

Slobodna ekspanzija anyona iz osnovnog stanja u potencijalu harmoničkog oscilatora

Katja Kustura

Mentor: prof. dr. sc. Hrvoje Buljan
Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10 000 Zagreb
(Dated: 26. siječnja 2016.)

U trodimenzionalnom svijetu, princip simetrizacije kvantno-mehaničke valne funkcije s obzirom na zamjenu čestica dovodi do podjele čestica u dvije velike grupe: bozone i fermione. U dvije dimenzije, dozvoljeno je postojanje i drugih čestica, kojima je dan naziv *anyoni*, a koje karakterizira frakcionalna statistika i spin. U ovom seminaru objašnjeno je zašto su anyoni mogući u dvije dimenzije i opisan je model anyona kao kompozitnih čestica, iz čega se dobiva slobodni anyonski Hamiltonijan. Riješen je problem dva anyona u potencijalu harmoničkog oscilatora te su ispitana svojstva anyonskog osnovnog stanja. Proučena je njegova slobodna ekspanzija te su izračunate korelacije dviju čestica, iz čega je uočena jasna i kontinuirana interpolacija od bozonskog do fermionskog slučaja. Na kraju, ukratko je opisana pojava anyona u kvantnom Hallovom efektu i mogućnost realizacije analognog Hamiltonijana u ultrahladnim atomskim sustavima.

I. UVOD

U kvantnoj fizici, nerazpoznatljivost identičnih čestica dovodi do principa simetrizacije valne funkcije, prema kojem valna funkcija sustava identičnih čestica može biti ili simetrična ili antisimetrična s obzirom na zamjenu čestica. Ovo dovodi do postojanja dvije grupe čestica u prirodi, bozona i fermiona, koji zadovoljavaju dvije različite kvantne statistike - Bose-Einsteinovu ili Fermi-Diracovu. Osim toga, ove dvije grupe razlikuju se i u spinu, koji je cjelobrojan za bozone i polucjelobrojan za fermione [1].

Ovo su jedine dvije mogućnosti u prirodi, međutim pokazuje se da u dvije dimenzije nema ovakvih ograničenja na valnu funkciju te je moguća kontinuirana interpolacija od bozona do fermiona i postojanje čestica frakcionalnog spina i statistike. Prilikom zamjene ovih čestica valna funkcija može poprimiti bilo koju fazu (a ne samo ± 1), te im je zbog toga dano ime anyoni [2].

Iako anyoni ne postoje kao elementarne čestice, u današnjim je eksperimentima moguće ograničavanje stupnjeva slobode u jednom ili više smjerova, što fizičarima omogućuje proučavanje nižedimenzionalnih sustava i mogućnost realizacije anyona kao kvazičestica. Štoviše, danas je već poznat jedan fenomen u kojemu su kolektivna pobuđenja anyonska, a to je kvantni Hallovi efekt [3].

S obzirom na ponašanje anyonske valne funkcije prilikom zamjene čestica, anyoni se dijele na Ablove, kod kojih ukupna faza koju valna funkcija dobije nakon zamjene nekoliko anyona ne ovisi o poretku kojim su oni permutirani, i ne-Ablove, kod kojih konačna faza ovisi o redoslijedu zamjene. Veliki interes za anyone postoji zbog potencijalne primjene ne-Ablovih anyona u kvantnim računalima [4]. Zbog specifičnih anyonskih svojstava koji ih razlikuju od bozona i fermiona, kvantna informacija bi u anyonskom sustavu bila zaštićena od smetnji iz okoline. Ovo bi riješilo problem dekoherencije koji postoji u ne-anyonskim modelima kvantnih računala i

učinilo kvantno računanje otpornim na greške (*fault tolerant*), što je važan korak u realizaciji efikasnog kvantnog računala. Treba napomenuti da su svi zasad predloženi modeli anyonskog kvantnog računanja samo teorijski i da je ovo područje tek u svom začetku [5].

U ovom seminaru dat ćemo pregled osnovnih svojstava anyona. Zatim ćemo riješiti problem dva anyona u potencijalnu harmoničkog oscilatora te proučiti slobodnu ekspanziju sustava iz osnovnog stanja i ispitati mogućnost eksperimentalne detekcije statistike čestica proučavanjem slobodno ekspanziranog stanja. Na kraju, ukratko ćemo opisati pojavu anyona u kvantnom Hallovom efektu i mogućnost realizacije u ultrahladnim atomskim sustavima [6].

II. OSNOVNA SVOJSTVA ANYONA

A. Razlika između dvije i tri dimenzije

Pretpostavimo da je $\psi(x_1, x_2)$ valna funkcija koja opisuje sustav dvije identične čestice u tri dimenzije (x_i označava položaj i kvantne brojeve i -te čestice). Zamjena čestica neće utjecati na vrijednosti opservabli, međutim valna funkcija prilikom takve zamjene dobiva fazni faktor:

