SSIIUF

Samosila i gravitacijski valovi

Maja Milas
mentor izv. prof. dr. sc. Ivica Smolić

Sadržaj

Notacija i konvencije

- grčki indeksi $\mu, \nu, \ldots$ = komponente 4-vektora i tenzora
- latinski indeksi $i, j, \ldots$ = prostorne komponente
- 0 = vremenska komponenta
- latinski indeksi $a, b, \ldots$ = apstraktni prostornovremenski indeksi

- metrika Minkowskog η_{ab}, potpis $(-1, 1, 1, 1)$
- prirodne jedinice $c = 1$

01

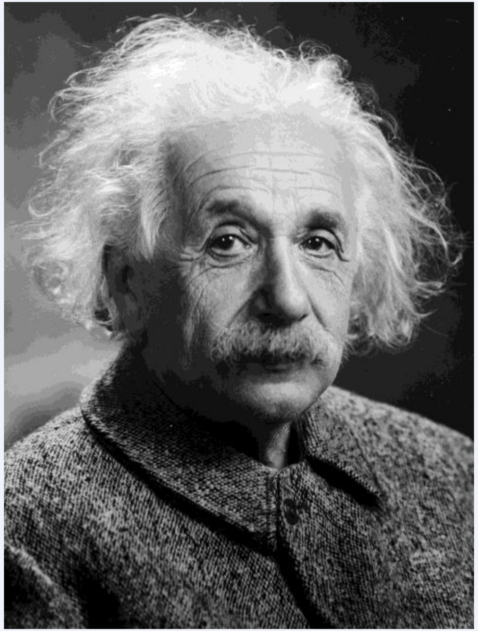
Opća teorija relativnosti

Einsteinova jednadžba

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

OTR

- poopćenje Newtonove teorije gravitacije
- gravitacijska sila je **fundamentalno** svojstvo prostora



Slika 1. Albert Einstein

Nova ideja

U općoj teoriji relativnosti tvar i energija zakrivljuju prostorvrijeme, a zakrivljeno prostorvrijeme uvjetuje njihovo gibanje i izmjenu.

Einsteinova jednadžba

Newton

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Riccijev tenzor
('derivacija')

$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$

metrika koja opisuje
zakrivljenost prostovremena
('potencijal')

tenzor energije i
impulsa ('gustoća
materije')

Einsteinova jednadžba

Newton

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

$$\equiv G_{\mu\nu}\,[g]$$

Einsteinov tenzor

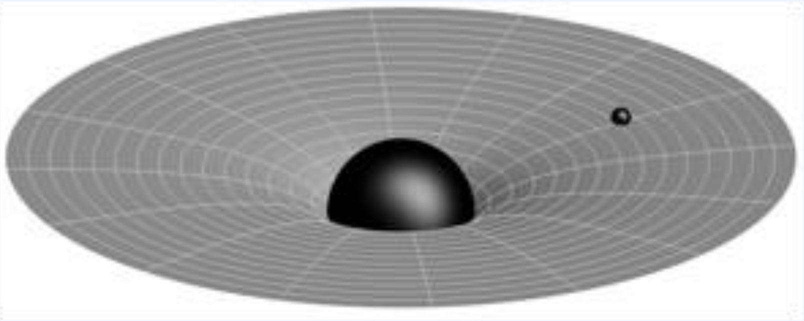
$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

02

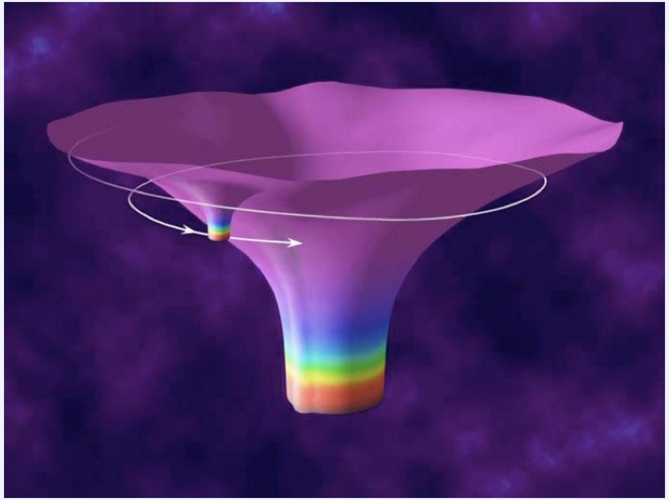
Samosila i gravitacijski valovi

Samosila

- sila kojom tijelo djeluje samo na sebe (vlastitim poljem)
- EMRI = „extreme-mass-ratio-inspiral"



