

Renormalizacijske grupne jednađbe za kvantnu elektrodinamiku i kvantnu kromodinamiku

Marija Mađor-Božinović, F-3851
 Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10 000 Zagreb

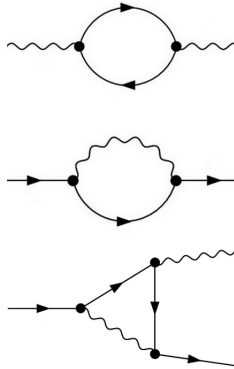
Sažetak

U seminaru su proučavane renormalizacijske grupne jednađbe za kvantnu elektrodinamiku i kvantnu kromodinamiku na nivou jedne petlje. Uvođenjem minimalne suptrakcije ispostavilo se da su β funkcije, koje pokazuju ovisnost konstante vezanja u teoriji o skali energije, jednoznačno određene polovima prvog reda u golim konstantama vezanja. Doprinosi β funkcijama računali su se iz dijagrama self-energija, polarizacija i popravke vrha u najnižem redu, te su ekstrahirani samo članovi koji doprinose. Računi su provedeni u formalizmu renormalizacijske perturbacijske teorije, uz korištenje dimenzionalne regularizacije, gdje je za dimenziju prostorvremena uzeto, po Machacek-Vaughn formalizmu, $D = 4 - 2\epsilon$. Ispostavilo se da povećanjem klizne skale, a time i energije, konstanta fine strukture raste i za neku konačnu energiju ima Landauov pol. Konstanta fine strukture za jaku silu pokazala je opadanje s povećanjem energije odnosno postojanje asimptotske slobode. Rezultati su u skladu s literaturom i eksperimentima.

1 Uvod

1.1 Renormalizirana perturbacijska teorija

U teoriji polja općenito se javljaju divergencije. Pri računanju amplituda za bilo kakve procese već u prvom redu računa smetnje javljaju se integrali koje standardnim metodama nije moguće izvrijedniti. To se može dogoditi zbog emisije mekih (niskoenergetskih) fotona kojima impuls teži nuli, a time fotonski propagator divergira, čime se javljaju tzv. infracrvene (IR) divergencije. Drugi je razlog postojanje petlji. Na primjer, u kvantnoj elektrodinamici u najnižem redu računa smetnje javljaju se dijagrami



Svaka petlja u amplitudi sadrži integraciju po impulsu

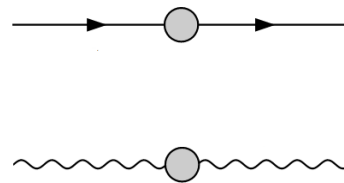
$$\int_0^\infty \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \quad (1)$$

čime amplituda divergira za velike prijenose impulsa (tzv. UV divergencija). Njih ćemo razmatrati u ovom seminaru. Jedna od metoda sustavnog uklanjanja divergencija jest renormalizirana perturbacijska teorija

[1]. Na primjeru QED-a ona funkcionira na sljedeći način. Originalni QED Lagrangian (gustoću Lagrangiana konvencionalno nazivamo Lagrangianom) jest

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_B)\psi - e_B\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (2)$$

pri čemu su m_B i e_B gola masa i goli naboj (eng. bare), nerenormalizirani odnosno neobservabilni parametri teorije. Nadalje, kada razmotrimo fermionski i fotonski propagator u svim redovima računa smetnje, odnosno ako ih promatramo kao korelacijsku funkciju dva polja u interakcijskom vakuumu, oni imaju oblik



gdje zatamnjeni krugovi predstavljaju sumu svih jednočestičnih ireducibilnih dijagrama (1PI). 1PI su svi oni dijagrami koji se ne mogu razdijeliti u dva nezavisna dijagrama rezanjem jedne linije. Ti propagatori imaju vrijednosti

$$P_f = \frac{iZ_2}{\not{p} - m} \quad (3a)$$

$$P_\gamma = \frac{-iZ_3 g_{\mu\nu}}{q^2} \quad (3b)$$

Iz (2) i (3) očitno je da polja možemo zamijeniti renormaliziranim poljima

$$\psi = Z_2^{1/2} \psi_r \quad (4a)$$

$$A^\mu = Z_3^{1/2} A_r^\mu \quad (4b)$$

čime smo eliminirali faktore Z_2 i Z_3 u izrazima za propagatore. Novi Lagrangian postaje

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} Z_3 (F_r^{\mu\nu})^2 + \\ & + Z_2 \bar{\psi}_r (i\cancel{\partial} - m_B) \psi_r - \\ & - e_B Z_2 Z_3^{1/2} \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu \end{aligned} \quad (5)$$

