

Proces Drella i Yana i potraga za teškim česticama na hadronskim sudarivačima

Lucija Bajan, F-3936

Mentor: izv. prof. dr. sc. Krešimir Kumerički
Fizički odsjek, PMF, Bijenička cesta 32, 10 000 Zagreb

25. siječnja 2016.

Sažetak

Drell-Yan proces ključan je za razumijevanje interakcija koje se odvijaju na hadronskim sudarivačima, s teoretske i eksperimentalne točke gledišta. U sudarima hadrona anihiliraju se kvark i antikvark, te se stvori par suprotno nabijenih leptona. Povećanjem energije sudarivača otvara se mogućnost za otkriće teških čestica izvan standardnog modela. Cilj ovog rada bio je izračunati udarni presjek za proces sudara dva hadrona u par mion-antimion, te provesti račun za proces u kojemu nastaje par teških suprotno nabijenih leptona. Također smo proučili kako luminositet i energija centra mase sudarivača mijenja doseg mase čestica koje možemo proizvesti.

1 Uvod

Hadronski sudarivači, bilo proton-proton ili proton-antiproton, centralni su u istraživanju fizike izvan standardnog modela. LHC (engl. Large Hadron Collider) najveći je hadronski sudarivač čestica izgrađen od strane CERN-a (Europski centar za nuklearna istraživanja, Ženeva) u periodu od 1998. do 2008. godine u suradnji s više od 10 000 znanstvenika i inženjera. Nalazi se u tunelu dugom 26.7 *km* na dubini od 175 *m*. Kako bi se postigle vrlo visoke energije za ubrzanje čestica, koriste se vrlo jaki magneti i složen sustav ubrzanja. Na LHC-u se prvenstveno sudaraju snopovi protona na jako visokim energijama. Dizajniran je kako bi omogućio rad na energiji centra mase $\sqrt{s} = 14$ TeV-a. U početku je radio na energiji od ukupno 7 TeV-a te je 2013. godine povećao energiju na 8 TeV-a nakon čega je privremeno prestao raditi. 2015. godine postigao je energiju od 13 TeV-a. Primarna svrha LHC-a je istraživanje teorije elementarnih čestica, daljnjih svojstava Higgsovog bozona, priroda tamne materije, teorija struna, te potraga za česticama koje predviđa teorija supersimetrija (SUSY).

Nakon otkrića Higgsovog bozona u znanstvenoj zajednici počelo se intenzivnije raspravljati o potrebi za proton-proton sudarivaču energije puno veće od one koju omogućuje LHC. Najčešće se spominje vrijednost od 100 TeV-a za energiju takvog sudarivača. Zbog svojih specifičnih karakteristika, Higgsov bozon predstavlja sam po sebi novu fiziku. Akcelerator energije od 100 TeV-a omogućio bi nam precizno mjerenje samointerakcije Higgsovog bozona te time dao odgovore o porijeklu i masi bozona. Također bi nam akcelerator tako visoke energije omogućio potragu za novim elementarnim česticama težima za red veličine od onih koje možemo proizvesti na LHC-u. Nove čestice koje bi LHC mogao proizvesti u malim

brojevima, novi sudarivač bi mogao proizvesti i do sto puta više. Energija centra mase i luminozitet dvije su najbitnije karakteristike koje određuju potencijal sudarivača. Što imamo veću energiju centra mase i luminozitet, bit ćemo u mogućnosti proizvesti čestice veće mase i u većem broju.

2 Partonske distribucijske funkcije

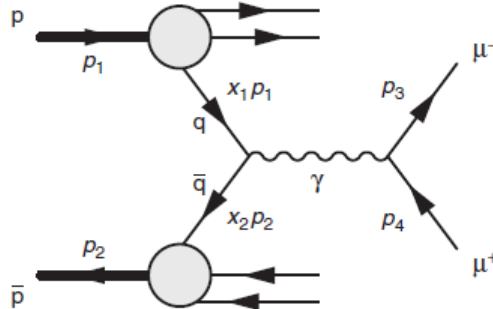
Fundamentalni proces u hadronskim sudarivačima je interakcija dva partona bilo kvarkova, antikvarkova ili gluona. Kako protoni nisu elementarne čestice, energija sudara njihovih sastavnih dijelova bit će nešto manja, ali još uvijek u području TeV-a. U statičkom modelu proton je sagrađen od dva up-kvarka i jednog down-kvarka. U stvarnosti proton je puno dinamičniji sustav gdje kvarkovi konstantno izmjenjuju gluone koji mogu stvarati virtualne parove kvark-antikvark. Dinamika te interakcije rezultira distribucijom impulsa kvarkova unutar protona. Te distribucije izražavaju se preko *Partonskih distribucijskih funkcija* (PDF). Na primjer, PDF up-kvarka u protonu definiran je na način da $u^p(x)\delta x$ predstavlja broj kvarkova unutar protona s udjelom impulsa između x i $x + \delta x$, gdje je $u^p(x)$ partonska distribucijska funkcija. Funkcionalni oblik PDF-ova ovisi o detaljnoj dinamici protona. PDF-ovi se ne mogu odrediti teorijski pošto QCD ima veliku konstantu vezanja, $\alpha_s \sim \mathcal{O}(1)$, te se ne može primijeniti račun smetnje. Iz tog razloga se PDF-ovi moraju dobiti iz mjerenja strukturnih funkcija u duboko neelastičnom raspršenju. Za duboko neelastično raspršenje elektrona na protonu, strukturna funkcija F_2^{ep} ima sljedeći oblik:

$$F_2^{ep}(x) = x \sum_i Q_i^2 q_i^p(x) \quad (1)$$

gdje je $q_i^p(x)$ partonska distribucijska funkcija, a Q_i naboj kvarka. Osim valentnih kvarkova u protonu (uud), postoje i takozvani kvarkovi mora koji nastaju iz virtualnih gluona $g \rightarrow q\bar{q}$. No u ovom radu njih nećemo uzeti u obzir.

3 Drell-Yan proces

Drell-Yan proces odvija se na visokim energijama kod sudara hadrona. Njihovim sudarom anihiliraju se kvark iz jednog hadrona i antikvark iz drugog hadrona, te se stvori ili virtualni foton ili Z bozon. Stvorena čestica raspada se na par suprotno nabijenih leptona (slika 1).



Slika 1: Drell-Yan proces u kojemu se sudaraju $p\bar{p}$ te nastaje virtualni foton koji se raspada u par $\mu^+\mu^-$ [1]

Proces su prvotno predložili Sidney Drell i Tung-Mow Yan 1970. godine kako bi opisali produkciju para lepton-antilepton u visokoenergetskim hadronskim sudarima. Osim što Drell-Yan proces omogućuje dobivanje korisnih podataka o partonskim distribucijskim funkcijama, također omogućuje potragu za teškim česticama na hadronskim sudarivačima. Ako postoji neutralni teški bozon (Z' bozon), bit će otkriven preko rezonance u mjerenjima diferencijalnog udarnog presjeka u ovisnosti o invarijantnoj masi leptonskog para. Također, omogućuje potragu za teškim leptonima na vrlo visokim energijama u hadronskim sudarivačima.