$$\psi(x_2, x_1) = e^{i\pi\alpha} \psi(x_1, x_2). \quad (1)$$

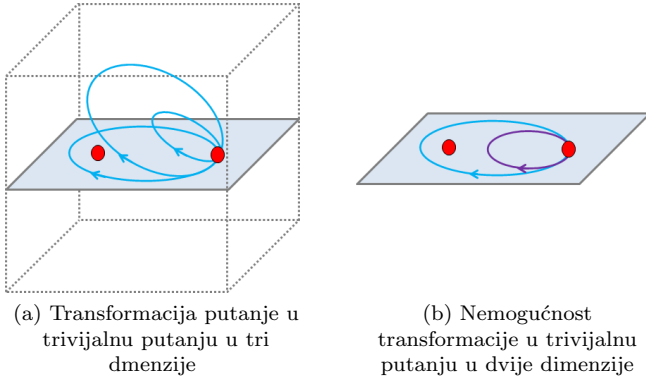
Ponovnom zamjenom čestica sustav se vraća u početnu konfiguraciju:

$$\psi(x_1, x_2) = e^{2\pi i\alpha} \psi(x_1, x_2). \quad (2)$$

Slijedi da u tri dimenzije α može biti samo 0 ili 1, odnosno čestice mogu biti samo bozoni ili fermioni.

Međutim, u dvije dimenzije ova analiza ne vrijedi i α može poprimiti bilo koju vrijednost između 0 i 1. Razliku između dvodimenzionalne i trodimenzionalne situacije najlakše je predočiti grafički [7]. Dvostruku za-

mjenju čestica možemo prikazati kao zatvorenu putanju jedne čestice oko druge.



Slika 1: Putanja jedne čestice oko druge

U tri dimenzije, moguće je ovu putanju deformirati i kontinuiranim transformacijama svesti u jednu točku (sl. 1a). Budući da je putanja jedne čestice oko druge topološki ekvivalentna točki, takva transformacija je trivijalna i ne može valnoj funkciji pridružiti nikakav fazni faktor, već je ona nakon transformacije jednaka sama sebi.

S druge strane, u dvije dimenzije nije moguće putanju jedne čestice oko druge kontinuiranim transformacijama svesti na jednu točku (sl. 1b). To znači da transformacija nije trivijalna te valna funkcija nakon povratka u početnu točku može dobiti fazni faktor različit od 1, odnosno $\alpha \in [0, 1]$.

Faktor α naziva se statistički parametar i on "mjeri" anyonsku prirodu čestica, od $\alpha = 0$ za bozone do $\alpha = 1$ za fermione. Iz relacije (2) očito je da anyonska valna funkcija nije jednoznačna. Osim položaja čestica, bitna je i njihova putanja.

Kvantna statistika i spin čestice povezani su "spin-statistika" teoremom, prema kojemu čestice cjelobrojnog spina slijede Bose-Einsteinovu statistiku ($\alpha = 0$), a čestice polucjelobrojnog spina Fermi-Diracovu ($\alpha = 1$). [1] Generalizacijom teorema na anyone slijedi da njima odgovara frakcionalan spin.

B. Model anyona pomoću Aharonov-Bohm efekta

Činjenica da anyoni dobiju fazni faktor kada kruže jedan oko drugog podsjeća na Aharonov-Bohm efekt, u kojem valna funkcija nabijene čestice koja kruži oko magnetskog toka dobiva fazni faktor. To je dovelo do prijedloga modela anyona kao točkastih čestica kojima su pridruženi električni naboj q i magnetski tok Φ (beskonačno tanak solenoid koji prolazi kroz česticu). [2] Vektorski potencijal od jedne čestice uzrokuje fazu kada druga čestica kruži oko nje, što odgovara anyonskoj statistici.

Vektorski potencijal koji daje magnetski tok Φ kroz

solenoid je

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\varphi}. \quad (3)$$

Baždarnom transformacijom moguće je eliminirati \mathbf{A} :

$$A'_\varphi = A_\varphi - \partial_\varphi \lambda = 0, \quad \lambda = \Phi\varphi/2\pi. \quad (4)$$

Istovremeno, valna funkcija se transformira u :

$$\psi'(r, \varphi) = e^{iq\lambda} \psi(r, \varphi) = e^{iq\Phi\varphi/2\pi} \psi(r, \varphi). \quad (5)$$

Valna funkcija $\psi'(r, \varphi)$ nije jednoznačna i prilikom kruženja jedne čestice oko druge, što odgovara povećanju kuta za 2π , dobiva fazu:

$$\psi'(r, \varphi + 2\pi) = e^{iq\Phi} \psi'(r, \varphi), \quad (6)$$

što odgovara anyonskoj statistici. Dakle, odgovarajućom transformacijom se sustav fermiona u vektorskom magnetskom potencijalu i s jednoznačnom valnom funkcijom može svesti na sustav anyona.

C. Anyonski slobodni Hamiltonijan

Ekvivalenciju između dva slobodna anyona i dva fermiona u vektorskom potencijalu možemo iskoristiti za dobivanje Hamiltonijana anyonskog sustava. [8]

Hamiltonijan slobodnog anyona je

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad (7)$$

uz rubni uvjet na valnu funkciju

$$\psi(r, \varphi + 2\pi) = e^{2\pi i \alpha} \psi(r, \varphi). \quad (8)$$

Transformacijom

$$\psi'(r, \varphi) = e^{-i\alpha\varphi} \psi(r, \varphi), \quad H' = e^{i\alpha\varphi} H e^{-i\alpha\varphi} \quad (9)$$

valna funkcija ψ' postaje jednoznačna, a transformirani Hamiltonijanom je

$$H'_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + i\alpha \right)^2 \right). \quad (10)$$

Rješavanjem problema sa Hamiltonijanom (10) dobivamo valnu funkciju $\psi'(r, \varphi)$, koju zatim možemo transformirati nazad u višeznačnu anyonsku valnu funkciju $\psi(r, \varphi)$.

