

Diskretna 3D fotonička rešetka u sustavu 2D vezanih valovoda

Mihovil Bosnar

Mentor: Prof. dr. sc. Hrvoje Buljan

Sažetak

Seminar se bavi konceptom diskretnih 3D sustava uronjenih u kontinuirani 2D sustav vezanih valovoda. Prvo će se pokazati da diskretni sustavi mogu imati veću dimenziju od kontinuiranih prostora u kojem se nalaze. U fizici se općenito pronalazi mnogo diskretnih sustava, kao što su kristalne rešetke, ali mali broj njih može zadovoljavati uvjete potrebne da im dimenzija bude različita od prostora u kojem se nalaze. Pokazat će se zadovoljavanje nekih od uvjeta u sustavu 2D valovoda te će se diskutirati mogućnost zadovoljavanja ostalih.

1 Uvod

Promatrat će se sustav 2D valovoda pune translacijske simetrije u jednom smjeru (neka je to smjer z), a reducirane translacijske simetrije u ravnini okomitoj na smjer z (neka je to x - y ravnina)[1]. Obično se periodička struktura presjeka koristi za usmjereno vođenje svjetlosti preko velikih udaljenosti, dakle kao valovod, bilo putem totalne unutarnje refleksije na periodičkoj strukturi ili zbog procjepa u spektru kao posljedice periodičke strukture koji onemogućuje širenje svjetlosti u x - y ravnini[1].

Međutim, sada od interesa nije korištenje periodične strukture dielektrika da se postigne usmjereno vođenje svjetlosti nego konstrukcija sustava koji će se sastojati od nekoliko valovoda raspoređenih u periodičnu strukturu između kojih će se odvijati prekakanje svjetlosti tijekom puta u z smjeru tako da je presjek (okomit na z) tog sustava fotonička rešetka. Može se pokazati da diskretni sustavi kao što je to rešetka mogu imati dimenzionalnost veću od kontinuiranog prostora u kojem se nalaze[2]. Ako bi se konstruirala upravo takva rešetka, u presjeku sustava bi se mogle promatrati neke fizikalne pojave, primjerice solitoni u tri dimenzije[2] ili svojstva materijala kao što je bigrafen (eng. *bigraphene layer*).

2 Dimenzionalnost diskretnih sustava

Diskretne sustave kao što je to rešetka u matematici proučava teorija grafova. Matematički, graf je sustav koji se sastoji od točaka, vrhova, povezanih crtama, bridovima. U modeliranju konkretnih sustava, teoriji mreža, vrhovima se mogu pridijeliti razni pojmovi, a bridovi predstavljaju njihove veze. Na primjer, računala mogu biti povezana u mreže kao što su to prsten ili zvijezda pa model računalne mreže prikazuje računala vrhovima, dok bridovi označavaju njihovu povezanost. U kristalnoj rešetci vrhovi su pak atomi, ioni i molekule koje se ponavljaju, dok su bridovi označavaju tuneliranja elektrona. Ako kristalna rešetka ima po jedan element u bazi, zajedničko svojstvo ova dva grafa je da je veza između dva vrha jednaka u oba smjera ili, matematički, neusmjerenost, a inače je rešetka usmjerena. Kristalna rešetka se od drugih grafova razlikuje po osnovnom svojstvu rešetki općenito; ona posjeduje reduciranu translacijsku simetriju i moguće neke dodatne simetrije, kao što je to rotacijska, koje je precrtavaju u nju samu - prostornu grupu simetrija. Tako se matematički rešetka opisuje kao usmjereni ili neusmjereni graf s prostornom grupom.

Dimenzija diskretnog sustava d može se definirati i izračunati na više načina, a jedan od njih je promatranje kako se volumen skalira s udaljenošću. Razmotrimo ovaj problem u kontinuiranom sustavu. Poznato je da je volumen unutar udaljenosti R od neke točke (*duljina*) u jednodimenzionalnom sustavu proporcionalan s R , u dvodimenzionalnom (*površina*) s R^2 , a u trodimenzionalnom (*volumen*) s R^3 . Ako bi se udaljenost pomnožila s nekim brojem λ (udaljenost bi se skalirala), onda bi se volumen u jednodimenzionalnom sustavu promijenio λ puta, u dvodimenzionalnom λ^2 puta, a trodimenzionalnom λ^3 puta. Poopćeno na d -dimenzionalni prostor može se zapisati:

$$V \sim R^d$$

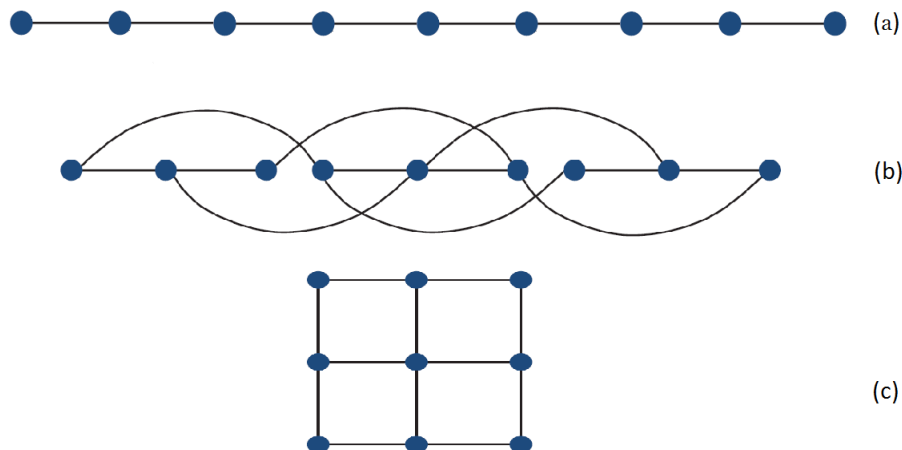
U diskretnom sustavu kao analogon volumenu unutar udaljenosti od točke promatra se broj vrhova $N(l)$ do kojih se može doći u l skokova. Također analogno kontinuiranom sustavu vrijedi:

$$N(l) \sim l^d$$

Ako se odredi broj vrhova do kojih se može doći za različiti broj skokova, može se odrediti i dimenzionalnost diskretnog sustava. Analogno, može se promatrati koliko je skupova vrhova obuhvaćenih u l koraka, potrebno da se prebriše cijeli graf. Ova metoda se naziva metoda brojanja kutija, a l se naziva dimenzija kutije. Ako je $M(l)$ potreban broj kutija vrijedi[3]

$$M(l) \sim l^{-d}$$

Ova relacija ekvivalentna je onoj koja bi se dobila za analogni problem u kontinuiranom sustavu. Dokaz za ekvivalencije diskretnih i kontinuiranih sustava može se pronaći u sklopu teorije metričkih prostora.



Slika 1: Grafovi. Slika je preuzeta iz [2]

Ilustrirajmo sad svojstvo diskretnih sustava da mogu imati dimenziju različitu od dimenzije kontinuiranog prostora u kojem se nalaze na primjeru grafova prikazanih na slici 1[2]. Slika 1a prikazuje graf od devet vrhova spojenih sa prvim susjedima. Usporedimo dva slučaja: $l_1 = 3$, a $l_2 = 1$. U prvom slučaju potrebne su tri kutije da prekriju cijeli sustav, a u drugom njih devet. Promotrimo sad sliku 1b. Tu neki vrhovi nisu spojeni s prvim susjedima, a neki su spojeni s trećim. Promotrimo ista dva slučaja kao i za graf

1a. U prvom slučaju potrebna je samo jedna kutija da prekrije cijeli sustav (ovo ovisi o vrhu od kojeg se kreće, ali traži se minimalan broj kutija[3]), dok je u drugom potrebno devet kutija. Budući da se u prvom slučaju volumen s udaljenošću skalira linearno, radi se o jednodimenzionalnom sustavu, dok je u drugom slučaju skaliranje kvadratno pa se radi o dvodimezionalnom sustavu, ekvivalentnom sustavu na slici 1c. Razlika između grafova 1b i 1c je da se graf 1b nalazi na pravcu, jednodimenzionalnom prostoru, dok je graf 1c smješten u ravnini, dvodimenzionalnom prostoru.

Dakle, da se presjek sustava valovoda pretvori u trodimenzionalni sustav u dvodimenzionalnom prostoru, potrebno je konstruirati rešetku kod koje su jakim tuneliranjem povezani neki nesusjedni valovodi, dok je tuneliranje između nekih susjednih potisnuto.

3 Propagacija svjetlosti u paraksijalnoj aproksimaciji

Da bi se moglo modelirati bilo koji elektromagnetski sustav potrebno je upotrijebiti Maxwellove jednadžbe. Pretpostavimo linearni nemagnetski materijal u kojem nema slobodnih struja i naboja. U tom slučaju jednadžbe se svode na:

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon(x, y) \vec{E}) = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon(x, y) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Dalje se ispušta prostorna ovisnost $\epsilon(x, y) = \epsilon_0 \epsilon_r(x, y)$ radi skraćanja zapisa.