3.1 Udarni presjek za proces $p\bar{p} \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$

Većina procesa u QCD ne može se izračunati perturbativnim računom zbog zatočenja kvarkova i gluona tj. neopažanja istih kao slobodnih čestica. Zahvaljujući kromodinamičkom faktorizacijskom teoremu, udarni presjek za proces $p\bar{p} \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ možemo rastaviti na dva dijela. Prvi, koji se odnosi na udarni presjek anihilacije kvarka i antikvarka u par leptona (u našem slučaju miona), te drugi koji se odnosi na tok kvarkova i antikvarkova iz hadrona. Stoga, ukupni udarni presjek glasi [2]

$$\sigma(h_A + h_B \rightarrow \mu^+\mu^- X) = \sum_j \sigma(q_j\bar{q}_j \rightarrow \mu^+\mu^-)(\text{tok } q_j \text{ i } \bar{q}_j \text{ iz hadrona } h_A \text{ i } h_B) \quad (2)$$

gdje sumiramo po okusima kvarkova. Udarni presjek za proces $q_j\bar{q}_j \rightarrow \mu^+\mu^-$ izračunat je u dodatku A te iznosi

$$\sigma_{CM} = \frac{\alpha^2\pi}{3E^2}Q(q)^2 \quad (3)$$

gdje je $Q(q)$ naboj kvarka. Kvarkovi posjeduju dodatni kvantni broj, boju, te je ona očuvana. Iz tog razloga u ovom procesu mogu se anihilirati $r\bar{r}, b\bar{b}, g\bar{g}$ kvarkovi. Stoga je vjerojatnost da će kvark iz prvog hadrona imati istu boju kao kvark iz drugog hadrona $1/3$. Tok partona iz hadrona doprinosi članom

$$\frac{1}{9} [q_j^A(x_1)\bar{q}_j^B(x_2) + \bar{q}_j^A(x_1)q_j^B(x_2)] dx_1 dx_2 \quad (4)$$

gdje je $q_j^A(x_1)dx_1$ broj kvarkova okusa j u hadronu A s udjelom impulsa x_1 , a $\bar{q}_j^B(x_2)dx_2$ broj antikvarkova unutar hadrona B s udjelom impulsa x_2 . Množenjem izraza (3) i (4) dobijemo ukupni diferencijalni udarni presjek za proces $p\bar{p} \rightarrow \mu^+\mu^-$ gdje j predstavlja okus kvarka.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} &= \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} \frac{1}{9} \sum_{j, \text{boja}} Q_j^2 [q_j^A(x_1)\bar{q}_j^B(x_2) + \bar{q}_j^A(x_1)q_j^B(x_2)] \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} \frac{1}{3} \sum_j Q_j^2 [q_j^A(x_1)\bar{q}_j^B(x_2) + \bar{q}_j^A(x_1)q_j^B(x_2)] \end{aligned} \quad (5)$$

U literaturi se najčešće diferencijalni udarni presjek izražava preko luminoznosti

$$\mathcal{L}_{j\bar{j}}^{AB}(\tau) \equiv \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 [q_j^A(x_1)\bar{q}_j^B(x_2) + \bar{q}_j^A(x_1)q_j^B(x_2)] \cdot \delta(x_1 x_2 - \tau) \quad (6)$$

gdje je $\tau = m^2/s$ omjer invarijantne mase sustava miona i energije centra mase sudarajućih hadrona. Koristeći izraz (6) možemo napisati jednadžbu za diferencijalni udarni presjek po kvadratu invarijantne mase

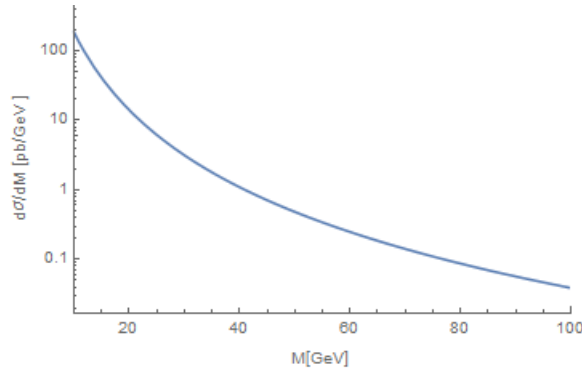
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dm^2} &= \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} \frac{1}{m^2} \frac{1}{3} \sum_j \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 x_1 x_2 Q_j^2 [q_j^A(x_1) \bar{q}_j^B(x_2) + \bar{q}_j^A(x_1) q_j^B(x_2)] \delta(x_1 x_2 - \tau) \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} \frac{1}{m^2} \frac{1}{3} \sum_j \int_\tau^1 dx_1 \frac{\tau}{x_1} Q_j^2 [q^A(x_1) \bar{q}_j^B(\tau/x_1) + \bar{q}_j^A(x_1) q_j^B(\tau/x_1)] \end{aligned} \quad (7)$$

gdje korištenjem svojstva delta funkcije $\delta(ax) = \frac{1}{|x|} \delta(x)$ dobijemo dodatni faktor $\frac{1}{x_1}$. Delta funkcija daje relaciju $x_1 x_2 = \tau$ iz koje proizlazi $x_2 = \frac{\tau}{x_1} \leq 1 \rightarrow x_1 \geq \tau$. Ta nejednakost mijenja donju granicu integracije po varijabli x_1 s $[0, 1]$ na $[\tau, 1]$. Uzimajući u obzir činjenicu da promatramo anihilaciju protona i antiprotona, radimo aproksimaciju da je PDF antikvarka unutar antiprotona ista PDF-u kvarka unutar protona tj. $\bar{u}^{\bar{p}}(x) = u^p(x) \equiv u(x)$. Isto vrijedi za down-kvarkove. Također vrijedi jednakost $\hat{s} = 4E^2$ gdje je \hat{s} energija centra mase kvarka i antikvarka. Slijedi

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(p\bar{p} \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{dm^2} &= \frac{4\pi\alpha}{9m^4} \int_\tau^1 \frac{dx_1}{x_1} \tau \left[\frac{4}{9} (u(x_1)u(\tau/x_1) + \bar{u}(x_1)\bar{u}(\tau/x_1)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} (d(x_1)d(\tau/x_1) + \bar{d}(x_1)\bar{d}(\tau/x_1)) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(p\bar{p} \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{dm} &= \frac{8\pi\alpha^2}{9m^3} \int_\tau^1 \frac{dx_1}{x_1} \tau \left[\frac{4}{9} (u(x_1)u(\tau/x_1) + \bar{u}(x_1)\bar{u}(\tau/x_1)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} (d(x_1)d(\tau/x_1) + \bar{d}(x_1)\bar{d}(\tau/x_1)) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

gdje smo u izrazu (8) diferencijal promijenili s $d\sigma/dm^2$ na $d\sigma/dm$. Funkcijska ovisnost izraza (9) prikazana je na slici 2. Graf je dobiven numeričkom integracijom u programskom paketu *Mathematica* gdje su korištene MSTW PDF funkcije [3]



Slika 2: Diferencijalni udarni presjek $d\sigma/dM$ u ovisnost o invarijantnoj masi sustava dva leptona M .