III. PROBLEM 2 ANYONA U POTENCIJALU HARMONIČKOG OSCILATORA

Zanima nas osnovno stanje 2 anyona u potencijalu dvodimenzionalnog harmoničkog oscilatora $\psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Stationarna Schrödingerova jednačnja glasi

$$H\psi = \left(\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{r}_1^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{r}_2^2 \right) \psi = E\psi. \quad (11)$$

Transformacijom koordinata $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathbf{r})$, gdje je $\mathbf{R} = (R, \theta)$ vektor centra mase, a $\mathbf{r} = (r, \varphi)$ vektor relativnog položaja, Hamiltonijan postaje

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{CM}^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 \hat{R}^2 \right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{rel}^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \hat{r}^2 \right), \quad (12)$$

gdje je $M = 2m$ ukupna masa sustava, a $\mu = m/2$ reducirana masa. Hamiltonijan je separabilan na H_{CM} i H_{rel} , što znači da valnu funkciju možemo pisati kao umnožak

$$\psi(R, \theta, r, \varphi) = \Theta(R, \theta) \phi(r, \varphi). \quad (13)$$

S obzirom da fazni faktor kojeg valna funkcija dobiva pri zamjeni čestica ovisi samo o kutu relativne koordinate φ , slijedi da anyonska priroda čestica nema nikakvog utjecaja na valnu funkciju centra mase Θ . To znači da je $\Theta(R, \theta)$ rješenje običnog dvodimenzionalnog oscilatora u polarnim koordinatama [9]:

$$\Theta_{N_c L_c}(R, \theta) = \mathcal{N} e^{i L_c \theta} R^{|L_c|} e^{-\frac{M \omega R^2}{2\hbar}} L_{N_c}^{L_c} \left(\frac{M \omega R^2}{2\hbar} \right), \quad (14)$$

gdje je $N_c = 0, 1, 2, \dots$ i $L_c = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, (kvantni brojevi za gibanje centra mase), a $L_n^k(x)$ je generalizirani Laguerrov polinom.

Valnu funkciju relativne koordinate transformiramo u jednoznačni oblik pomoću relacije (9) pa jednadžba za relativnu koordinatu postaje:

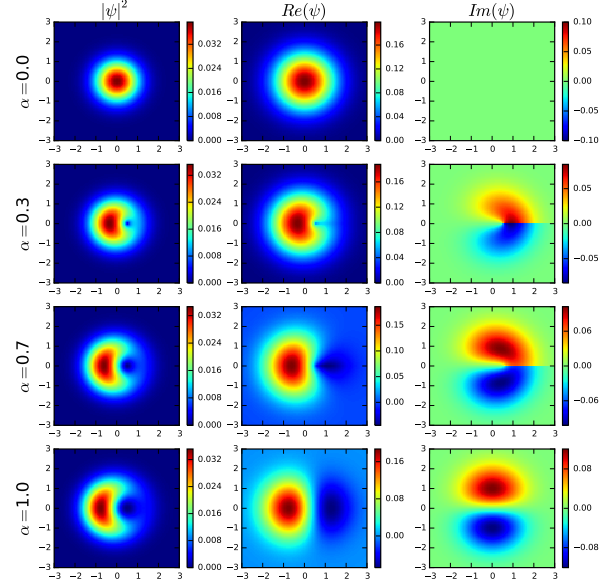
$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + i\alpha \right)^2 \right) \phi' + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \hat{r}^2 \phi' = E_{rel} \phi' \quad (15)$$

Valnu funkciju možemo zapisati kao $\phi' = R(r) e^{i L_r \varphi}$, gdje je $L_r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ što jednadžbu za radijalni dio svodi na

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} (L_r - \alpha)^2 \right) + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \hat{r}^2 - E_{rel} \right] R(r) = 0 \quad (16)$$

Ova jednadžba potpuno je analogna radijalnoj jednadžbi za dvodimenzionalni harmonički oscilator [9] - jedina razlika je da je kvantni broj angularnog momenta L zamijenjen sa necjelobrojnim $(L_r - \alpha)$. Ovo se slaže s očekivanjem da anyoni imaju frakcionalan spin. Transformacijom funkcije ϕ' nazad u višeznačnu funkciju ϕ , u kutnom dijelu dobivamo dodatan faktor $e^{i\alpha\varphi}$, pa je ukupna valna funkcija $\phi(r, \varphi)$ analogna funkciji (14), uz zamjenu $N_c \rightarrow N_r = 0, 1, 2, \dots$ i $L_c \rightarrow L_r - \alpha$ (kvantni brojevi za relativno gibanje), a ukupno rješenje problema dva anyona u dvodimenzionalnom harmoničkom potencijalu je njihov umnožak.