Ovaj sustav jednadžbi može se svesti na dvije jednadžbe, jednu za električno polje i drugu koja daje polje \vec{H} iz poznatog električnog polja.

Prvo se raspiše divergencija u jednadžbi (1):

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \epsilon + \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

Pretpostavlja se da je prostorna varijacija dielektrične funkcije puno sporija od prostorne varijacije električnog polja pa je prvi član mnogo manji od drugog. Zanimarivanjem prvog člana slijedi:

$$\epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \approx 0 \quad (5)$$

Sada, na jednadžbu (3) djeluje se operatorom rotacije te se na desnoj strani može eliminirati rotacija polja \vec{H} koristeći jednadžbu (4), a na lijevoj strani iskoristi se poznata formula $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$ te se prvi član eliminira jednadžbom (5). Ukupno se dobiva:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (6)$$

To je poznata valna jednadžba, samo što je dielektrična funkcija prostorno ovisna.

Uzima se oscilatorna vremenska ovisnost polja:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}e^{-i\omega t} \\ \vec{H} &= \vec{H}e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u jednadžbe (3) i (6):

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \vec{E} \quad (7)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (8)$$

To su tražene dvije jednadžbe; riješi se jednadžba (7) za \vec{E} , a \vec{H} dobije se iz poznatog električnog polja prema jednadžbi (8). Dalje se sređuje i aproksimira jednadžba (7).

Zgodnije je raditi s indeksom loma $n = \sqrt{\epsilon_r}$, nego dielektričnom funkcijom. Ako pretpostavimo da je indeks loma valovoda tek nešto veći od indeksa loma ostatka materijala, ukupni indeks loma može se zapisati kao: $n = n_0 + \delta n(x, y)$, $n_0 \gg \delta n$. Dalje će se ostavljati samo doprinosi prvog reda u δn .

Za k i ω vrijedi uobičajna disperzijska relacija za elektromagnetske valove u homogenom dielektriku jer varijacija omjera $\frac{k}{n}$ najmanje drugog reda u δn :

$$\omega = \frac{c}{n_0} k \quad (9)$$

Iskoristimo je da eliminiramo frekvenciju u jednadžbi (7):

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} \approx -\frac{k^2}{n_0^2} (n_0^2 + 2n_0\delta n) \vec{E} \quad (10)$$

Pretpostavi se da je električno polje modulirani ravni val:

$$\vec{E} = \psi(x, y, z) e^{ikz} \hat{e} \quad (11)$$

Uočimo da je vektor polarizacije okomit na smjer propagacije zbog (5). Uvrštavanjem (11) u (10):

$$\begin{aligned}\hat{e} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} e^{ikz} + ik\hat{z}\psi e^{ikz}) &= -\frac{k^2}{n_0^2} (n_0^2 + 2n_0\delta n) \psi e^{ikz} \hat{e} \\ \vec{\nabla}^2 \psi + 2ik\hat{z} \cdot \vec{\nabla} \psi - k^2 \psi &= -\frac{k^2}{n_0^2} (n_0^2 + 2n_0\delta n) \psi \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -2k^2 \frac{\delta n}{n_0} \psi\end{aligned} \quad (12)$$

Sad pretpostavljamo da se modulacija u z smjeru mijenja sporo na razini valne duljine: $\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|$. Ovo se naziva paraaksijalna aproksimacija[1].

Uz paraaksijalnu aproksimaciju i nakon sređivanja jednažba (12) se svodi na:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi - k \frac{\delta n}{n_0} \psi \quad (13)$$

Ovo je jednažba koja se dalje riješava, a odgovara vremenski ovisnoj Schrödingerovoj jednažbi u dvije dimenzije s potencijalom $-k \frac{\delta n}{n_0}$.

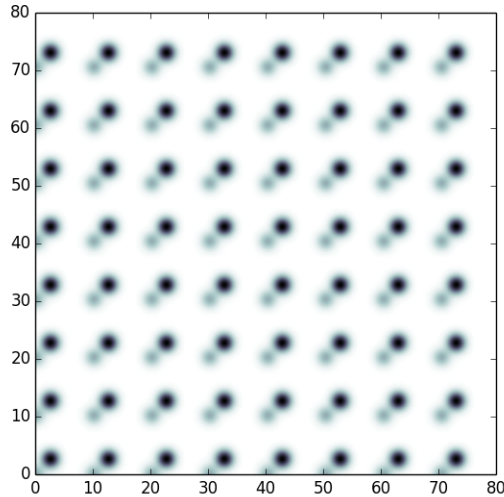
Dalje je potrebno konstruirati rešetku koja bi se ponašala kao trodimenzionalni objekt.