3.2 Udarni presjek za proces $p\bar{p} \rightarrow Z \rightarrow \mu^+\mu^-$

U Drell-Yan procesu rezonancom može nastati Z bozon. Njegovim raspadom nastaje par suprotno nabijenih leptona. Pošto je to slabi neutralni proces, narušenje pariteta nije uvijek maksimalno te se uvode parametri c_V i c_A koji mjere udio vektorske odnosno aksijalne komponente u neutralnoj slaboj struji. Izraz za ukupnu amplitudu izveden je u dodatku B. Udarni presjek za proces $q\bar{q} \rightarrow Z \rightarrow \mu^+\mu^-$ glasi

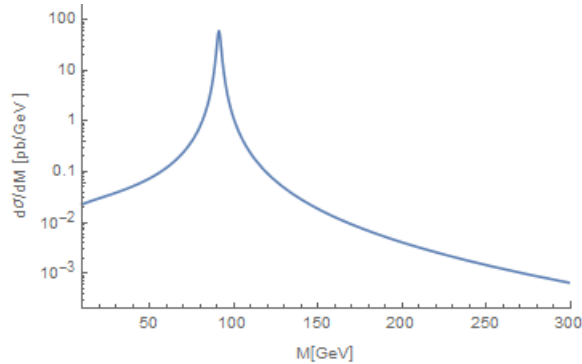
$$\sigma_{CM} = \frac{1}{3} \frac{1}{12\pi} \frac{g_W^4}{\cos^4\theta_W} \frac{\hat{s}}{4(\hat{s} - M_Z^2)^2} \left[\frac{1}{4} [(c_V^q)^2 + (c_A^q)^2] [(c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2] + 6c_A^q c_V^q c_A^\mu c_V^\mu \right] \quad (10)$$

Ako želimo dobiti diferencijalni udarni presjek za proces $p\bar{p} \rightarrow \mu^+\mu^-$, moramo uključiti i član s tokom kvarkova iz hadrona isto kao što smo napravili u izrazu (5)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dm^2}(p\bar{p} \rightarrow \mu^+\mu^-) &= \frac{1}{3} \frac{1}{12\pi} \frac{g_W^4}{\cos^4\theta_W} \frac{m^2}{4(m^2 - M_Z^2)^2} \frac{1}{m^2} \sum_j Q(q_j)^2 \left[\frac{1}{4} [(c_V^q)^2 + (c_A^q)^2] \cdot \right. \\ &\cdot [(c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2] + 6c_A^q c_V^q c_A^\mu c_V^\mu \left. \right] \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 x_2 [q(x_1)q(x_2) + \bar{q}(x_1)\bar{q}(x_2)\delta(x_1 x_2 - \tau)] \end{aligned} \quad (11)$$

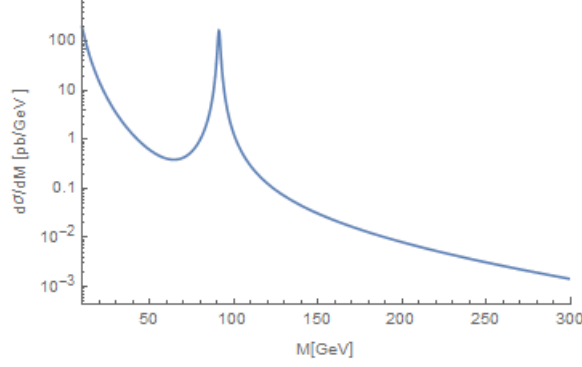
gdje je m^2 invarijantna masa sustava miona koja je jednaka energiji centra mase. Sumiranjem po okusima kvarkova j te izvrijednjenjem delta funkcije dobivamo konačan izraz za diferencijalni udarni presjek po invarijantnoj masi koji je prikazan na slici 3.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dm^2}(p\bar{p} \rightarrow \mu^+\mu^-) &= \frac{1}{3} \frac{1}{12\pi} \frac{g_W^4}{\cos^4\theta_W} \frac{1}{4(m^2 - M_Z^2)^2} \left[\frac{1}{4} [(c_V^q)^2 + (c_A^q)^2] [(c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2] + \right. \\ &+ 6c_A^q c_V^q c_A^\mu c_V^\mu \left. \right] \int_\tau^1 \tau \frac{dx_1}{x_1} \left[\frac{4}{9} (u(x_1)u(\tau/x_1) + \bar{u}(x_1)\bar{u}(\tau/x_1)) \right] + \left[\frac{1}{4} [(c_V^q)^2 + (c_A^q)^2] \cdot \right. \\ &\cdot [(c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2] + 6c_A^q c_V^q c_A^\mu c_V^\mu \left. \right] \int_\tau^1 \tau \frac{dx_1}{x_1} \left[\frac{1}{9} (d(x_1)d(\tau/x_1) + \bar{d}(x_1)\bar{d}(\tau/x_1)) \right] \end{aligned} \quad (12)$$



Slika 3: Diferencijalni udarni presjek $d\sigma/dM$ u ovisnosti o invarijantnoj masi M sustava dva leptona za slabi proces

Zbrajajući izraze (12) i (9) dobijemo diferencijalni udarni presjek koji uključuje i proces s izmjenom fotona i proces preko rezonance Z bozona. Na slici 4. prikazan je doprinos diferencijalnom udarnom presjeku od elektromagnetskog i slabog procesa.



Slika 4: Diferencijalni udarni presjek $d\sigma/dM$, koji uključuje EM i slabi proces, u ovisnosti o invarijantnoj masi M .

Možemo zaključiti da na malim vrijednostima invarijantne mase sustava miona dominira EM proces dok na vrijednostima invarijantne mase blizu masi Z bozona $M_{\mu^-\mu^-} \approx M_Z$ dominira slabi proces.

