Nekomutativna Geometrija i Spektralna Akcija

Uvod

Osnovna ideja Nekomutativne Geometrije

Problem: Moderni modeli fizike čestica su matematički dosta različiti od modernih teorija gravitacije; bilo bi poželjno prezentirati ih u jedinstvenom matematičkom okviru...

Fundamentalna motivacija: **DFR paradoks** - pretpostavke gravitacije i fizike čestica nisu kompatibilne na svim energijama! Vode na uvjet:

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \implies \Delta x^\mu \Delta x^\nu = i||\theta^{\mu\nu}||$$

koji ograničuje energije do kojih modeli čestica mogu funkcionirati!

$$R = \frac{2GM}{c^2}; \lambda = \frac{\hbar c}{Mc^2} \underset{\lambda=R}{\implies} M^2 = \frac{\hbar c}{2G} \sim 10^{18}\ \mathrm{GeV}$$

Par primjera gdje se ovo koristi:

- **Efektivni modeli**, npr. electron u 2 dimenzionalnom materijalu dobiva Moyal relaciju u jakom magnetskom polju:

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$$

- **Kvantizacija teorije preko *-produkata**:

$$f \star g = fg + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n \, C_n(f,g)$$

- Predstavljanje teorije (kao moderne modele fizike čestica) u **istom formalizmu kao gravitacija**
- **Konstruiranje potpuno novih teorija**, npr.

Primjer: Efektivni model 2D elektrona

$$\mathcal{L}_m = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2}_{\text{kineticki}} - \underbrace{\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(x)}_{\text{interakcijski}} \qquad \vec{A}_j(x) = -\frac{B}{2}x_j;$$

$$\vec{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + \frac{B}{2}x_j(x); \quad [x_i, \pi_j] = i\hbar\delta_{ij} \underset{B \gg m}{\Longrightarrow} \frac{B}{2}[x_i, x_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

Put ka Nekomutativnoj Geometriji

Fizikalna motivacija Spektralne Trojke

Ideja: Promatrajući “fizikalne” opservable saznajemo sve o fizici... Je li to doista tako?

Odgovor: Da! Alain Connes je na ovo pitanje potvrdno odgovorio formalizmom “spektralne trojke”:

$$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$$

Spektralna Trojka

$\mathcal{A}$ - **abstraktna algebra**, u analogiji s algebrom funkcija na mnogostrukosti

$\mathcal{H}$ - **Hilbertov prostor** na kojem je algebra vjerno reprezentirana

$\mathcal{D}$ - **Diracov operator**, u analogiji s Laplaceovim operatorom koji određuje geometrijsku strukturu mnogostrukosti

Geometrija vs Algebra Riječnik

Točke na Topološkom Prostoru $C^\infty(\mathcal{M})$	(čista) Stanja na Algebri Nekomutativne Algebre
Vektorska Polja Vektorski Svežnjevi	Derivacije Algebre Moduli na Algebri
Riemannova Mnogostrukost Riemannova Metrika Atiyah-Singer teorem	Spektralna trojka $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ Spektralna Udaljenost(Dirac op.) Connes-Moscovici Index Thm.

Topološka Ekvivalencija

Na ovoj razini, trebamo samo algebru i Hilbertov prostor $(\mathcal{A}, \mathcal{H})$, za koje postoje sljedeći rezultati:

Theorem 1. ***(Gelfand-Naimark-Segal; The Gelfand duality)*** *Every abstract C^*-algebra $\mathcal{A}$ is isometrically *-isomorphic to a concrete C^*-algebra of operators on a Hilbert space H. If the algebra $\mathcal{A}$ is separable then we can take H to be separable.*

Theorem 2. ***(Gelfand-Naimark)*** *If a C^*-algebra is commutative then it is an algebra of continuous functions on some (locally compact, Hausdorff) topological space.*

Ukratko:

Topološki prostori **su u 1 na 1 korespondenciji s** **komutativnim C*-algebrama** (reprezentiranim na Hilbertovom prostoru)

Ako se za algebru $\mathcal{A}$ odabere da je **nekomutativna**, "generalizirajući" gornje teoreme, postaje nejasno što bi uopće **"nekomutativni topološki prostor"** trebao značiti.

Diferencijalna Struktura

Konstrukcija ***vektorskih polja***, u algebarskom jeziku spektralnih trojki, svodi se na to da se vektorska polja na mnogostrukosti ponašaju kao derivacije, tj. zadovoljavaju:

Linearnost

$$X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$$

Leibnizovo pravilo

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

kad djeluju na arbitrarnu funkciju i stoga se kao analogna stvar uzimaju ***derivacije algebre***, koje po definiciji zadovoljavaju ista svojstva.