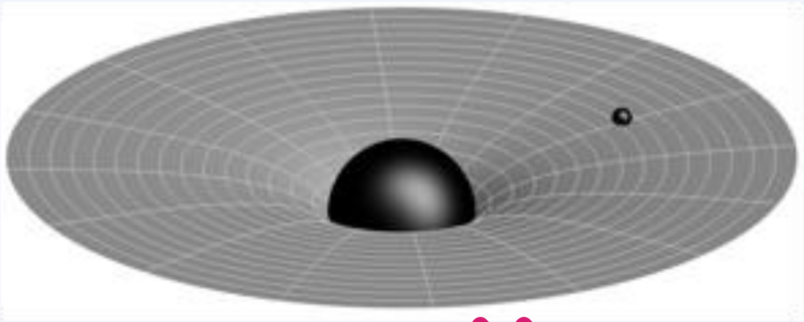
Slika 2. EMRI sustav



Slika 3. Potencijal u EMRI sustavu

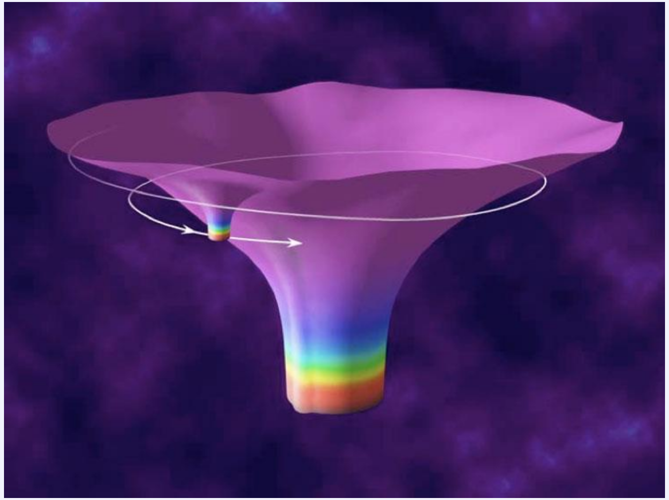
Samosila

- sila kojom tijelo djeluje samo na sebe (vlastitim poljem)
- EMRI = „extreme-mass-ratio-inspiral”



Slika 2. EMRI sustav

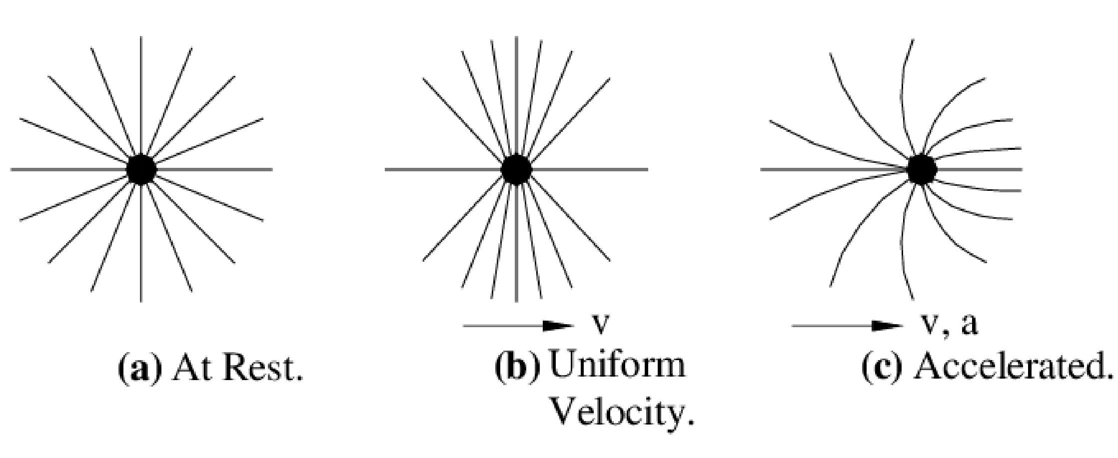
gravitacijski valovi



Slika 3. Potencijal u EMRI sustavu

Samosila u elektromagnetizmu

- statičan naboj možemo tretirati kao testni -> djeluju samo vanjska polja
- akcelerirani naboj