3.3 Udarni presjek za proces $pp \rightarrow \gamma, Z \rightarrow l^+l^-$

Kod izračuna amplitude za proces proizvodnje teških leptona, ne može se zanemariti njihova masa u ultrarelativističkom limesu. Cijeli postupak izračuna usrednjenog kvadrata amplitude prikazan je u dodatku C. Izraz (56) možemo napisati u pogodnijem obliku tako da ga izrazimo preko brzine teških leptona $\beta = \sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{\hat{s}}}$

$$\begin{aligned}
\sigma_{CM} &= \frac{1}{32\pi} \frac{1}{4E^2} \sqrt{1 - \frac{m_l^2}{E^2}} \frac{e^4 Q(q)^2 Q(l)^2}{E^2} \left(\frac{8}{3} E^2 + \frac{4}{3} m_l^2 \right) \\
&= \frac{1}{32\pi} \frac{1}{\hat{s}} \sqrt{1 - \frac{4m_l^2}{\hat{s}}} \frac{4e^4 Q(q)^2 Q(l)^2}{\hat{s}} \left(\frac{2}{3} \hat{s} + \frac{4}{3} m_l^2 \right) \\
&= \frac{1}{32\pi} \frac{1}{\hat{s}} \frac{4e^4 Q(q)^2 Q(l)^2}{3} \beta(3 - \beta^2)
\end{aligned} \tag{13}$$

Uzimajući u obzir tok partona iz hadrona, diferencijalni udarni presjek ima oblik

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dm^2} &= \frac{1}{3} \frac{1}{32\pi} \frac{1}{\hat{s}} \frac{4e^4 Q(l)^2}{3} \beta(3 - \beta^2) \sum_j Q(q_j)^2 \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 x_1 x_2 [q(x_1) \bar{q}(x_2) + \\
&\quad + \bar{q}(x_1) q(x_2)] \delta(x_1 x_2 - \tau)
\end{aligned} \tag{14}$$

Promjenom derivacije s $d\sigma/dm^2$ na $d\sigma/d\tau$ te integracijom, dobiva se konačan izraz

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int_{4m_l^2/\hat{s}}^1 d\tau \frac{2\pi\alpha^2}{9} \frac{1}{\tau\hat{s}} \beta(3 - \beta^2) \int_{\tau}^1 \frac{dx_1}{x_1} \left[\frac{4}{9} (u(x_1) \bar{u}(\tau/x_1) + \bar{u}(x_1) u(\tau/x_1)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{9} (d(x_1) \bar{d}(\tau/x_1) + \bar{d}(x_1) d(\tau/x_1)) \right]
\end{aligned} \tag{15}$$

Osim elektromagnetskog procesa, moramo uzeti u obzir i slabi proces gdje rezonancom nastaje Z bozon. Izraz za udarni presjek glasi

$$\sigma = \int_{4m_l^2/s}^1 d\tau \frac{1}{3} \frac{\tau s}{96\pi} \frac{g^4}{(\tau s - M_Z^2)^2} \beta(3 - \beta^2) \int_{\tau}^1 \frac{dx_1}{x_1} \left[\frac{4}{9} (u(x_1)\bar{u}(\tau/x_1) + \bar{u}(x_1)u(\tau/x_1)) \right. \\ \left. \frac{1}{9} (d(x_1)\bar{d}(\tau/x_1) + \bar{d}(x_1)d(\tau/x_1)) \right] \quad (16)$$

Ukupni izraz možemo napisati na kompaktniji način [4]

$$\hat{\sigma} = \frac{\beta(3 - \beta^2)}{48\pi} \hat{s} (V_L^2 + V_R^2) \quad (17)$$

gdje su parametri vezanja

$$V_{L,R}^{(\gamma+Z)} = \frac{Q_l Q_q e^2}{\hat{s}} + \frac{c^{Zl} c_{L,R}^q g^2}{c_W^2 (\hat{s} - M_Z^2)} \quad (18)$$

gdje je $c_W = \cos\theta_W$, a $c_{L,R}$ lijeva i desna komponenta vezanja Z bozona na kvarkove. U ovom radu uzet ćemo da je naboj teškog leptona Q_l jednak jedan te da je $c^{Zl} = c_W^2$. Ukupni udarni presjek preko izraza (17) ima sljedeći oblik

$$\sigma(pp \rightarrow l^+l^-) = \frac{1}{3} \sum_q \int_{4m_l^2/s}^1 d\tau \int_{\tau}^1 d\tau' \hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow l^+l^-) \left(q_1(x_1)\bar{q}_2(\tau/x_2) + \bar{q}_1(x_1)q_2(x_2) \right) \quad (19)$$

4 Energija i luminozitet hadronskih sudarivača

U fizici elementarnih čestica luminozitet L je bitan pojam koji karakterizira učinkovitost akceleratora. Definira se kao omjer broja detektiranih događaja N u određenom vremenu t i udarnog presjeka σ .

$$L = \frac{1}{\sigma} \frac{dN}{dt} \quad (20)$$

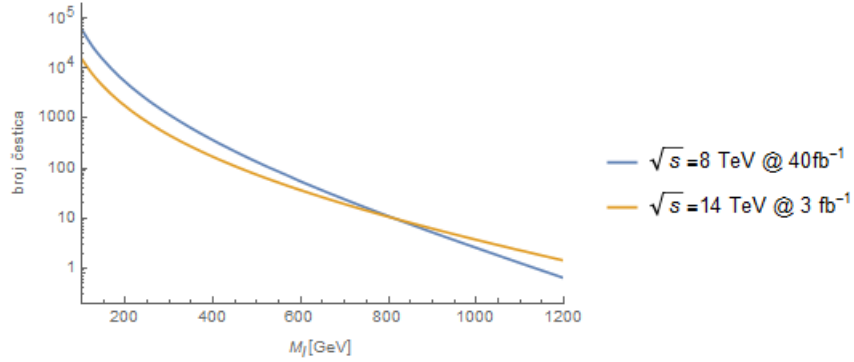
Udarni presjek mjera je vjerojatnosti da se dogodi određena reakcija sudarom dviju čestica. Integrirajući luminozitet po vremenu $L_{int} = \int L dt$, dobivamo konačan izraz koji povezuje udarni presjek i integrirani luminozitet.

$$L_{int} = \frac{N}{\sigma} \quad (21)$$

U akceleratorima, čestice se grupiraju u niz paketa te formiraju snop koji se čeonu sudara sa snopom iz suprotnog smjera. U proton-proton sudarivačima, kao što je LHC, svaki paket sadrži otprilike 10^{11} protona. Većina tih čestica tokom sudara se mimoide te samo mali broj interagira i rezultira proizvodnjom novih čestica. Luminozitet akceleratora određuje koliko će biti takvih događaja, te što je on veći produktivnost sudarivača raste. Integrirani luminozitet najčešće se izražava u mjernim jedinicama inverzni femtobarni fb^{-1} što je inverzno od mjerene jedinice za udarni presjek barn b . Njihovim umnoškom dobivamo broj detektiranih čestica kao što se vidi iz izraza (21).

