijske amplitude se mogu dobiti direktno iz baždarnih
- Dvostruka kopija primjenjiva i u “egzotičnim” teorijama poput biadjungirane skalarne teorije
- Istraživanja se provode u primjeni dvostruke kopije na računima s petljama
- Postoje određene simetrije u prostoru kinetičkih članova koje još treba otkriti

Literatura

- [1] Z. Bern (2002). Perturbative Quantum Gravity and its Relation to Gauge Theory. arXiv:gr-qc/0206071.
- [2] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, H. Johansson (2008). New Relations for Gauge-Theory Amplitudes. arXiv:0805.3993 [hep-ph].
- [3] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, H. Johansson (2010). Perturbative Quantum Gravity as a Double Copy of Gauge Theory. arXiv:1004.0476 [hep-th].
- [4] J. Broedel, L. J. Dixon (2012). Color-kinematics duality and double-copy construction for amplitudes from higher-dimension operators. arXiv:1208.0876 [hep-th].
- [5] M. Carrillo-Gonzalez, R. Penco, M. Trodden (2017). The classical double copy in maximally symmetric spacetimes. arXiv:1711.01296 [hep-th].
- [6] S. M. Carrol (2004). Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. San Francisco: Addison Wesley.
- [7] F. Maltoni, K. Paul, T. Stelzer, S. Willenbrock1 (2002). Color-flow decomposition of QCD amplitudes. hep-ph/0209271.
- [8] R. Monteiro, D. O'Connell, C. D. White (2014). Black holes and the double copy. arXiv:1410.0239 [hep-th].
- [9] R. Monteiro, D. O'Connell, C. D. White (2015). Gravity as a double copy of gauge theory: from amplitudes to black holes. International Journal of Modern Physics D. Vol. 24, No. 09, 1542008 (2015).
- [10] C. D. White (2017). The double copy: gravity from gluons. arXiv:1708.07056 [hep-th].