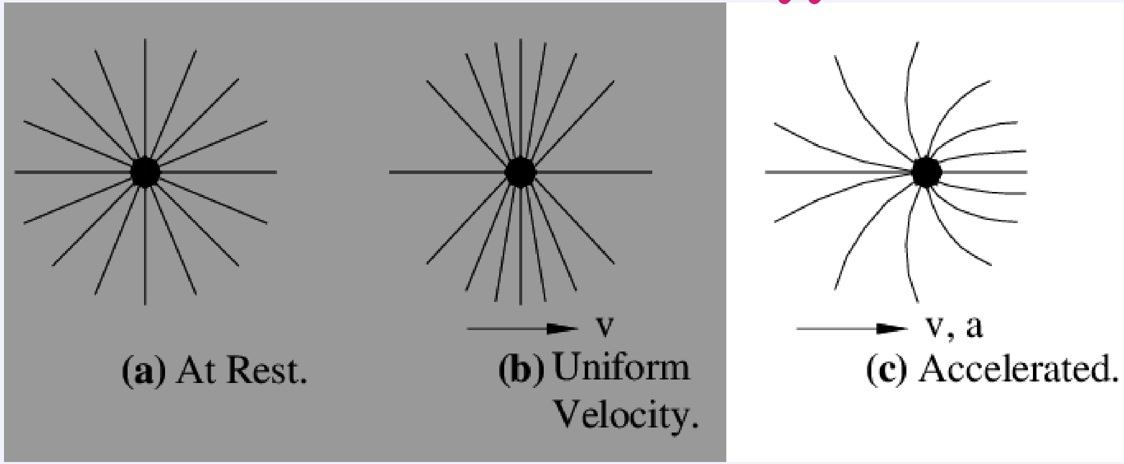


Slika 4. Polje točkastog naboja

Samosila u elektromagnetizmu

- statičan naboj možemo tretirati kao testni -> djeluju samo vanjska polja
- akcelerirani naboj

» EM valovi



Slika 4. Polje točkastog naboja

Aproksimacija točkastog tijela

- Einsteinova jednadžba **nije linearna**
- promatramo EMRI sustav (malo tijelo mase m)

$$g_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 h_{\mu\nu}^{(2)} + O(\epsilon^3)$$

pozadinska metrika

gravitacijske perturbacije

Aproksimacija točkastog tijela

- Einsteinova jednadžba **nije linearna**
- promatramo EMRI sustav (malo tijelo mase m)

$$g_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 h_{\mu\nu}^{(2)} + O(\epsilon^3)$$

$$T_{\mu\nu} = \epsilon T_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 T_{\mu\nu}^{(2)} + O(\epsilon^3)$$

Einsteinova jd.

$$G_{\mu\nu}[g] = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Aproksimacija točkastog tijela

- Einsteinova jednadžba **nije linearna**
- promatramo EMRI sustav (malo tijelo mase m)

$$g_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} + \epsilon h^{(1)}_{\mu\nu} + \epsilon^2 h^{(2)}_{\mu\nu} + O(\epsilon^3)$$

$$T_{\mu\nu} = \epsilon T^{(1)}_{\mu\nu} + \epsilon^2 T^{(2)}_{\mu\nu} + O(\epsilon^3)$$

Einsteinova jd.

$$G_{\mu\nu}[g] = 8\pi T_{\mu\nu}$$

1 $\delta G_{\mu\nu}[h^{(1)}] = 8\pi T^{(1)}_{\mu\nu}$

Aproksimacija točkastog tijela

- Einsteinova jednadžba **nije linearna**
- promatramo EMRI sustav (malo tijelo mase m)

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon h^{(1)}_{\mu\nu} + \epsilon^2 h^{(2)}_{\mu\nu} + O(\epsilon^3)$$

$$T_{\mu\nu} = \epsilon T^{(1)}_{\mu\nu} + \epsilon^2 T^{(2)}_{\mu\nu} + O(\epsilon^3)$$

$\Rightarrow$

Einsteinova jd.