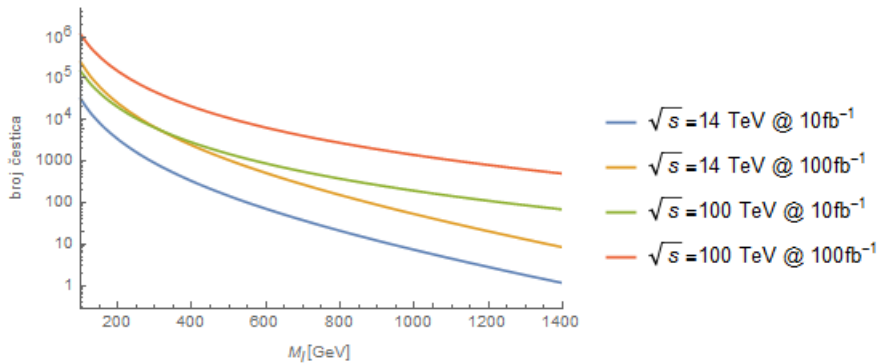
Jedna od najbitnijih karakteristika sudarivača je energija centra mase tj. energija na raspolaganju za produkciju novih čestica. Ovisno o energiji centra mase i luminozitetu, akcelerator

može proizvesti čestice određene mase. Što je veći luminozitet i energija centra mase, to je veća mogućnost produkcije teških čestica. Nas zanima da li povećanjem luminoziteta akceleratora možemo stvoriti isti broj čestica koliki bi dobili da povećamo energiju centra mase sudarajućih snopova. Množeći izraz za udarni presjek (19) integriranim luminozitetom, dobivamo broj proizvedenih čestica.



Slika 5: Broj proizvedenih čestica u ovisnosti o masi teških leptona za različite vrijednosti energije centra mase i luminoziteta sudarivača.

Na slici 5. prikazan je graf ovisnosti broja proizvedenih čestica o njihovoj masi s različitim vrijednostima luminoziteta. Korištene su vrijednosti koje su dostupne na današnjim sudarivačima kao što je LHC. Uočavamo da na vrijednostima male mase veću ulogu igra luminozitet nego energija centra mase. Tek za jako velike mase čestica postaje bitnija energija kojom sudaramo snopove. Za mase manje od 800 GeV-a sudarivač proizvede i do 10 puta više čestica s luminozitetom od $40 fb^{-1}$ i energijom centra mase od 8 TeV-a u odnosu na sudarivač s energijom centra mase od 14 TeV-a i luminozitetom od $3 fb^{-1}$. Zaključujemo da za detekciju dovoljnog broja čestica velike mase moramo imati puno veću energiju kojom sudaramo snopove, te nam povećanje luminoziteta ne može nadoknaditi male energije. Možemo razmotriti kako se ponaša broj čestica za velike vrijednosti energije i luminoziteta koji još nisu tehnološki dostupni.



Slika 6: Broj proizvedenih čestica u ovisnosti o masi teških leptona s različitim vrijednostima luminoziteta

Sa slike 6. zaključujemo da s energijom centra mase $\sqrt{s} = 14$ TeV-a i luminozitetom od $100fb^{-1}$ možemo dobiti otprilike jednak broj čestica kao s akceleratorom energije centra mase $\sqrt{s} = 100$ TeV-a i luminozitetom od $10fb^{-1}$. No to sve vrijedi do mase od oko 300 GeV-a. Ako želimo proizvesti dovoljan broj čestica mase veće od 400 GeV-a, trebat će nam akcelerator puno veće energije, npr. $\sqrt{s} = 100$ TeV-a. S akceleratorom te energije, mogli bismo proizvesti 10 puta više čestica mase od 1400 GeV-a nego s akceleratorom od 14 TeV-a luminoziteta $100fb^{-1}$. Kako bismo dobili odgovore na neka fundamentalna pitanja teorije čestica, potrebne su nam puno veće energije sudarivača od onih koje daje LHC. U znanstvenoj zajednici spominje se energija od 100 TeV-a koju bi taj akcelerator trebao imati [5]. Postoji puno argumenata zašto je izgradnja sudarivača od 100 TeV-a od iznimne važnosti za fiziku čestica. Osim što bi omogućila potragu za česticama jako velike mase, također bi odgovorila na temeljna pitanja fizike elementarnih čestica. Jedno od najvećih pitanja danas je Higgsov bozon. Činjenica da je Higgsov bozon jako jednostavna čestica, tj. nema naboj ni spin, ujedno je čini jako zanimljivom i neobičnom. Osim što može interagirati s drugim česticama, interagira sama sa sobom. Energija sudarivača od 100 TeV-a omogućila bi precizno mjerenje Higgsove samointerakcije što je povezano s njezinim porijeklom. Također, mjerenje trostrukog Higgsovog vezanje omogućuje direktno istraživanje prirode loma elektroslabe simetrije, a to je najbolje proučavati na energiji od 100 TeV-a.

5 Zaključak

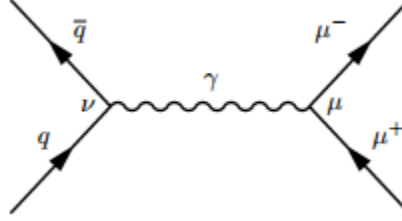
Analizirali smo proces u kojem sudarom dva hadrona nastane par leptona, te izračunali diferencijalne udarne presjeke za iste. Kako bismo dobili ukupni udarni presjek, primijenili smo numeričku integraciju u programskom paketu *Mathematica*. Koristili smo partonske distribucijske funkcije dobivene eksperimentalno. U Drell-Yan procesu elektroslabim putem nastaje rezonantni Z bozon što se vidi na slikama 3 i 4 kao šiljak. Iz toga možemo zaključiti da pri potrazi za novim teškim neutralnim mezonima očekujemo karakterističan rezonantni vrh na grafu invarijantne mase blizu mase samog mezona. Također zaključujemo sa slike 4 da na malim vrijednostima masa dominira elektromagnetski proces, dok na visokim masama dominira elektroslabi proces. Nakon toga smo analitički dobili izraz za udarni presjek procesa $pp \rightarrow \gamma, Z \rightarrow l^+l^-$. Množeći udarni presjek s luminozitetom dobili smo broj čestica koji se može proizvesti. Mijenjanjem luminoziteta i energije centra mase sudarivača, vidjeli smo kako se mijenja broj čestica. Zaključujemo da za male mase leptona luminozitet može nadoknaditi malu energiju centra mase sudarivača, dok nam je tek za velike mase potreban sudarivač puno veće energije od one koju daju LHC da bi dobili dovoljan broj čestica.