4 Profil sustava i rješavanje jednažbe

Konstrukcija počinje s kvadratnom rešetkom valovoda Gaussijanskog profila s bazom, prikazanoj na slici 2:

$$\delta n_L = \delta n_{L0} \sum_{mn} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{R}_{mn})^2}{2\sigma^2}} + (\delta n_{L0} + \Delta) \sum_{mn} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{R}_{mn} - \vec{b})^2}{2\sigma^2}} \quad (14)$$

Ovdje je $\vec{R}_{mn} = ma\hat{x} + na\hat{y}$ vektor rešetke, $\vec{b} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y}$ vektor baze, a suma po m i n ide od 0 do broja valovoda. Uočimo da u (13) potencijal dolazi s negativnim predznakom što znači da se može očekivati da će svjetlost koja se originalno širi jednim valovodom biti lokalizirana u valovodu i onda polagano preskakati u obližnje valovode analogno elektronima u periodičkoj rešetki u aproksimaciji čvrste veze.



Slika 2: Prikaz rešetke od 8 valovoda

Analogno situaciji u čvrstom stanju, kvantifikacija jačine veze proporcionalna je rezonantnom integralu $J \sim \sum_{jk} \int \chi_j^{(mn)} \delta n \chi_k^{(m'n')*} dV$, koji je proporcionalan učestalosti prijelaza između modova valovoda χ lokaliziranih na mjestu mn i na mjestu $m'n'$. Budući da ovaj integral dominantno ovisi o udaljenosti mjesta te obliku lokaliziranih stanja, za očekivati je da će prijelazi biti sve rijetki kako se povećava udaljenost valovoda. Također, ako je indeks loma jednog valovoda podignut za Δ u odnosu na drugi onda

možemo očekivati slabije širenje svjetlosti između njih jer se radi o nerezonantnim prijelazima. Za rešetku na slici 2 može se očekivati da je najčešće tuneliranje između elemenata baze, zatim između različitih elemenata baze u susjednim ćelijama te na kraju između istih elemenata baze u susjednim ćelijama.

Ideja je sada da se smještajem valovoda i podizanjem indeksa loma drastično smanji tuneliranje između različitih elemenata baze u susjednim ćelijama. Preostalo bi tuneliranje između istih elemenata baze u susjednim ćelijama, a koje bi tvorilo dvije nepovezane kvadratne rešetke te tuneliranje između različitih elemenata baze u istoj ćeliji, koje bi vezalo te rešetke u sustav ekvivalentan sloju tetragonalnih ćelija. Da bi se provjerilo je li tuneliranje zaista takvo i da bi se ugodili parametri rešetke, prati se intenzitet svjetlosti u ovisnosti o prijašnjem putu u z smjeru.

Intenzitet svjetla je:

$$I \sim \vec{E}^2 \sim |\psi|^2 \quad (15)$$

Intenzitet u ovisnosti o z se prati tako da se jednačba (13) numerički rješava metodom *split step Fast Fourier Transform (FFT)*[6]. Ova metoda zasniva se na izračunu funkcije ψ u točki $z = z_0 + \Delta z$, ako je funkcija ψ poznata u točki $z = z_0$ i ako zadovoljava jednačbu (13), korištenjem operatora evolucije:

$$i \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial z} = \hat{H} \psi(x, y, z) \quad (16)$$

$$\implies \psi(x, y, z + \Delta z) = e^{-i\hat{H}\Delta z} \psi(x, y, z) \quad (17)$$