U osnovnom stanju, svi kvantni brojevi N_c, L_c, N_r i L_r su nula i valna funkcija kada se koordinate prebace



Slika 2: Osnovno stanje 2 anyona u potencijalu harmoničkog oscilatora za razne statističke parametre α . Jedna čestica fiksirana je u $(0.5, 0)$.

natrag u $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ i izraze kao kompleksni brojevi $\mathbf{r}_1 \equiv z_1 = x_1 + iy_1$, $\mathbf{r}_2 \equiv z_2 = x_2 + iy_2$ je:

$$\psi_0(z_1, z_2) = \mathcal{N} (z_1 - z_2)^\alpha e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(z_1^2 + z_2^2)}, \quad (17)$$

Valna funkcija osnovnog stanja dva interagirajuća anyona ne može se rastaviti na umnožak jednočestičnih valnih funkcija. Ovo je posljedica specifične vektorske interakcije koja je baždarenjem već "ugrađena" u valnu funkciju anyona (relacija (4)). Ovo čini problem neinteragirajućih anyona netrivialnim, te je analitičko rješenje problema N neinteragirajućih anyona moguće naći samo za $N = 2$. [10]

Na sl. 2 prikazana je valna funkcija za nekoliko vrijednosti parametra α , kada jednu od čestica fiksiramo u točki $\mathbf{r}_1 = (0.5, 0)$ (mjereno u jedinicama prirodne duljine sustava ($\ell = \sqrt{\hbar/m\omega}$)).

Za $\alpha = 0, 1$ dobiva se poznata bozonska i fermionska valna funkcija. Za α između ove dvije krajnje vrijednosti možemo vidjeti kako se funkcija mijenja iz bozonske u fermionsku. Uočljiv je Paulijev princip isključenja već i za anyone s malim α . Po tome bi se moglo reći da anyoni više nalikuju na fermione nego na bozone, iako je vjerojatnost nalaženja anyona u neposrednoj blizini drugog ($r \ll 1, r \neq 0$), veća nego u slučaju fermiona. Također se uočava rez na pozitivnoj realnoj osi za $\text{Im}(\psi)$, koji dolazi od višeznačnosti anyonske valne funkcije. Približavanjem α fermionskoj vrijednosti, rez se smanjuje i iščezava, te je fermionska valna funkcija jednoznačna.

IV. SLOBODNA EKSPANZIJA IZ OSNOVNOG STANJA HARMONIČKOG OSCILATORA

Sljedeće što nas zanima je kako će se ponašati valna funkcija nakon što naglo isključimo harmonički potencijal, tj. slobodna ekspanzija sustava. Ovo je eksperimentalno vrlo često korištena metoda u atomskim sustavima i naziva se *time of flight* mjerenje [11]. U ultrahladnim atomskim sustavima, N atoma je laserima moguće zarobiti u harmonički potencijal u dvije dimenzije. Isključivanjem lasera, potencijal pada na nulu te se tada može proučavati slobodna ekspanzija atomskog plina.

Zanima nas bi li se pomoću ove metode mogla mjeriti statistika čestica. Dakle, ako pretpostavimo da je nekom metodom moguće eksperimentalno proizvesti anyone kao kvazičestice u dvije dimenzije, pitanje je bi li se slobodna ekspanzija mogla koristiti kao moguća metoda za detekciju anyona i određivanje pripadnog statističkog parametra.

Može se pokazati da je valna funkcija neinteragirajućih čestica nakon dugo vremena slobodne ekspanzije proporcionalna Fourierovom transformatu valne funkcije u početnom trenutku [12]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \propto |\tilde{\psi}_0(M\mathbf{r}/\hbar t)|^2 \quad (18)$$

Intuitivno, to je lako razumjeti jer Fourierov transform valne funkcije u početnom trenutku opisuje početnu raspodjelu brzina čestica. Nakon što se isključi potencijal i pusti sustav da slobodno expandira, čestice se gibaju brzinama koje su imale u početnom trenutku, uzrokujući ekspanziju.

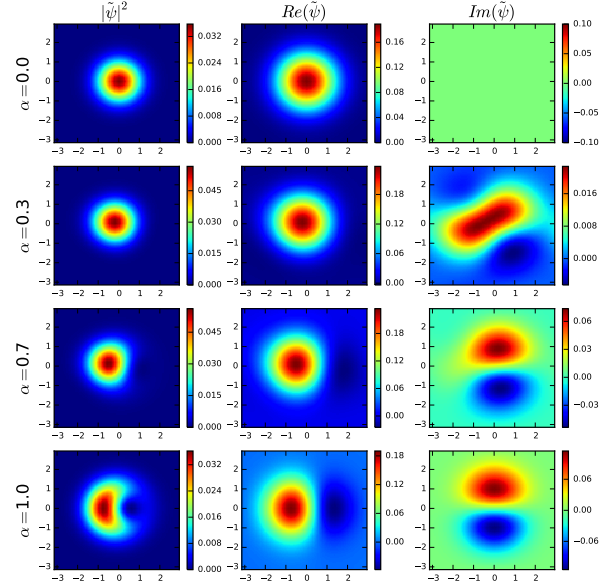
Koristeći ovo svojstvo, raspodjelu anyona u slobodnom prostoru puno vremena nakon što smo ih pustili iz osnovnog stanja harmoničkog oscilatora nalazimo radeći Fourierov transformat funkcije 17. Na slici 3 dan je $|\tilde{\psi}_0(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|^2$ za razne statističke parametre α , kada je impuls jedne čestice fiksiran u $\mathbf{k}_1 = (0.5, 0)$.