$$G_{\mu\nu}[g] = 8\pi T_{\mu\nu}$$

1. $$\delta G_{\mu\nu}[h^{(1)}] = 8\pi T^{(1)}_{\mu\nu}$$
2. $$\delta G_{\mu\nu}[h^{(2)}] = 8\pi T^{(2)}_{\mu\nu} - \delta^2 G_{\mu\nu}[h^{(1)}]$$

Aproksimacija točkastog tijela

2 $$\delta G_{\mu\nu}[h^{(2)}] = 8\pi T^{(2)}_{\mu\nu} - \underbrace{\delta^2 G_{\mu\nu}\left[h^{(1)}\right]}$$

sadrži kvadratne članove $h^{(1)}_{\mu\nu}$ koji se ponašaju $\propto m^2/r^4$ u blizini tijela m

NIJE INTEGRABILNO!

MiSaTaQuWa jednadžbe

- trenutno najbolji opis gibanja „malog tijela" u OTR-u (uzimaju prvi red korekcije zbog samosile)
- tenzor energije i impulsa točkastog izvora

$$T^{(1)}_{\mu\nu} = m u_a(t) u_b(t) \frac{\delta^{(3)}(x^i - z^i(t))}{\sqrt{-g}} \frac{d\tau}{dt}$$

- Lorentzovo baždarenje

$$\nabla^b \tilde{h}_{ab} = 0 \qquad \tilde{h}_{ab} \equiv h_{ab} - \tfrac{1}{2} h g_{ab}$$

MiSaTaQuWa jednadžbe

- trenutno najbolji opis gibanja „malog tijela” u OTR-u (uzimaju prvi red korekcije zbog samosile)
- tenzor energije i impulsa točkastog izvora

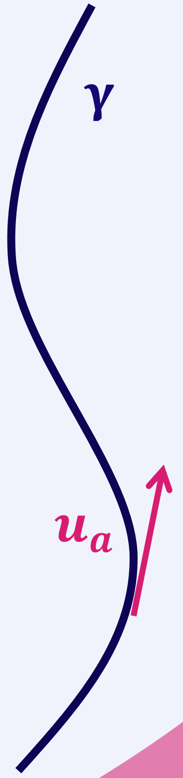
$$T^{(1)}_{\mu\nu} = m u_a(t) u_b(t) \frac{\delta^{(3)}(x^i - z^i(t))}{\sqrt{-g}} \frac{d\tau}{dt}$$

- Lorentzovo baždarenje

$$\nabla^b \tilde{h}_{ab} = 0 \qquad \tilde{h}_{ab} \equiv h_{ab} - \tfrac{1}{2} h g_{ab}$$

- svjetska linija

$$x^i(t) = z^i(t)$$



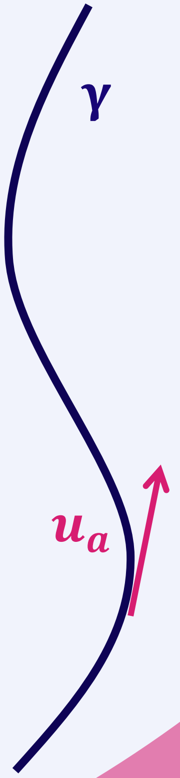
želimo korekciju na geodezik!

MiSaTaQuWa jednadžbe

- uvrštavamo u 1. red Einsteinove jednadžbe

$$\delta G_{\mu\nu}[h^{(1)}] = 8\pi T^{(1)}_{\mu\nu}$$

$$\nabla^c \nabla_c \tilde{h}_{ab} - 2R^c{}_{ab}{}^d \tilde{h}_{cd} = -16\pi m u_a(t) u_b(t) \frac{\delta^{(3)}(x^i - z^i(t))}{\sqrt{-g}} \frac{d\tau}{dt}$$