Nadalje, uvodimo definiciju fizikalne mase kao položaja pola elektronskog propagatora, odnosno

$$\sum (\not{p} = m) = 0 \quad (6)$$

i skaliramo fizikalni naboj uvođenjem dodatnog faktora skaliranja Z_1 na sljedeći način:

$$e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_B \quad (7)$$

Sada Lagrangian možemo razdvojiti na 2 dijela

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r (i\cancel{\partial} - m) \psi_r - e \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu + \\ & + \left(-\frac{1}{4} \delta_3 (F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r (i\delta_2 \cancel{\partial} - \delta_m) \psi_r - e \delta_1 \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r A_r^\mu \right) \end{aligned} \quad (8)$$

gdje prvi red predstavlja observabilni, renormalizirani dio, dok se u drugom nalaze svi divergentni članovi, koji se zovu kontračlanovi (eng. counterterms). Renormalizacijske konstante u kontračlanovima dane su

$$\delta_1 = Z_1 - 1 \quad (9a)$$

$$\delta_2 = Z_2 - 1 \quad (9b)$$

$$\delta_3 = Z_3 - 1 \quad (9c)$$

$$\delta_m = Z_2 m_B - m \quad (9d)$$

Iz Lagrangiana (8) sada se mogu lako iščitati Feynmanova pravila, a svaki kontračlan određen je svojim renormalizacijskim uvjetom. U konkretnom slučaju ti su uvjeti da je elektronska i fotonska jakost polja jednaka jedan u točkama $\not{p} = m$ odnosno $q^2 = 0$, da je fizikalni naboj definiran u $q^\mu = 0$, te da je masa definirana sa (6). Sa zadanim uvjetima mogu se odrediti renormalizacijske konstante (9) u perturbativnom računu smetnje. Postupak je iterativan, odnosno svaki red računa smetnje posebno se računa. Izračuni renormalizacijskih grupnih jednadžbi (RGEs) provest će se u okviru renormalizirane perturbacijske teorije.

1.2 Renormalizacijska grupa

Model koji opisuje sistem elementarnih čestica određen je svojim Lagrangianom, u kojem se nalaze sva polja, propagatori i vrhovi koje model sadržava. Uz svaki vrh stoji pripadajuća konstanta vezanja koja spada u parametre teorije. Pod renormalizacijskom grupom podrazumijevamo metode koje omogućavaju proučavanje tih parametara na različitim skalama energije. Od posebne je zanimljivosti proučiti kako se parametri teorije ponašaju na manjim skalama udaljenosti, odnosno na visokim energijama.

Renormalizacijsku grupu uveli su Gell-Mann i Low zbog nemogućnosti funkcioniranja perturbacijske teorije u QED-u na jako visokim energijama [2]. Primjerice, amplituda dijagrama vakuumske polarizacije u sebi sadrži faktor

$$\Pi_{\mu\nu}(q) \supseteq \left(\alpha \ln \frac{q^2}{m_e^2} \right)^n \quad (10)$$

što znači da perturbacijska teorija na velikim prijenosima impulsa q ne može funkcionirati, iako je konstanta fine strukture α mala. U takvim slučajevima koristi se modificirana perturbacijska teorija koja redefinira konstante vezanja, ne drži ih fiksnima, nego ih uvodi kao parametre g_μ definirane na kliznoj skali mase μ (koja ne ovisi o masama čestica). Ako se μ izabere da bude reda veličine energije E koja je tipična za promatrani proces, logaritamski faktor u npr. (10) više ne divergira. Ako je g_μ mali, ponovno možemo koristiti perturbacijski račun. Procedura je sljedeća: ako je poznata konstanta vezanja na skali μ , perturbacijskom teorijom možemo izračunati amplitude na energiji $\mu + d\mu$ i koristiti ih za račun konstanti vezanja na istoj skali. Integriranjem dobivene diferencijalne jednadžbe moguće je povezati konstante vezanja na skali koju proučavamo s njihovim uobičajeno definiranim vrijednostima. Efektivno, pomicanjem skale μ mijenja se raspon stupnjeva slobode koji se uzimaju u obzir u konkretnim računima. Metoda renormalizacijske grupe ilustracija je principa po kojem treba eliminirati sve stupnjeve slobode koji se pojavljuju na energijama višim od one na kojoj računamo.