Za bozone i fermione, sustav je nakon puno vremena sam sebi sličan. Anyonska valna funkcija nije zadržala početni oblik, iako i dalje postoji jasan kontinuirani prijelaz sa bozonske statistike na fermionsku.

Pomoću Fourierovog transformata valne funkcije možemo također izračunati i korelacije dviju čestica, odnosno vjerojatnost da jedna čestica ima određen impuls, ako je impuls druge čestice fiksiran. Kao na sl. 3, jednu česticu fiksiramo na položaj $\mathbf{k}_1 = 0.5\hat{x}$. Ona se giba u smjeru \hat{x} osi i fazni kut joj je $\varphi_1 = 0$. Vjerojatnost da je smjer druge čestice pod kutem $\varphi = [0, 2\pi]$ u odnosu na smjer prve čestice, dobivamo usrednjavanjem Fourierovog transformata po svim mogućim vrijednostima impulsa k_2 :

$$P(\varphi) = \int_0^\infty \left| \tilde{\psi}_0[(0.5, 0), \mathbf{k}_2 = k_2 e^{i\varphi}] \right|^2 dk_2. \quad (19)$$

Ovaj integral izračunat je numerički te su rezultati za razne α prikazani grafom na sl. 4.



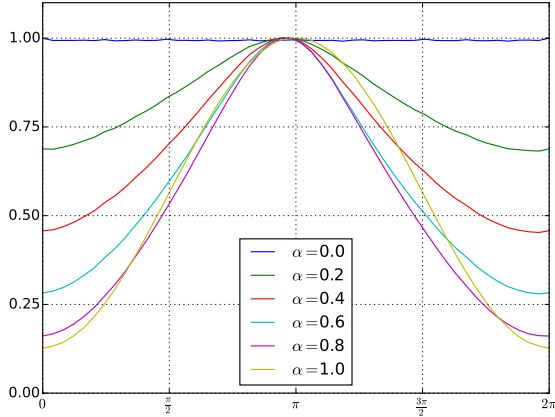
Slika 3: Slobodna ekspanzija 2 anyona za razne statističke parametre α . $|\tilde{\psi}_0(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|^2$ je proporcionalan raspodjeli čestica nakon puno vremena. Jedna od čestica fiksirana je tako da joj je impuls $\mathbf{k}_1 = (0.5, 0)$.

U slučaju bozona i fermiona, dobivamo poznate i očekivane rezultate. Za bozone, smjer gibanja jedne čestice neovisan je o smjeru gibanja druge čestice, dok je za 2 fermiona najveća vjerojatnost da se gibaju u suprotnim smjerovima, što je posljedica Paulijevog principa isključenja. Za anyonsku statistiku, vjerojatnost se, kao i sve računate opservable do sad, kontinuirano mijenja od bozonskog do fermionskog slučaja, te je moguće jasno razlikovati linije koje pripadaju anyonima različitih statistika, što se najbolje uočava na kutu $\varphi = 0$, gdje vjerojatnost nalaženja čestice jasno opada s povećanjem statističke interakcije.

S obzirom da je metoda mjerenja korelacija u slobodno expandiranom plinu standardna metoda u fizici ultrahladnih atomskih sustava, iz ovoga vidimo da bi se, u slučaju eksperimentalne realizacije anyona, ista tehnika mogla bez problema proširiti ne samo na detekciju anyona, nego i na mjerenje statističkog parametra α .

V. EKSPERIMENTALNA REALIZACIJA ANYONA

Anyonska pobuđenja eksperimentalno su pronađena u samo jednom fizikalnom sustavu: dvodimenzionalnom elektronskom plinu u jakom magnetskom polju. Pojava do koje pritom dolazi je racionalni kvantni Hallov efekt, a dobiveni anyoni su Abelovi. Za sada ne postoji eksperimentalna realizacija ne-Abelovih anyona. U ovom po-



Slika 4: Vjerojatnost nalaženja druge čestice o smjeru impulsa \mathbf{k}_2 . Prva čestica giba se u smjeru $\varphi = 0$. Vrijednosti su normirane na maksimalnu vjerojatnost.

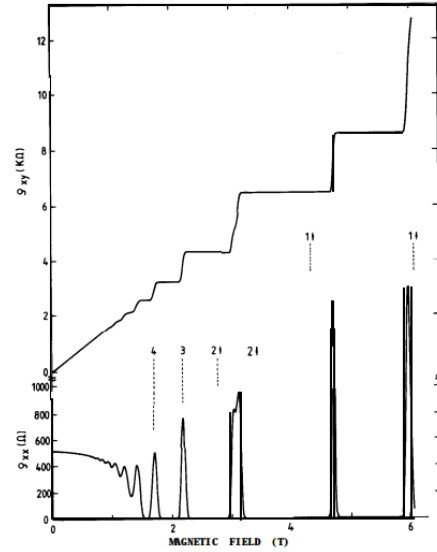
glavlju dan je kratak pregled kvantnog Hallovog efekta, a zatim i moguća analogna realizacija anyona u ultrahladnim atomskim sustavima.