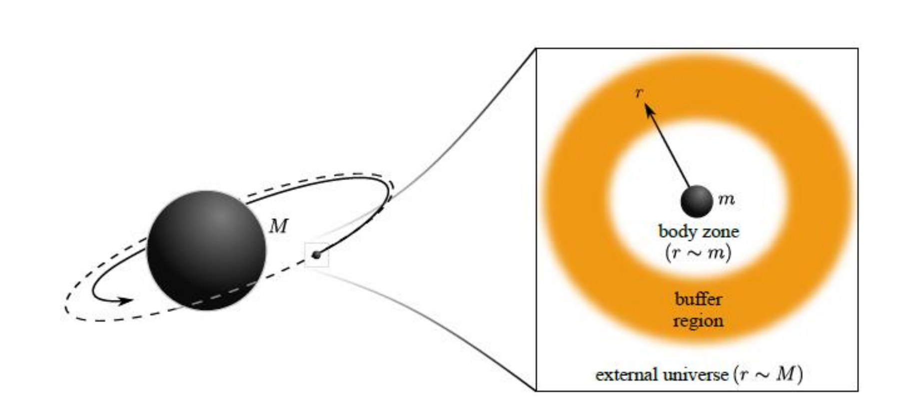


- međutim, ako želimo dobiti **negeodetska** gibanja, moramo relaksirati Lorentzovo baždarenje

  … sustav više **nije ekvivalentan** Einsteinovom

Usporedba asimptotskih razvoja

- $g_{\mu\nu}(\lambda)$ = glatka jednoparametarska familija metrika koja se skuplja u nulu za $\lambda \to 0$
- blisko područje (eng. „near-zone”) i daleko područje (eng. „far-zone”)



Slika 5. Područja asimptotskog razvoja za EMRI

Usporedba asimptotskih razvoja

- CILJ: korekcija na svjetsku liniju γ zbog samosile
  - korekcija opisana vektorskim poljem Z^i = infinitezimalni pomak
  - M je masa, a S spin **malog** tijela

$$\frac{d^2Z^i}{dt^2} = \frac{1}{2M}S^{kl}R_{kl0}{}^{i} - R_{0j0}{}^{i}Z^j - \left(h^{tail\ i}{}_{0,0} - \frac{1}{2}h^{tail}{}_{00}{}^{,i}\right)$$

03

Rigozoran izvod gravitacijske samosile

Pretpostavke i ključne ideje izvoda iz [2]

Pretpostavke

- glatka, jednoparametarska familija metrika $g_{ab}(\lambda)$ u kojoj se prisutno tijelo skuplja u dimenziju nula na samosličan način

(i) Postoji prirodni limes

$g_{ab}(\lambda)$ je takva da postoje koordinate x^{α} takve da je $g_{\mu\nu}(\lambda, x^{\alpha})$ glatka u (λ, x^{α}) barem za $r > \lambda\bar{R}$ (gdje je $r \equiv \sqrt{x_i x^i}$, a $\bar{R}$ konstanta).

Za svaki λ i $r > \lambda\bar{R}$, $g_{ab}(\lambda)$ je rješenje vakuumske Einsteinove jednadžbe. Nadalje, $g_{\mu\nu}(\lambda, = 0\ x^{\alpha})$ je glatka u x^{α}, uključujući $r = 0$, te je za $\lambda = 0$ krivulja γ definirana s $r = 0$ vremenskog tipa.

Pretpostavke

- glatka, jednoparametarska familija metrika $g_{ab}(\lambda)$ u kojoj se prisutno tijelo skuplja u dimenziju nula na samosličan način

(ii) Postoji skalirani limes

Za svaki t_0, definiramo

$$\bar{t} \equiv \frac{t - t_0}{\lambda} \qquad \bar{x}^i \equiv \frac{x^i}{\lambda}$$

te je metrika $\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\lambda; t_0, \bar{x}^\alpha) \equiv \lambda^{-2} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\lambda; t_0, \bar{x}^\alpha)$ glatka u $(\lambda; t_0; \bar{x}^\alpha)$ za $\bar{r} \equiv\ r/\lambda\ >\ \bar{R}$.

Pretpostavke

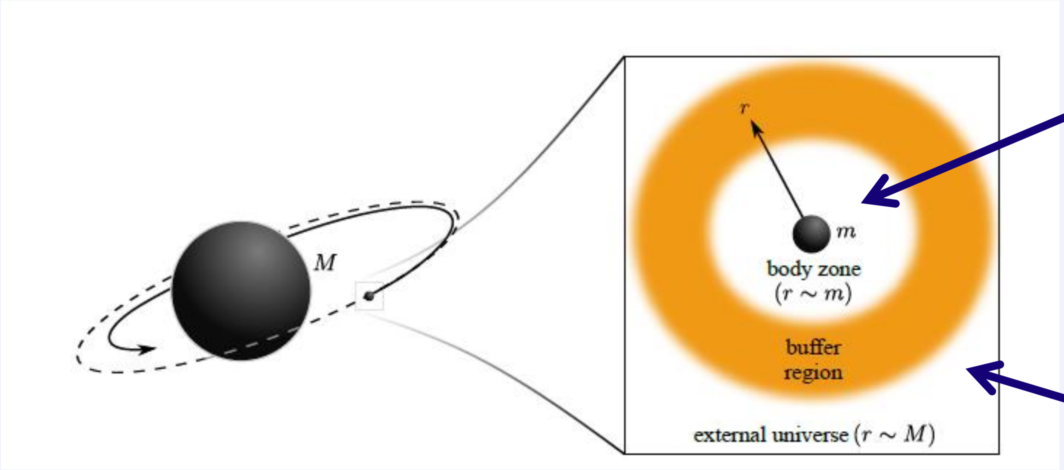
- pretpostavke (i) i (ii) ne određuju potpuno $g_{ab}(\lambda)$ (mogu se pojaviti diskontinuiteti)