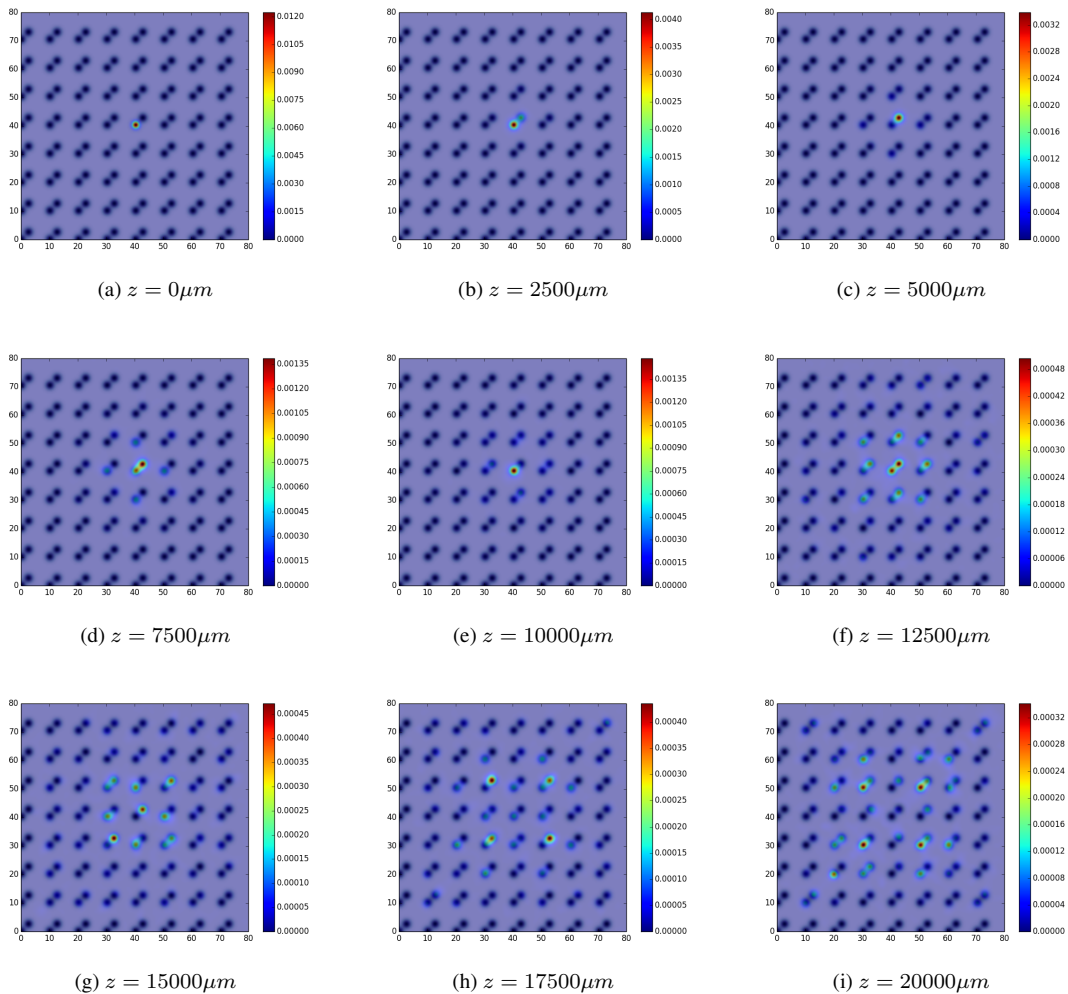
Ovdje \hat{H} operator koji djeluje na ψ na desnoj strani jednačbe (13). U operatoru evolucije nalaze se dva člana, prvi, diferencijalni, koji je dijagonalan u recipročnom prostoru i drugi, potencijalni u jeziku kvantne mehanike, koji je dijagonalan u direktnom prostoru. Split step FFT algoritam razdvaja djelovanje operatora \hat{H} na tri dijela: Prvo se napravi pola koraka (translacija za $\frac{\Delta z}{2}$) pomoću "potencijalnog" operatora u direktnom prostoru, zatim se numeričkim algoritmom brze Fourierove transformacije (Fast Fourier Transform) rezultat prebaci u recipročni prostor gdje se napravi cijeli korak pomoću diferencijalnog operatora te se taj rezultat vrati u direktni prostor gdje se završi korak. Ovakav postupak osigurava numeričku stabilnost rješenja. Uočimo da rastavljanje operatora na "potencijalni" i diferencijalni dio nije moguće provesti egzaktno jer oni nisu komutativni pa se zapravo koristi aproksimacija koja unosi grešku reda veličine Δz^3 . Za potrebe seminara metoda je implementirana u Pythonu.