A. Kvantni Hallov efekt

Klasični Hallov efekt je pojava transverznog napona u dvodimenzionalnom vodiču kojim teče struja i koji se nalazi u magnetskom polju okomitom na ravninu vodiča. Ovaj efekt vrlo je lako razumjeti kao posljedicu djelovanja Lorentzove sile na elektrone koji se gibaju u vodiču. Bitan rezultat je pojava transverznog, Hallovog otpora, koji je linearno proporcionalan vanjskom polju [13]: $R_H = \frac{B}{n_e e}$, gdje je B jakost vanjskog polja, a n_e je koncentracija nosilaca naboja e , dok je longitudinalan otpor neovisan o magnetskom polju. Graf ovisnosti Hallovog otpora o magnetskom polju je pravac.

Primjenom dovoljno velikih magnetskih polja ($B \sim 5 - 10$ T) i hlađenjem na dovoljno nisku temperaturu ($T < 4$ K), mjerenja su pokazala da Hallov otpor više nije linearan, nego postaje kvantiziran (sl. 5), i ova pojava naziva se kvantnim Hallovim efektom (QHE). U ovisnosti R_H o B javljaju se stepenice za koje je mjerenjima utvrđeno da imaju otpor $R_H = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}$, gdje je ν cijeli broj i h je Planckova konstanta. Ovaj rezultat izmjeren je vrlo precizno te vrijedi neovisno o vrsti materijala i jakosti polja. Osim toga, za vodljivost u longitudinalnom smjeru izmjereno je da je nula na stepenicama, dok na prijelazu stepenica ima nagli skok (također prikazano na sl. 5). Ovakav QHE, sa cjelobrojnim ν , naziva se cjelobrojni QHE.

Pojava QHE može se vrlo uspješno objasniti pomoću Landau stanja, što su svojstvena stanja elektrona u magnetskom polju. Rješavanjem problema elektrona u xy



Slika 5: Kvantni Hallov efekt. Preuzeto iz [3].

ravnini u magnetskom polju $B\hat{z}$:

$$\frac{1}{2m_e} (-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2 \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (20)$$

za spektar elektronskih energija dobiva se $E = \hbar\omega_C (\frac{1}{2} + n)$, gdje je $n = 0, 1, 2, \dots$ i $\omega_C = \frac{eB}{m}$ je ciklotronska frekvencija, dok za degeneraciju svakog stanja vrijedi $N_L = \frac{e}{h} BL_x L_y$, gdje su L_x, L_y dimenzije sustava. [14] Kontinuirani spektar slobodnog elektrona u magnetskom polju cijepa se na diskretne ekvidistantne nivoe velike degeneriranosti, a udaljenost među njima ovisi o jakosti vanjskog polja.

Ovime se mogu objasniti stepenice u QHE. Za faktor ν , u sustavu je popunjeno prvih ν Landau nivoa. Povećanjem B duž stepenice otpor se ne mijenja jer se Fermijeva energija nalazi u području između dva Landau stanja. Daljnjim povećanjem B , Fermijeva energija prelazi iduće Landau stanje čime se na grafu dobija nova stepenica u R_H . U realnim uzorcima, Landau stanja nisu δ -funkcije već imaju određenu širinu, zbog čega se prelaskom preko novog Landau stanja povećava longitudinalna vodljivost, jer je tada zadnja vrpca samo djelomično popunjena.

Mjerenjem QHE na još većim poljima ustanovljeno je postojanje stepenica koje ne odgovaraju cjelobrojnim faktorima ν , već su se oni mogli prikazati kao $\frac{p}{q}$, gdje su p i q mali cijeli brojevi, q je najčešće neparan i $p < q$. Pojava racionalnih faktora bila je potpuno neobjašnjiva pomoću teorije jednočestičnih Landau stanja te je snažno ukazivala na to da se radi o višestetičnom fenomenu. Utjecaj elektronskih interakcija dovodi do cijepanja osnovnog Landau stanja, zbog čega dolazi do necjelobrojnih faktora ispunjenja stanja ν . Upravo ova racionalna stanja QHE predstavljaju anyonska pobuđenja, a jedan od modela kojim je moguće opisati racionalni QHE su

kompozitni fermioni, kvazi-čestice koje su vezana stanja elektrona i magnetskog toka $2p\frac{h}{e}$, gdje je p cijeli broj. Zbog postojanja intrinzičnog magnetskog toka, ukupno polje koje osjećaju čestice je manje od vanjskog B . Zbog toga su efektivna Landau stanja gušća i osnovnom stanju pripada manje elektrona $N_e < N_L/(2p+1)$. Dakle, racionalni QHE može se opisati kao cjelobrojni QHE u kojem ne sudjeluju elektroni, nego kvazičestice kompozitni fermioni. Ako to usporedimo s analizom u poglavlju IIB, vidimo da su kompozitni fermioni upravo model anyonskih pobuđenja, gdje je $\nu \equiv \alpha$.

Hamiltonijan koji odgovara racionalnom QHE je suma jednočestičnih Hamiltonijana (20), uz dodatak kulonske elektron-elektron interakcije:

$$H = \frac{1}{2m_e} \sum_i (-i\nabla_i^2 + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i))^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\tilde{e}^2}{r_{ij}} \quad (21)$$

Fenomenološki je razvijen model kojim su dobro opisana svojstvena stanja Hamiltonijana (21) s $\nu = 1/(2p+1)$. On se temelji na modifikaciji višečestične valne funkcije cjelobrojnog QHE, dobivene pomoću Landau stanja, dodavanjem člana koji modelira elektron-elektron međudjelovnja. [14] Ovakvom modifikacijom dobiva se *ansatz* za valnu funkciju racionalnog QHE koji se naziva Laughlin stanje:

$$\psi = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2p+1} \exp(-\sum_{i=1}^{N_e} |z_i|^2/4), \quad (22)$$

gdje su $z_i = x_i + iy_i$ koordinate i -te čestice zapisane kao kompleksan broj i prikazane u jedinicama prirodne duljine sustava $\ell = \sqrt{m\omega/\hbar}$.