(iii) Uvjet uniformnosti

Svaka komponenta $g_{ab}(\lambda)$ u koordinatama x^α je glatka funkcija u svim varijablama.

Korespondencija pojmova

- pretpostavke (i) i (ii) ne određuju potpuno $g_{ab}(\lambda)$ (mogu se pojaviti diskontinuiteti)



Slika 5. Područja asimptotskog razvoja za EMRI

prirodni limes = postoji blisko područje

skalirani limes = postoji daleko područje

Posljedice: asimptotski ravna pozadina

- Taylorov razvoj $g_{ab}(\lambda)$ i $\bar{g}_{\bar{a}\bar{b}}(\lambda)$ do konačnih redova N i M s istim koeficijentima u razvoju
- za pozadinsku metriku dobivamo

$$\bar{g}_{\bar{a}\bar{b}}(\lambda = 0; t_0; \bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{M} \left(\frac{1}{\bar{r}}\right)^m (a_{\mu\nu})_{0m}(t_0; \theta, \varphi)$$

Posljedice: asimptotski ravna pozadina

- Taylorov razvoj $g_{ab}(\lambda)$ i $\bar{g}_{\bar{a}\bar{b}}(\lambda)$ do konačnih redova N i M s istim koeficijentima u razvoju
- za pozadinsku metriku dobivamo

$$\bar{g}_{\bar{a}\bar{b}}(\lambda = 0; t_0; \bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{M} \underbrace{\left(\frac{1}{\bar{r}}\right)^m (a_{\mu\nu})_{0m}(t_0; \theta, \varphi)}_{\text{nema ovisnosti o } \bar{t} \text{ i samo negativne potencije } \bar{r}}$$

Posljedice: geodezik i aproksimacija točkaste čestice

- BSO možemo izborom koordinata metriku izraziti kao

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + O(r) + \lambda h_{\alpha\beta} + O(\lambda^2) \qquad h_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}(t,\theta,\varphi)}{r} + O(1)$$

Posljedice: geodezik i aproksimacija točkaste čestice

- BSO možemo izborom koordinata metriku izraziti kao

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + O(r) + \lambda h_{\alpha\beta} + O(\lambda^2) \qquad h_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}(t,\theta,\varphi)}{r} + O(1)$$

- uvrštavamo u prvi red linearizianih Einsteinovih jednadžbi i primjenjujenmo Bianchijev identitet $\nabla^a G^{(1)}_{ab} = 0$
- za $M \neq 0$

$$T_{ab} = M u_a u_b \frac{\delta^{(3)}(x^i)}{\sqrt{-g}} \frac{d\tau}{dt}$$

4-brzina γ koja mora biti **geodezik**

Opis gibanja do prvog reda u λ

- što je perturbativna korekcija za $\lambda > 0$?

$$x^i(\lambda, t) = \lambda Z^i(t) + O(\lambda^2) \qquad\qquad Z^0 = 0$$

- ovisi o izboru baždarenja

$$x^\mu \to \hat{x}^\mu = x^\mu - \lambda A^\mu(x^\nu) + O(\lambda^2)$$

$$Z^i(t) \to \hat{Z}^i(t) = Z^i(t) - A^i(t, x^j = 0)$$

- maseni dipolni moment je nula za $\hat{\hat{x}}^i = 0$
- center mase $\hat{x}^i = 0$

Opis gibanja do prvog reda u λ

- što je perturbativna korekcija za $\lambda > 0$?