Prije početka numeričkog rješavanja treba specificirati sve konstante koje se pojavljuju u jednačbi (13) te odrediti početni uvjet. U eksperimentima se koristi laser tako da su svi izračuni provedeni s $\lambda = 500 \times 10^{-3} \mu\text{m}$. Za n_0 uzeta je vrijednost 2.3, što odgovara kristalu silicija. Period rešetke a obično je reda veličine $10 \mu\text{m}$, a δn_{L0} je najmanje tri reda veličine manji od n_0 , što treba pratiti i Δ . Konkretno, računani su izvedeni s $a = 10 \mu\text{m}$, $\sigma = 0.1a$, $b_x = b_y = 0.25a$, $\delta n_{L0} = 2 \times 10^{-3}$, $k = \frac{2\pi n_0}{\lambda} \approx 28.9 \mu\text{m}^{-1}$ te $\Delta = 0$ i $\Delta = n_{L0}$ da bi se vidjeli efekti razlike između indeksa loma valovoda u bazi. U rešetci se nalazi 8 ćelija te su nametnuti periodički uvjeti.

Početni uvjet je:

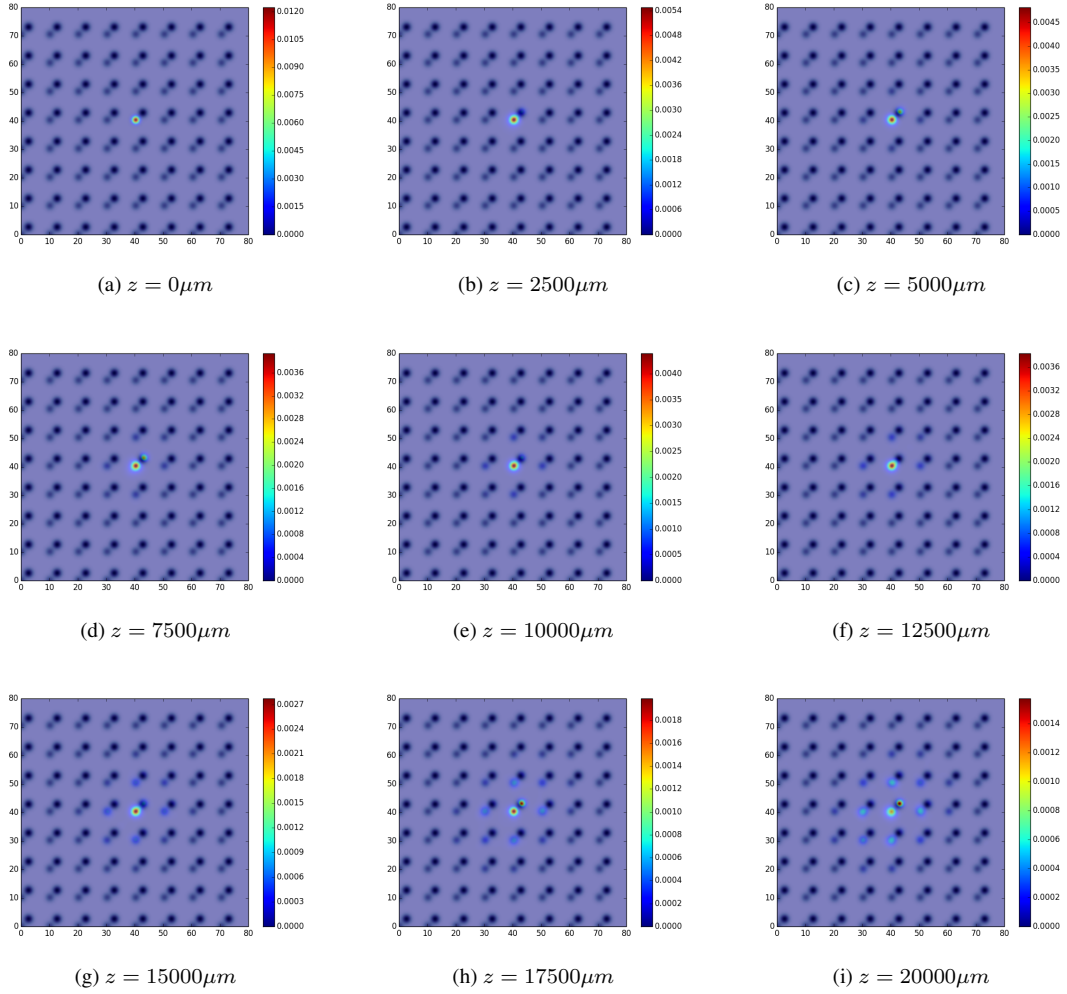
$$\psi(x, y, z = 0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-4a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(y-4a)^2}{2\sigma^2}} \quad (18)$$

Početna norma nije važna u linearnim sustavima. S druge strane u nelinearnim sustavima indeks loma ovisi o intenzitetu (Kerrov efekt)[7] pa početni intenzitet, odnosno kvadrat početne valne funkcije utječe na rezultat.