B. Prijedlog realizacije u ultrahladnim atomskim sustavima

Anyoni koji se javljaju u racionalnom QHE su Abelovi. Zbog potencijalno velike važnosti ne-Abelovih anyona za topološko kvantno računanje, velik interes postoji za realizaciju anyona u ultrahladnim atomskim sustavima (UCA), jer oni predstavljaju vrlo kontrolabilan sustav u kojem je interakcije među atomima i vanjski potencijal moguće modelirati elektromagnetskim poljima (laserima), što bi omogućilo veću kontrolu nad statistikom anyonskih pobuđenja. Razvoj eksperimentalnih tehnika, kao i eksperimentalno ostvarenje Bose-Einsteinovog kondenzata, omogućilo je postizanje i proučavanje raznih kvantnih fenomena u UCA sustavima. Zbog mogućnosti velike kontrole i modeliranja interakcija i potencijala pomoću lasera, ovi se sustavi danas koriste kao kvantni simulatori raznih čvrstostanjskih sustava. Kao jedna od mogućnosti, predložen je eksperiment za realizaciju i detekciju anyonskih kvazičestica u dvodimenzionalnom rotirajućem Bose-Einsteinovom kondenzatu [6].

Atomi se nalaze u dvodimenzionalnom potencijalu harmoničkog oscilatora konstante ω , dok je u trećoj dimenziji potencijal dovoljno jak da je onemogućen prelazak u viša stanja i sustav je efektivno dvodimenzionalan. Između čestica pretpostvljena je kontaktna interakcija $V_{int} \sim \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. Cijeli sustav rotira frekvencijom Ω , koja uzrokuje Coriolisovu silu na atome i ima ulogu Lorentzove sile na neutralne atome. Sintetičku Lorentzovu silu moguće je dobiti i uvođenjem dodatnih lasera. Hamiltonijan ovako opisanog sustava je:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(-\nabla_i^2 + \mathbf{r}_i^2 - 2\frac{\Omega}{\omega} L_{iz} \right) + \eta \sum_{i < j}^N \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (23)$$

U limesu $\Omega = \omega$, Hamiltonijan (23) formalno je identičan racionalnom QHE Hamiltonijanu (21), osim što je kulonska interakcija zamijenjena kontaktnom. Atomaska valna funkcija može se napisati kao Laughlinovo stanje (22) sa $2p+1 = 2$, odnosno $\nu = \frac{1}{2}$:

$$\psi_0 = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 \exp(-\sum_{i=1}^{N_e} |z_i|^2/4) \quad (24)$$

Faktor $(2p+1)$ ima baš tu vrijednost jer su atomi bozoni te valna funkcija mora biti parna.

Kreiranje kvazičestice frakcionalne statistike postiže se sporim uključivanjem lasera lokaliziranog na poziciji z_0 . Utjecaj lasera može se u Hamiltonijan dodati članom $V_0 \sum_i \delta(z_i - z_0)$, koji predstavlja odbojnu interakciju lokaliziranu u z_0 . Nakon dovoljno dugo vremena od uključivanja lasera, sustav prelazi u Laughlinovo stanje sa kvazičesticom u z_0 :

$$\psi_{z_0} = \prod_i (z_i - z_0) \psi_0, \quad (25)$$

Ova kvazičestica je anyon, a njena statistika je $\alpha = \nu = \frac{1}{2}$ i može se detektirati u nekoliko koraka: Sustav se pripremi u stanju ψ_0 i pomoću lasera L_1 na poziciji z_0 evoluirao u ψ_{z_0} . Zatim se uključi novi laser L_2 , na poziciji z_1 , čime započne evolucija iz stanja ψ_{z_0} u stanje $\psi_{z_0, z_1} = \prod_i (z_i - z_0)(z_i - z_1) \psi_0$. Ključna je stvar isključiti laser L_2 u trenutku kada sustav još nije evoluirao u stanje ψ_{z_0, z_1} , već se nalazi u superpoziciji $\Psi \sim \psi_{z_0} + \psi_{z_0, z_1}$. Ovo je superpozicija stanja s jednom i dvije kvazičestice. Nakon isključenja lasera L_2 , laserom L_1 napravi se kružna zatvorena putanja oko položaja z_1 . Ovo odgovara kruženju jedne kvazičestice oko druge.

U slučaju stanja ψ_{z_0} , putanja je trivijalna te ne dobiva fazu, dok u slučaju stanja ψ_{z_0, z_1} dolazi do kruženja jedne kvazičestice (z_0) oko druge (z_1) što je netrivialna putanja tijekom koje valna funkcija dobiva fazu $e^{2\pi i \alpha} = -1$. Prema tome, nakon povratka lasera L_1 u početnu točku, valna funkcija je $\Psi \rightarrow \Psi' \sim \psi_{z_0} - \psi_{z_0, z_1}$. Ponovnim uključivanjem lasera L_2 , sustav nastavlja evoluciju,

međutim nakon dugo vremena više ne evoluiru u stanje ψ_{z_0, z_1} sa dvije kvazičestice, nego se vraća u početno stanje ψ_{z_0} . Adijabatskim kruženjem lasera L_1 oko točke z_1 , valna funkcija se promijenila zbog anyonske statistike pobuđenja. U ovakvom eksperimentalnom sustavu, moguća je dakle realizacija anyona i detekcija njihove statistike.