$$x^i(\lambda, t) = \lambda Z^i(t) + O(\lambda^2) \qquad\qquad Z^0 = 0$$

- ovisi o izboru baždarenja

$$x^\mu \to \hat{x}^\mu = x^\mu - \lambda A^\mu(x^\nu) + O(\lambda^2)$$

$$Z^i(t) \to \hat{Z}^i(t) = Z^i(t) - A^i(t, x^j = 0)$$

- maseni dipolni moment je nula za $\hat{x}^i = 0$
- center mase $\hat{x}^i = 0$

$$\hat{Z}^i(t) = 0$$

želimo općenitu jednadžbu za Z^i

Opis gibanja do prvog reda u λ

- rješavamo linearizirane Einsteinove jednadžbe do 2. reda ...
- korekcija na svjetsku liniju γ zbog samosile
  - Z^i = infinitezimalni pomak
  - M je masa, a S spin malog tijela

$$\boxed{\frac{d^2 Z^i}{dt^2} = \frac{1}{2M} S^{kl} R_{kl0}{}^{i} - R_{0j0}{}^{i} Z^j - \left(h^{tail\ i}{}_{0,0} - \frac{1}{2} h^{tail}{}_{00}{}^{,i}\right)}$$

$$h_{ab}^{tail}(x) = M \int_{-\infty}^{\tau_{ret}^{-}} \left(G^{+}_{aba'b'} - \tfrac{1}{2} g_{ab} G^{+c}_{ca'b'}\right)\left(x, z(\tau')\right) u^{a'} u^{b'} d\tau'$$

Opis gibanja do prvog reda u λ

- rješavamo linearizirane Einsteinove jednadžbe do 2. reda …
- korekcija na svjetsku liniju γ zbog samosile
    - Z^i = infinitezimalni pomak
    - M je masa, a S spin malog tijela

$$\boxed{\frac{d^2Z^i}{dt^2} = \underbrace{\frac{1}{2M}S^{kl}R_{kl0}{}^{i}}_{\text{„spinska sila”}} - \underbrace{R_{0j0}{}^{i}Z^j}_{\text{„devijacija geodezika”}} - \underbrace{\left(h^{tail\ i}{}_{0,0} - \frac{1}{2}h^{tail}{}_{00}{}^{,i}\right)}_{\text{samosila!}}}$$

04

Zaključak i dodaci

Zaključak

- pretpostavili isključivo (i)-(iii) i dobili korekciju
- ovaj pristup ne daje dobar globalni opis
  - traži se samo-konzistentna diferencijalna jednadžba
- EMRI sustavi – MiSaTaQuWa jednadžbe

Hvala na pažnji!

CREDITS: This presentation template was created by Slidesgo, and includes icons by Flaticon, and infographics & images by Freepik

Dodatak: motivacija za limese

- jednoparametarska familija izgrađena iz Schwarzschild-de Sitterove metrike
- limes ovisi o načinu **identifikacije točaka na mnogostrukosti**

$$ds^2(\lambda) = -\left(1 - \frac{2M_0\lambda}{r} - C_0 r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M_0\lambda}{r} - C_0 r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Dodatak: motivacija za limese

- (t, r, θ, φ) de Sitterovo prostorvrijeme

$$ds^2(\lambda = 0) = -(1 - C_0 r^2)dt^2 + (1 - C_0 r^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

- $\bar{t}, \bar{r}$ $\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \lambda^{-2} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ Schwarzschildovo prostorvrijeme

$$d\bar{s}^2(\lambda = 0) = -\left(1 - \frac{2M_0}{\bar{r}}\right) d\bar{t}^2 + \left(1 - \frac{2M_0}{\bar{r}}\right)^{-1} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2$$

$\boldsymbol{\lambda \to 0}$

Literatura

Članci (najvažniji)

- [1] Leor Barack i Adam Pound. ”Self-force and radiation reaction in general relativity”. Reports on Progress in Physics 82.1 (2018.)
- [2] Samuel E Gralla i Robert M Wald. ” A rigorous derivation of gravitational self-force”. Classical and Quantum Gravity

Slike

- Slika 1. https://hr.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein
- Slike 2. i 3. https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_mass_ratio_inspiral
- Slika 4. https://www.researchgate.net/figure/Electric-Field-of-a-Charged-Particle_fig2_2177605
- Slika 5. [1]