Zahvale

Ovaj rad izrađen je na Zavodu za teorijsku fiziku čestica i polja Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, pod vodstvom izv. prof. dr. sc. Krešimira Kumeričkog. Zahvaljujem se svom mentoru na prenesenom znanju i uloženom vremenu u ovaj rad.

Dodatak A: Izračun udarnog presjeka za proces $q\bar{q} \rightarrow \mu^- \mu^+$

U ovom dodatku izvodimo amplitudu i udarni presjek za proces anihilacije kvarka i antikvarka u par mion i antimion. Tom procesu doprinosi jedan Feynmanov dijagram u prvom redu računa smetnje koji je prikazan na slici 7.



Slika 7: Feynmanov dijagram u prvom redu računa smetnje.

Koristeći Feynmanova pravila za QED te sljedeći fermionske linije natrag u vremenu, pišemo amplitudu:

$$-i\mathcal{M} = \bar{u}_3(-ie\gamma^\mu)v_4 \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \bar{v}_1(-ieQ(q)\gamma^\nu)u_2 \quad (22)$$

Sređivanjem izraza (22) dobijemo

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2 Q(q)}{k^2} [\bar{u}_3 \gamma^\mu v_4] [\bar{v}_1 \gamma_\mu u_2] \quad (23)$$

Pošto se eksperimenti provode s nepolariziranim česticama, moramo sumirati amplitudu po spinovima izlaznih čestica te usrednjiti po spinovima ulaznih čestica.

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{(2s_1 + 1)} \frac{1}{(2s_2 + 1)} \sum_{s_1 s_2} \sum_{s_3 s_4} |\mathcal{M}^2| \quad (24)$$

Hermitiski konjugirana amplituda je:

$$\mathcal{M}^\dagger = -\frac{e^2}{k^2} Q(q) [v_4^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \bar{u}_3^\dagger] [u_2^\dagger \gamma_\mu^\dagger \bar{v}_1^\dagger] \quad (25)$$

Koristeći relacije $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ te $\bar{v}^\dagger = \gamma^0 v$, dobijemo:

$$\mathcal{M}^\dagger = -\frac{e^2 Q(q)}{k^2} [\bar{v}_4 \gamma^\mu u_3] [\bar{u}_2 \gamma_\mu v_1] \quad (26)$$

Slijedi,

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} = \frac{e^4}{k^4} Q(q)^2 [\bar{v}_4 \gamma^\mu u_3] [\bar{u}_2 \gamma_\mu v_1] [\bar{u}_3 \gamma^\nu v_4] [\bar{v}_1 \gamma_\nu u_2] \quad (27)$$

Pošto su izrazi u zagradama brojevi, možemo ih slobodno premještati:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{k^4} Q(q)^2 [\bar{v}_4 \gamma^\mu u_3 \bar{u}_3 \gamma^\nu v_4] [\bar{u}_2 \gamma_\mu v_1 \bar{v}_1 \gamma_\nu u_2] \quad (28)$$

Usrednjena amplituda glasi,

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^4} Q(q)^2 \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} [\bar{v}_4 \gamma^\mu u_3 \bar{u}_3 \gamma^\nu v_4] [\bar{u}_2 \gamma_\mu v_1 \bar{v}_1 \gamma_\nu u_2] \quad (29)$$

Koristimo Casimirov trik te raspíšemo spinore i gama matrice po komponentama. Tako za prvu zagradu dobijemo:

$$\bar{v}_4 \gamma^\mu u_3 \bar{u}_3 \gamma^\nu v_4 = \bar{v}_{4\alpha} \gamma^\mu_{\alpha\beta} u_{3\beta} \bar{u}_{3\gamma} \gamma^\nu_{\gamma\delta} v_{4\delta} \quad (30)$$

Pošto su to brojevi, možemo slobodno pomaknuti $v_{4\delta}$ naprijed te iskoristiti činjenicu da je $A_\alpha^\alpha = Tr(A)$. Slijedi

$$v_{4\delta} \bar{v}_{4\alpha} \gamma^\mu_{\alpha\beta} u_{3\beta} \bar{u}_{3\gamma} \gamma^\nu_{\gamma\delta} = Tr[v_4 \bar{v}_4 \gamma^\mu u_3 \bar{u}_3 \gamma^\nu] \quad (31)$$

Isto napravimo s drugom zagradom, te usrednjena amplituda glasi

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^4} Q(q)^2 \sum_{s_1 s_2 s_3 s_4} Tr[v_4 \bar{v}_4 \gamma^\mu u_3 \bar{u}_3 \gamma^\nu] Tr[u_2 \bar{u}_2 \gamma_\mu v_1 \bar{v}_1 \gamma_\nu] \quad (32)$$

Iskoristimo relacije potpunosti

$$\sum_{s_1} [u_1 \bar{u}_1] = (\not{p}_1 + m_1) \quad (33)$$

$$\sum_{s_2} [v_2 \bar{v}_2] = (\not{p}_2 - m_2) \quad (34)$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^4} Q(q)^2 Tr[(\not{p}_4 - m_4) \gamma^\mu (\not{p}_3 + m_3) \gamma^\nu] Tr[(\not{p}_2 + m_2) \gamma_\mu (\not{p}_1 - m_1) \gamma_\nu] \quad (35)$$

Pošto radimo u ultrarelativističkom limesu možemo zanemariti mase $m_1 = m_2 = m_q = 0$ i $m_3 = m_4 = m_\mu = 0$, te se izraz (35) svede na

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^4} Q(q)^2 Tr[\not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu] Tr[\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu] \quad (36)$$

Tragovi izraza u zagradama iznose

$$Tr[\not{p}_4 \gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu] = 4(p_4^\mu p_3^\nu - (p_4 \cdot p_3) g^{\mu\nu} + p_4^\nu p_3^\mu) \quad (37)$$

$$Tr[\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu] = 4(p_{2\mu} p_{1\nu} - (p_1 \cdot p_2) g_{\mu\nu} + p_{2\nu} p_{1\mu}) \quad (38)$$

Množenjem i kontrakcijom izraza (37) i (38) dobivamo

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^4} Q(q)^2 32 [(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)] \quad (39)$$

U sustavu centra mase vrijedi $E_1 = E_3$ te $E_2 = E_4$. Pošto radimo u UR limesu gdje se mase zanemaruju, slijedi

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (E_1 - E_3)^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 \approx -2|\vec{p}|^2(1 - \cos\theta) \quad (40)$$

$$u = (p_2 - p_3)^2 = (E_2 - E_3)^2 - (\vec{p}_2 - \vec{p}_3)^2 \approx -2|\vec{p}|^2(1 + \cos\theta) \quad (41)$$

Usrednjena amplituda nakon uvrštavanja relacija (40) i (41) je

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} Q(q)^2 [4|\vec{p}|^4(1 + \cos\theta)^2 + 4|\vec{p}|^4(1 - \cos\theta)^2] \quad (42)$$