Razmotrimo sada kliznu skalu u detalje. Definiramo renormaliziranu konstantu vezanja na skali μ koja ne ovisi o skali m na kojoj se nalaze fizikalne mase u teoriji (barem za slučaj $\mu \gg m$). Tada parametri teorije (za koje smo sigurni da nisu IR divergentni) mogu biti prikazani kao funkcije od μ i g_μ . Takva funkcija, npr. ukupni udarni presjek, ima oblik [2]

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_\mu, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E}\right) \quad (11)$$

U (11) x podrazumijeva sve ostale veličine o kojima Γ može ovisiti, npr. prostorni kutevi. Kako je μ potpuno

proizvoljan parametar, biramo točku $\mu = E$ i tada (11) postaje

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\right) \quad (12)$$

Ovim izborom eliminiramo singularitete kada je $m = 0$ jer g_E ne ovisi o m , čime se ne pojavljuju divergentni logaritmi i moguće je koristiti perturbacijsku teoriju. Preostaje izračunati g_E , što činimo u diskretnim koracima: g_μ može se izračunati preko g_R ako je omjer μ/m blizu jedinice, $g_{\mu'}$ može se izračunati preko g_μ ako je omjer μ'/μ također infinitezimalno oko jedinice, i tako redom sve do g_E . Diskretne korake pustimo u nulu čime imamo kontinuiran tok od g_R do g_E . Klizna konstanta vezanja $g_{\mu'}$ funkcija je oblika

$$g_{\mu'} = G\left(g_\mu, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu}\right) \quad (13)$$

Provodimo standardnu proceduru, deriviramo (13) po μ' i izvrijednimo u $\mu' = \mu$ čime se dobije diferencijalna jednadžba

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \frac{\partial}{\partial z} G\left(g_\mu, z, \frac{m}{\mu}\right) \Big|_{z=1} \equiv \beta\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right) \quad (14)$$

Za $\mu \gg m$ jednadžba se pojednostavljuje i ima oblik

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta(g_\mu, 0) \equiv \beta(g_\mu) \quad (15)$$

i u literaturi je poznata kao Callan-Symanzikova jednadžba. Separacijom varijabli jednostavno dolazimo do rješenja koje glasi

$$\ln \frac{E}{M} = \int_{g_M}^{g_E} \frac{dg}{\beta(g)} \quad (16)$$

pri čemu je važno naglasiti da integracija kreće od skale $\mu = M$ koja se bira tako da bude dovoljno velika da mase fizikalnih čestica budu zanemarive i dovoljno mala da logaritmi ne divergiraju, odnosno da je moguće koristiti perturbacijski račun. Razmatranja za β funkciju ne ovise neposredno o perturbacijskoj teoriji, nego se ona koristi kao metoda za izračune.

1.3 Minimalna suptrakcija

Dimenzionalna regularizacija (koju ćemo detaljnije objasniti u izračunima radijativnih korekcija za QED i QCD) kao jedna od najmoćnijih metoda regularizacije u kvantnoj teoriji polja čuva baždarnu invarijantnost i, što je vrlo važno, daje alternativnu definiciju za kliznu skalu.

Pravilo je da se UV divergencije javljaju kao polovi u amplitudama kada se dimenzija prostorvremena D približava svojoj fizikalnoj vrijednosti $D \rightarrow 4$. Da

bi ovi polovi bili poništeni, gole konstante vezanja g_B^l moraju imati polove iste vrste sa reziduuumima fiksiranima na način da su fizikalne amplitude konačne kada $D \rightarrow 4$. Kako je prvi uvjet koji konstrukcija Lagrangiana mora zadovoljiti taj da umnožak svakog člana mora biti dimenzije D (što prozilaži iz bezdimenzionalnosti akcije koja je integral Lagrangiana po D -dimenzionalnom prostorvremenu) ako su fizikalne konstante vezanja bezdimenzionalne, moramo napraviti preskripciju (reskaliranje) golih konstanti vezanja $g_B^l(D)$, koje nisu nužno bezdimenzionalne, nego su dimenzije $\Delta_l(D)$. Stoga uvodimo bezdimenzionalnu veličinu

$$g_B^l(D) \rightarrow g_B^l(D) \mu^{-\Delta_l(D)} \quad (17)$$

gdje je μ klizna skala dimenzije mase. Sada reskalirana gola konstanta vezanja može biti prikazana kao suma fizikalne konstante vezanja i polova do beskonačnog reda

$$g_B^l(D) \mu^{-\Delta_l(D)} = g^l(\mu, D) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D-4)^n} b_n^l(g(\mu, D)) \quad (18)$$