Prostor **diferencijalnih formi** se onda dobiva kao **gradirana diferencijalna algebra dualna prostoru derivacija algebre**, tj. po analogiji: prostoru vektorskih polja.

Geometrijska Ekvivalencija

Ovdje se treba uvesti **Diracov operator** $\mathcal{D}$.

Pretpostavljajući neka svojstva Diracovog operatora (da je Hermitski i da ima kompaktni resolvent, tj. da mu se sv. vrijednosti "lijepo ponašaju"), slijede neki rezultati; kao npr.:

$$\|[\mathcal{D}, f]\| \leq \infty \quad \forall f \in \mathcal{A}$$

Nadalje se može pokazati, kao posljedica Kantorovičeve teorije transporta, da se kao definiciju **"udaljenosti među stanjima algebre"** treba uzeti:

$$d(a,b) = \sup\{|f(a) - f(b)| \colon [\mathcal{D}, f] \leq 1\}$$

i da to **odgovara udaljenosti na mnogostrukosti**, između točaka a i b.

Za danu Riemannovu mnogostrukost $(\mathcal{M}, g)$ može se zadati "**kanonska spektralna trojka**" $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$:

- Kao algebru $\mathcal{A}$ uzima se algebra C^∞- funkcija na mnogostrukosti $\mathcal{M}$
- Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ je prostor kvadratno integrabilnih prereza spinornog svežnja na $\mathcal{M}$ - $L^2(S)$.
- Kao Diracov operator $\mathcal{D}_M$ bira se Levi-Civita koneksija podignuta na spinorni svežanj na $\mathcal{M}$

Spektralna trojka:

$$(C^\infty(M), L^2(S), \mathcal{D}_M)$$

onda sadrži sve informacije kao i Riemannova mnogostrukost $(\mathcal{M}, g)$

Connesov Rekonstrukcijski Teorem

Ide li ta procedura i u obranom smjeru? Zadamo li *spektralnu trojku* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$, može li se uvijek pronaći (jedinstvena) *odgovarajuća Riemannova mnogostrukost*?

Odgovor je potvrdan, te matematički formalno pokazan u Connesovom članku ***"On the Spectral Characterization of Manifolds"*** *(str. 51).*;

Theorem 11.5. *Let $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ be a spectral triple with $\mathcal{A}$ commutative, fulfilling the five conditions of §2 with the cycle c antisymmetric. Assume that the multiplicity*[16] *of the action of $\mathcal{A}''$ in $\mathcal{H}$ is $2^{p/2}$. Then there exists a smooth oriented compact (spin^c) manifold X such that $\mathcal{A} = C^\infty(X)$.*

pod uvjetom da spektralna trojka (primarno Diracov operator) zadovoljava brojna tehnička ograničenja (regularnost, dimenzija kernela, etc.)

Prema Spektralnoj Akciji

Kako do akcije?

Zakoni se u fizici obično dobivaju putem **principa minimizacije akcije**, konstruirane sljedećim postupkom:

- Prepoznaju se **simetrije zakona fizike** koje želimo opisati
- Konstruiraju se sve **skalarne veličine** koje poštuju te simetrije
- Sve se zbroje zajedno i to se **proglasi akcijom**
- Primjeni se princip **minimizacije akcije**

Prva stvar koju očito treba odrediti su stoga **simetrije teorije**, a zatim identificirati što bi bili “**skalari**” za slučaj algebri reprezentirane na Hilbertovom prostoru.

Očiti izbori su ono čime Hilbertov prostor dolazi opremljen: **unutarnji produkt**, a kako se radi o operatorima, i **trag** u smislu sume svojstvenih vrijednosti.

Spektralna Akcija

Izbor simetrije fizike vodi na specifičan izbor Diracovog operatora! (**automorfizmi** algebre ograničavaju izbor Diracovog operatora)

Spektralna akcija koja poštuje točne fizikalne simetrije će stoga po **Connesovom argumentu o izospektralnosti** biti:

$$S_{\text{Spectral}} = <\psi, D\psi> + \mathrm{Tr}\left(\chi\left(\frac{D}{\lambda}\right)\right)$$

Skoro-komutativne Spektralne Trojke i Standardni Model

Standardni Model + OTR

Po ranijoj perskripciji, prvo **treba odrediti simetrijsku grupu naše teorije**, u ovom slučaju:

$$\underbrace{\mathrm{Diff}(M)}_{\text{OTR}} \ltimes \underbrace{U(1) \times SU(2) \times SU(3)}_{\text{Standardni Model}}$$

Tako se nešto postiže prikladnim **izborom algebre** u spektralnoj trojci:

$$A = C^{\infty}(M) \otimes A_F$$

gdje je:

$$A_F = \mathbb{C} \oplus \mathbb{H} \oplus M_3(\mathbb{C})$$

Diracov operator slijedi za produkt spektralnih trojki:

$$D = \not{\partial}_M \otimes 1 + \gamma_5 \otimes D_F$$

gdje je γ_5 pomoćni operator koji se javlja jer je gravitacijski dio spektralne trojke parno-dimenzionalan.