Izraz za diferencijalni udarni presjek u sustavu centra mase glasi

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2(E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \quad (43)$$

Uvrštavanjem izraza (42) u izraz (43) slijedi

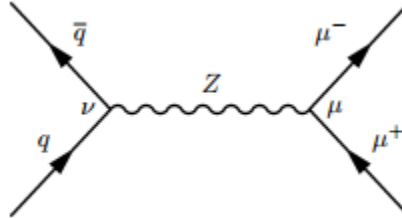
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{\alpha^2\pi}{16E^2} Q(q)^2 (1 + \cos^2\theta) \quad (44)$$

Integracijom po prostornom kutu $d\phi \sin\theta d\theta$ dobivamo konačan izraz

$$\sigma_{CM} = \frac{\alpha^2\pi}{3E^2} Q(q)^2 \quad (45)$$

Dodatak B: Izračun udarnog presjeka za elektroslabi proces $q\bar{q} \rightarrow Z \rightarrow \mu^+\mu^-$

Za razliku od QED struje, slaba struja ima vektorski i aksijalni član koji narušava paritet. Također zbog mase Z bozona postoji dodatan član kod propagatora. Baždarni Z bozon se različito veže na različite fermione te se uvode vektorski i aksijalni parametri c_V i c_A . U prvom redu računa smetnje doprinosi Feynmanov dijagram prikazan na slici 8.



Slika 8: Feynmanov dijagram u prvom redu računa smetnje.

Iz Feynmanovih pravila za slabu silu slijedi amplituda

$$-i\mathcal{M} = \left[\bar{v}_2 \frac{-ig_W}{2\cos\theta_W} \gamma^\mu (c_V^q - c_A^q \gamma^5) u_1 \right] \frac{-i(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2})}{k^2 - M_Z^2} \left[\bar{u}_3 \frac{-ig_W}{2\cos\theta_W} \gamma^\nu (c_V^\mu - c_A^\mu \gamma^5) v_4 \right] \quad (46)$$

Sređivanjem izraza (46) dobijemo

$$\mathcal{M} = -\frac{g_W^2}{4\cos^2\theta_W} [\bar{v}_2\gamma^\mu(c_V^q - c_A^q\gamma^5)u_1] \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2}}{k^2 - M_Z^2} [\bar{u}_3\gamma^\nu(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5)v_4] \quad (47)$$

Sljedeće pokazujemo da član $k_\mu k_\nu/M_Z^2$ u izrazu (47) iščezava u ultrarelativističkom limesu

$$\begin{aligned} \bar{v}_2\gamma^\mu(c_V^q - c_A^q\gamma^5)u_1 k_\mu &= \bar{v}_2 \not{k}(c_V^q - c_A^q\gamma^5)u_1 \\ &= \bar{v}_2(\not{p}_1 + \not{p}_2)(c_V^q - c_A^q\gamma^5)u_1 \\ &= \bar{v}_2(c_V^q + c_A^q\gamma^5)\not{p}_1 u_1 + \bar{v}_2\not{p}_2(c_V^q - c_A^q\gamma^5)u_1 \\ &= \bar{v}_2[(c_V^q + c_A^q\gamma^5)m_q - m_q(c_V^q - c_A^q\gamma^5)]u_1 \end{aligned}$$

Iskoristili smo činjenicu da je k_μ broj te da ga možemo pomaknuti naprijed. Također smo iskoristili činjenicu da γ^5 komutira s γ matricama te vrijedi $\not{p}\gamma^5 = -\gamma^5\not{p}$. Znamo da vrijedi $(\not{p} - m)u = 0$, $(\not{p} + m)v = 0$. Ukupan izraz glasi

$$\begin{aligned} \bar{v}_2\gamma^\mu(c_V^q - c_A^q\gamma^5)u_1 \frac{k_\mu k_\nu}{M_Z^2} \bar{u}_3\gamma^\nu(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5)v_4 &= \frac{1}{M_Z^2} \bar{v}_2[(c_V^q + c_A^q\gamma^5)m_q - m_q(c_V^q + c_A^q\gamma^5)u_1] \cdot \\ &\quad \cdot \bar{u}_3[m_\mu(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5) - (c_V^\mu + c_A^\mu\gamma^5)m_\mu]v_4 \end{aligned} \quad (48)$$

Masa Z bozona je $M_Z = 91.2$ GeV, masa miona $m_\mu = 0.106$ GeV, masa up-kvarka $m_{up} = 0.005$ GeV, te down-kvarka $m_{down} = 0.003$ GeV. Zaključujemo da su mase tih fermiona puno manje od mase Z bozona te da član (48) možemo zanemariti. Konačno, amplituda glasi

$$\mathcal{M} = \frac{-g_W^2}{4\cos^2\theta_W} \frac{1}{k^2 - M_Z^2} [\bar{v}_2\gamma^\mu(c_V^q - c_A^q\gamma^5)u_1] [\bar{u}_3\gamma_\mu(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5)v_4] \quad (49)$$

Hermitski konjugirana amplituda glasi

$$\mathcal{M}^\dagger = \frac{-g_W^2}{4\cos^2\theta_W} \frac{1}{k^2 - M_Z^2} [\bar{u}_1\gamma^\mu(c_V^q - c_A^q\gamma^5)v_2] [\bar{v}_4\gamma_\mu(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5)u_3] \quad (50)$$

gdje smo iskoristili relacije $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, $\bar{u}^\dagger = \gamma^0 u$, te $\gamma^0\gamma^0 = 1$. Kvadrat apsolutne vrijednosti amplitude je

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} &= \frac{g_W^4}{16\cos^4\theta_W} \frac{1}{(k^2 - M_Z^2)^2} [\bar{u}_1\gamma^\mu(c_V^q - c_A^q\gamma^5)v_2] [\bar{v}_4\gamma_\mu(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5)u_3] \cdot \\ &\quad \cdot [\bar{v}_2\gamma^\nu(c_V^q - c_A^q\gamma^5)u_1] [\bar{u}_3\gamma_\nu(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5)v_4] \end{aligned} \quad (51)$$

Koristimo Casimirov trik, isto kao u jednadžbi (30) te amplitudu raspisemo preko traga

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g_W^4}{16\cos^4\theta_W} \frac{1}{(k^2 - M_Z^2)^2} Tr[\gamma^\mu(c_V^q - c_A^q\gamma^5)v_2\bar{v}_2\gamma^\nu(c_V^q - c_A^q\gamma^5)u_1\bar{u}_1] \cdot \\ &\quad \cdot Tr[\gamma_\mu(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5)u_3\bar{u}_3\gamma_\nu(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5)v_4\bar{v}_4] \end{aligned} \quad (52)$$