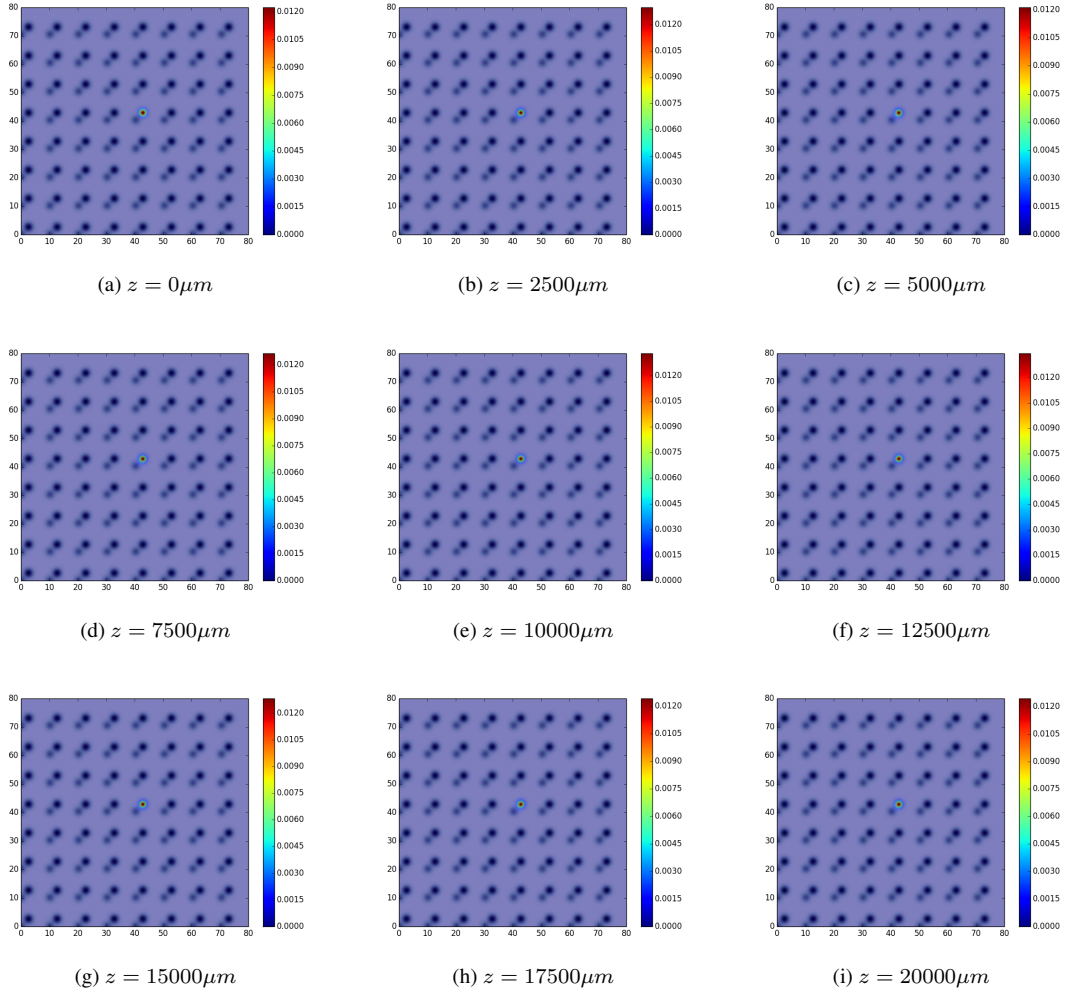
Slika 3: Ovisnost intenziteta svjetlosti o x i y za razne vrijednosti z prikazana je bojom prema skali uz svaku sliku. U pozadini je u crno bijelom pokazana rešetka.

Na slici 3 prikazano je stanje za $\Delta = 0$ svakih $2500\mu m$. Vidi se kako je dominantno tuneliranje između najbližih susjeda, a onda se svjetlost širi i prema daljima. Uvijek je prisutna lokalizacija svjetlosti u valovodima, kao što se i očekuje. Uočimo također da je širenje nešto brže u smjeru \vec{b} , nego ortogonalno na taj smjer, što je posljedica gradacije jačina tuneliranja kako je gore navedeno. Treba zapamtiti da slike predstavljaju opći trend, a između njih svjetlost tunelira između valovoda u oba smjera, ali sve više širi.