Stavljanje svega u spektralnu akciju daje dva komada:

- **fermionski Diracov član** $< \psi, D\psi >$, istog oblika kao kinetički član iz model fizike čestica
- **"Bozonsku akciju"**: $$\mathrm{Tr}\left(\chi\left(\frac{D}{\lambda}\right)\right)$$

koja sadrži svu poznatu fiziku; **gravitaciju, kozmološke konstantu, Weylovu gravitaciju, bozonski čestični model**, a javlja se i **Higgsovo potencijal** s razbijenom lokalnom simetrije; *bez da je rukom stavljen unutra.*

$$
\begin{aligned}
S_{\text{Spectral}} =& \frac{45\lambda^4}{4\pi^2} f_0 \int d^4x\sqrt{g} \\
&+ \frac{3\lambda^2}{4\pi^2} f_2 \int d^4x\sqrt{g}\left[\frac{5}{4}R - 2y^2 H^* H\right] \\
&+ \frac{f_4}{4\pi^2} \int d^4x\sqrt{g}\left[\frac{5}{160}\left(12R^{\mu}_{;\mu} + 11R^* R^*\right.\right. \\
&\left. - 18C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}\right) \\
&+ 3y^2\left(D_\mu H^* D^\mu H - \frac{1}{6}RH^* H\right) \\
&+ g_{03}^2 G^i_{\mu\nu}G^{\mu\nu i} + g_{02}^2 F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\mu\nu\alpha} \\
&+ \frac{5}{3}g_{01}^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
&\left. + 3z^2(H^* H)^2 - y^2(H^* H)^{\mu}_{;\mu}\right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{g_{03}^2\, f_4}{\pi^2} = 1
$$

$$
g_{03}^2 = g_{02}^2 = \frac{5}{3}\, g_{01}^2
$$

Normalizirana akcija

$$\int d^4x \sqrt{g} \left[\boxed{\frac{1}{2\kappa_0^2} R} - \boxed{\mu_0^2 (H^* H)} + \boxed{a_0 \, C_{\mu\nu\rho\sigma} \, C^{\mu\nu\rho\sigma}} \right.$$

$$+ \, b_0 \, R^2 + c_0 \, {}^*R^* R + d_0 \, R_{;\mu}{}^{\mu}$$

$$+ \boxed{e_0} + \boxed{\frac{1}{4} G^i_{\mu\nu} \, G^{\mu\nu i}} + \boxed{\frac{1}{4} F^{\alpha}_{\mu\nu} \, F^{\mu\nu\alpha}}$$

$$\left. + \boxed{\frac{1}{4} B_{\mu\nu} \, B^{\mu\nu}} + \boxed{|D_\mu \, H|^2} - \xi_0 \, R|H|^2 + \boxed{\lambda_0 (H^* H)^2} \right]$$

Einstein Gravitacija
Weyl Gravitacija
Bozonski kinetički članovi
Higgsov bozonski potencijal

Prednosti i mane ovog pristupa

1. Teorija gravitacije i fizike čestica u **ujedinjenom formalizmu**
2. **Higgsovo polje se javlja samo**, bez potrebe da se rukom stavlja unutra; posljedica **zakrivljenosti** konačno-dimenzionalnog prostora
3. **Predviđanje nove fizike** putem vezanja fundamentalnih konstanti (slaže se s SU(5) unifikacijom)
4. Ne može se bilo koji model fizike ubaciti u ovaj formalizam; **daje mehanizam za selekciju model koje se treba promatrati** (i kao bonus; model fizike čestica sličan standardnom modelu je jedan od minimalnih modela koji se mogu ovako opisati)

1. **Čestice koje se javljaju u teoriji moraju se "rukom staviti" u model**; recimo nema nikakvog algebarskog argumenta za 3 fermionske familije
2. Pristup **funkcionira samo za opise Riemannovih mnogostrukosti** (radi i za Lorentzove, do Heat-Kernel razvoja)
3. **Akcija koja se dobije je klasična**, treba se još kvantizirati standardnim metodama kanonske kvantizacije (iako se radi na path-integral kvantizaciji direktno spektralnih trojki)

Hvala na pažnji!