Nakon korištenja relacija potpunosti (33) i (34), usrednjeni kvadrat amplitude je

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{g_W^4}{64\cos^4\theta_W} \frac{1}{(k^2 - M_Z^2)^2} & Tr[\gamma^\mu(c_V^q - c_A^q\gamma^5) \not{p}_2\gamma^\nu(c_V^q - c_A^q\gamma^5) \not{p}_1] \\ & Tr[\gamma_\mu(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5) \not{p}_3\gamma_\nu(c_V^\mu - c_A^\mu\gamma^5) \not{p}_4] \end{aligned} \quad (53)$$

Korištenjem relacija za tragove γ^μ matrica, dobiva se konačan kvadrat usrednjene amplitude

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{g_W^4}{64\cos^4\theta_W} \frac{1}{(k^2 - M_Z^2)^2} & \left[4[(c_V^q)^2 + (c_A^q)^2](p_2^\mu p_1^\nu - g^{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 + p_2^\nu p_1^\mu) - 8ic_A^q c_V^q p_{2\rho} p_{1\sigma} \varepsilon^{\mu\rho\nu\sigma} \right] \\ & \left[4[(c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2](p_{3\mu} p_{4\nu} - g_{\mu\nu} p_3 \cdot p_4 + p_{3\nu} p_{4\mu}) - 8ic_A^\mu c_V^\mu p^{3\rho} p^{4\sigma} \varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma} \right] \end{aligned} \quad (54)$$

Sređivanjem izraza (54) slijedi

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{g_W^4}{\cos^4\theta_W} \frac{1}{(k^2 - M_Z^2)^2} & \left[\frac{1}{2} [(c_V^q)^2 + (c_A^q)^2] [(c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2] ((p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) + \right. \\ & \left. (p_2 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_3)) + 24c_A^q c_V^q c_A^\mu c_V^\mu (p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) \right] \end{aligned} \quad (55)$$

Ubacivanjem relacija (40),(41) te korištenjem izraza za diferencijalni udarni presjek (43) te integracijom, dobivamo konačan izraz za ukupni udarni presjek

$$\sigma_{CM} = \frac{1}{12\pi} \frac{g_W^4}{\cos^4\theta_W} \frac{E^2}{(4E^2 - M_Z^2)^2} \left[[(c_V^q)^2 + (c_A^q)^2] [(c_V^\mu)^2 + (c_A^\mu)^2] + 6c_A^q c_V^q c_A^\mu c_V^\mu \right] \quad (56)$$

Dodatak C: Izračun udarnog presjeka za proces $q\bar{q} \rightarrow \gamma \rightarrow l^+l^-$

Izračun amplitude za ovaj proces isti je kao izračun amplitude za proces u kojemu su u konačnom stanju mioni. Jedina razlika je što nepoznati leptoni, koje ovdje promatramo, imaju veliku masu koju ne možemo zanemariti u ultrarelativističkom limesu. Izračun usrednjenog kvadrata amplitude je isti sve do koraka u kojemu se koriste relacije potpunosti. Usrednjeni kvadrat amplitude glasi

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^2} & Q(q)^2 Q(l)^2 Tr[(\not{p}_4 - m_4)\gamma^\mu(\not{p}_3 + m_3)\gamma^\nu] \\ & Tr[(\not{p}_2 + m_2)\gamma_\mu(\not{p}_1 - m_1)\gamma_\nu] \end{aligned} \quad (57)$$

U ultrarelativističkom limesu se zanemaruju samo mase kvarkova, dok mase leptona ne možemo zanemariti. Također moramo još uzeti u obzir naboj leptona $Q(l)$. Zanemarivanjem masa m_1 i m_2 dobijemo

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^2} Q(q)^2 Q(l)^2 Tr[(\not{p}_4 - m_4)\gamma^\mu(\not{p}_3 + m_3)\gamma^\nu] Tr[\not{p}_2\gamma_\mu \not{p}_1\gamma_\nu] \quad (58)$$

Trag $Tr[\not{p}_2\gamma_\mu \not{p}_1\gamma_\nu]$ izračunat je u izrazu (38) dok trag s masama leptona moramo dodatno izračunati

$$Tr[(\not{p}_4 - m_l)\gamma^\mu(\not{p}_3 + m_l)\gamma^\nu] = Tr[(\not{p}_4 - m_l)\gamma^\mu \not{p}_3\gamma^\nu] + Tr[(\not{p}_4 - m_l)\gamma^\mu m_l\gamma^\nu] \quad (59)$$

Uzimanjem u obzir da je trag neparnog broja γ^μ matrica nula, te da je $Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$ te $Tr = [\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu] = 4(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu})$, dobijamo konačno

$$Tr[(\not{p}_4 - m_l)\gamma^\mu(\not{p}_3 + m_l)\gamma^\nu] = 4(p_4^\mu p_3^\nu - g^{\mu\nu}(p_3 \cdot p_4) + p_4^\nu p_3^\mu) - 4m_l^2 g^{\mu\nu} \quad (60)$$

Množeći ta dva traga dobijemo konačan izraz za amplitudu

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 8 \frac{e^4 Q(q)^2 Q(l)^2}{s^2} \left[(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + m_l^2(p_1 \cdot p_2) \right] \quad (61)$$

Koristeći izraze (40) i (41) dobijemo amplitudu izraženu preko kuta raspršenja izlaznih čestica

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 16 \frac{e^4}{(4E^2)^2} Q(q)^2 Q(l)^2 [E^4(1 + \cos^2\theta)^2 + m_l^2 E^2(1 - \cos^2\theta)] \quad (62)$$

Integracijom udarnog presjeka (43), konačan izraz glasi

$$\sigma_{CM} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{2\pi}{4E^2} \frac{\sqrt{E^2 - m_l^2}}{E} 16 \frac{e^4 Q(q)^2 Q(l)^2}{16E^4} \left(\frac{8}{4} E^4 + \frac{4}{3} m_l^2 E^2 \right) \quad (63)$$

U limesu male mase leptona m_l dobijemo isti izraz kao u (45).

Literatura

- [1] M. Thomson, *Modern Particle Physics*, Cambridge University Press (2013)
- [2] E. Leader and E. Predazzi, *An introduction to gauge theories and modern particle physics*, Volume 1, Cambridge University Press (1996)
- [3] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne and G. Watt, *Parton distributions for the LHC*, Eur. Phys. J. C 63 (2009) 189-285
- [4] K. Kumerički, I. Picek and B. Radovčić, *TeV-scale seesaw with quintuplet fermions*, Phys. Rev. D 86 (2012) 013006.
- [5] N. Arkani-Hamed, T. Han, M. Mangano, L. T. Wang, *Physics Opportunities of a 100 TeV Proton-Proton Collider*, arXiv: 1511.06495 [hep-ph]