Slika 4: Ovisnost intenziteta svjetlosti o x i y za razne vrijednosti z prikazana je bojom prema skali uz svaku sliku. U pozadini je u crno-bijelom prikazana rešetka.

Na slici 4 prikazano je stanje za $\Delta = n_{L0}$ nakon svakih $2500\mu m$. Vidimo da je tuneliranje unutar baze smanjeno u odnosu na slučaj $\Delta = 0$, iako još postoji. Također, vidi se da je tuneliranje između istih elemenata baze u različitim ćelijama daleko sporije nego prije. Budući da se svjetlost u od valovoda na položaju $\vec{0}$ u bazi do susjednih valovoda na položaju $\vec{0}$ proširi jednako, zaključuje se da je sada glavni put tuneliranja direktno između tih elemenata, a ne posredno preko valovoda na položaju \vec{b} .



Slika 5: Ovisnost intenziteta svjetlosti o x i y za razne vrijednosti z prikazana je bojom prema skali uz svaku sliku. U pozadini je u crno-bijelom prikazana rešetka.

Na slici 5 prikazano je stanje $\Delta = n_0L$ nakon svakih $2500\mu m$, ali s početnim uvjetom:

$$\psi(x, y, z = 0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-4a-by)^2}{2\sigma^2} - \frac{(y-4a-by)^2}{2\sigma^2}} \quad (19)$$

Vidi se da uopće nema tuneliranja na istoj skali, što dalje potvrđuje prethodni zaključak, ali dovodi do drugog problema: "Potencijal" je predubok te je svjetlost previše lokalizirana u početnom valovodu. Simulacija je ponovljena za $\Delta = 0.5n_{L0}, 0.4n_{L0}, 0.25n_{L0}$, no tuneliranje se bitno pojačava samo između elemenata baze u istoj ćeliji, ne između ćelija.

5 Komentar

Pokazano je da je već povećanje indeksa loma između dva valovoda dovoljno da potisne tuneliranje između neekvivalentnih elemenata u različitim ćelijama, no sada valovod većeg indeksa loma previše zadržava svjetlost. Potrebno je dalje modificirati indeks loma i geometrijska svojstva valovoda da se dobije tuneliranje između elemenata baze na mjestu \vec{b} . Shema kojom bi se problem dalje rješavao je *grating assisted tunneling*[4] u sklopu kojoj bi se, pomoću rešetke ovisne o z , odnosno pod kutem na os z , moglo vratiti tuneliranje između elemenata baze u oba smjera te pojačati tuneliranje između elemenata baze na \vec{b} . Postupak odgovara postizanju rezonantnih prijelaza u sustavu hladnih atoma u optičkoj rešetci pomoću lasera u [5]

Dalje bi se moglo konstruirati bigrafen - dvije paralelne grafenske ravnine - i proučavati njegova svojstva, što je lakše od sličnih istraživanja u fizici čvrstog stanja. Sve dok sustav zadovoljava uvijete paraaksijalne aproksimacije, rezultati će biti ekvivalentni jer je jednačba koja opisuje gibanje elektrona u rešetci jednaka jednačbi koja opisuje gibanje svjetlosti u fotoničkom kristalu. Također, u ovakvim sustavima bi se moglo eksperimentalno proučavati solitone u tri dimenzije.

Literatura

- [1] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade *Photonic Crystals - Molding The Flow Of Light* Princeton University Press, Princeton, 2008
- [2] D. Jukić, H. Buljan *Four-dimensional photonic lattices and discrete tesseract solitons*, Phys. Rev. A 87, 013814 (2013)
- [3] C. Song, L. K. Gallos, S. Havlin, H. A. Makse *How to calculate the fractal dimension of a complex network: the box covering algorithm*, J. Stat. Mech. Theo. Exp. 03, P03006 (2007)
- [4] T. Dubček et al. *The Harper - Hofstadter Hamiltonian and conical diffraction in photonic lattices with grating assisted tunneling* New J. Phys. 17, 125002 (2015)
- [5] H. Miyake et al. *Realizing the Harper Hamiltonian with Laser - Assisted Tunneling in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. 111, 185302 (2013)
- [6] T. Nikšić *Seminar iz kvantne fizike - zimski semestar*
- [7] P. W. Milonni, J. H. Eberly *Laser Physics*, J. Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2010