Iako je izloženi model jednostavan, zbog zahtjevnih uvjeta koji moraju biti ispunjeni za njegovo eksperimentalno ostvarenje, on još uvijek nije postignut u laboratoriju. Kvantni Hallov efekt i dalje ostaje jedini sustav u prirodi u kojem su Abelovi anyoni detektirani.

VI. ZAKLJUČAK

U ovom seminaru proučena je kvantna fizika dvodimenzionalnih čestica s frakcionalnom statistikom, anyona. Anyoni se mogu modelirati kao fermioni vezani na kvant magnetskog toka, pri čemu se između čestica javlja dugodosežan vektorski potencijal. Baždarnom transformacijom moguće je problem svesti na problem neinteragirajućih čestica, pri čemu se anyonska priroda očituje u statističkoj fazi koju valna funkcija dobiva pri zamjeni čestica.

Analički je riješen problem dva anyona u potencijalu harmoničkog oscilatora te je ustanovljeno da je osnovno stanje sustava netrivialno te se ne može rastaviti na umnožak jednočestičnih valnih funkcija. Ovo je posljedica statističke interakcije između anyona i razlog zašto su problemi sa 3 i više anyona analitički nerješivi. Uočeno je da anyoni zadovoljavaju generalizirani Paulijev princip isključenja i da se 2 anyona ne mogu naći u istom kvantnom stanju.

Fourierovim transformiranjem osnovnog stanja harmoničkog oscilatora proučena je slobodna ekspanzija

anyona nakon što se harmonički potencijal naglo isključi. Računanjem i grafičkim prikazom korelacija između dvije čestice uočen je kontinuirani prijelaz iz bozonskih u fermionske korelacije, u ovisnosti o statističkom parametru. S obzirom da su korelacije opservabla koja se može lako mjeriti u pokusima s ultrahladnim atomskim plinovima, ovime je pokazana mogućnost detekcije anyonske prirode pobuđenja i određivanje statističkog parametra kao devijacija korelacija od poznatih bozonskih i fermionskih krivulja. Osim za slučaj dva anyona, u budućnosti bi bilo poželjno proširiti račun i na sustav 3 ili više anyona, kako bi se ispitala svojstva višestičnih anyonskih sustava. Ovdje bi veličina od interesa bila jednočestična matrica gustoće (položaj jedne čestice kada se prointegrira po položajima svih drugih čestica).

Na kraju, dan je pregled jedinog zasad poznatog eksperimentalnog osvarenja Abelovih anyonskih pobuđenja: kvantnog Hallovog efekta. Ukratko je opisana kvantna fizika sustava te kako u njemu dolazi do frakcionalnih pobuđenja. Pregled je upotpunjen prijedlogom realizacije ekvivalentnog sustava sa ultrahladnim atomima, koji zbog velikih tehnoloških zahtjeva još nije eksperimentalno izveden. No, zbog potencijalno velike važnosti anyona za realizaciju stabilnih kvantnih računala, interes za mogućnostima realizacije i detekcije anyona u vrlo kontrolabilnim ultrahladnim atomskim sustavima je i dalje velik.

ZAHVALE

Zahvaljujem mentoru prof. Hrvoju Buljanu i Teni Dubček na uloženom vremenu, pomoći i brojnim poučnim razgovorima tijekom izrade ovog rada. Također, posebno hvala Teni Dubček na pomoći oko numeričkog računa i analize rezultata.

-
- [1] G. Auletta, M. Fortunato, and G. Parisi, *Quantum Mechanics*, 6. i 7. poglavlje (Cambridge University Press, 2009).
- [2] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982).
- [3] K. Klitzing, Nobel Lecture: The Quantized Hall Effect (1985).
- [4] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1083 (2008).
- [5] Graham P. Collins, *Scientific American* **294**, 57 (2006).
- [6] B. Paredes, P. Fedichev, J. I. Cirac, P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 010402 (2001).
- [7] G. K. Brennen, J. K. Pachos, *Proc. R. Soc. A* **464**, 1 (2008).
- [8] J. M. Leinaas, J. Myrheim, *Nuovo Cimento* **37B**, 1 (1977).
- [9] F. S. Levin, *An Introduction to Quantum Theory*, poglavlje 11.7 (Cambridge University Press, 2002).
- [10] S. Mashkevich, J. Myrheim, K. Olaussen, R. Rietman, *Phys. Lett. B* **348**, 473 (1995).
- [11] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [12] N. Read, N. R. Cooper, *Phys. Rev. A* **68**, 035601 (2003).
- [13] D. J. Griffiths, *Introduction to Classical Electrodynamics*, 5. poglavlje (Prentice-Hall, 1999).
- [14] J. Solyom, *Fundamentals of the Physics of Solids*, Volume II (22. poglavlje), Volume III (32. poglavlje) (Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009).