Koeficijenti b_n određeni su uvjetom da se u fizikalnim amplitudama poništavaju singulariteti za $D \rightarrow 4$. Sada deriviramo (18) po μ i pomnožimo cijeli izraz sa μ da dobijemo β funkciju, čime izraz uz pokratu

$$b_{n,m}^l(g) = \frac{\partial b_n^l(g)}{\partial g^m} \quad (19)$$

i zamjenu LHS sa RHS u (18) postaje

$$\begin{aligned} -\Delta^l(D) \left(g^l + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D-4)^n} b_n^l(g) \right) &= \\ = \beta_l(g, D) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_m \frac{1}{(D-4)^n} b_{n,m}^l(g) \beta^m(g, D) \end{aligned} \quad (20)$$

Vidimo da je funkcija β^l funkcija ne samo svoje konstante vezanja, nego svih konstanti $g^m(\mu, D)$ koje se javljaju u teoriji. Sada koristimo činjenicu da je $\Delta_l(D)$ uvijek linearna funkcija u D (npr. $D = 4 - \epsilon$), što znači da možemo uzeti

$$\Delta_l(D) = \Delta_l + \rho_l(D-4) \quad (21)$$

Lijeva strana jednadžbe (20) uz korištenje (21) i djelomičnu ekstrakciju člana $n = 1$ iz sume postaje

$$\begin{aligned} -\left[\Delta_l g^l + b_1^l(g) \rho^l \right] - \rho_l g^l (D-4) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D-4)^n} \left[\rho_l b_{n+1}^l + \Delta_l b_n^l(g) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

U (22) vidimo da je najviša potencija s kojom se pojavljuje D jedan, što znači da i desna strana iste jednadžbe, koja sadrži β , mora biti linearna u D , odnosno

$$\beta^l(g, D) = \beta_l(g) + (D-4) \alpha^l(g) \quad (23)$$

Sada uspoređivanjem članova na lijevoj i desnoj strani dobivamo relaciju

$$\alpha^l(g) = -\rho_l g^l \quad (24)$$

i jednakost za β koja je od ključne važnosti, a dobijemo je uzimajući članove koji stoje uz nultu potenciju faktora $D - 4$, i ona glasi

$$\begin{aligned} \beta_l(g) &= -\Delta_l g^l - b_1^l(g) \rho_{l+} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_m b_{1,m}^l(g) \rho_m g^m \end{aligned} \quad (25)$$

Preostali niži članovi potencija daju rekurzivnu relaciju

$$\begin{aligned} \rho_l b_{n+1}^l(g) - \sum_m \rho_m g^m b_{n+1,m}^l(g) &= \\ = -\Delta_l b_n^l(g) - \sum_m b_{n,m}^l(g) \beta^m(g) \end{aligned} \quad (26)$$

U (25) vidimo da β ovisi samo o koeficijentima koji stoje uz pol prvog reda u golim konstantama vezanja. To znači da ćemo u konkretnim računima za amplitude u prostorvremenu dimenzija

$$D = 4 - 2\epsilon \quad (27)$$

što se još naziva Machacek-Vaughn dimenzija, tražiti samo članove koji stoje uz divergenciju, odnosno pol prvog reda $1/\epsilon$ i te članove koristiti za nalaženje β funkcija za pojedine konstante vezanja.

2 Renormalizacijske grupne jednadžbe (RGEs)

2.1 Kvantna elektrodinamika

Provođenjem dimenzionalne analize nad Lagrangianom (2), tj. iz uvjeta bezdimenzionalnosti akcije

$$\mathcal{S} = \int d^D x \mathcal{L} \quad (28)$$

dobivamo dimenzije polja i konstanti vezanja te dimenzije faktora za reskaliranje konstante vezanja u (17)

$$[A_\mu] = \frac{D-2}{2} \quad (29a)$$

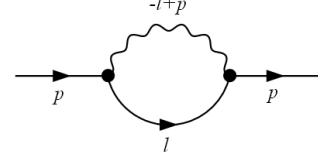
$$[\psi] = \frac{D-1}{2} \quad (29b)$$

$$[e_B] = [\Delta] = \frac{4-D}{2} \quad (29c)$$

čime (7) postaje (u MV dimenziji $D = 4 - 2\epsilon$ koju nadalje koristimo)

$$e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_B \mu^{-\epsilon} \quad (30)$$

Preostaje nam pronaći članove uz $1/\epsilon$ u prvom redu Lagrangiana (8) u prvom redu računa smetnje, što uključuje self-energiju elektrona, dijagram vakuumske polarizacije i najnižu korekciju vrha. Dijagram self-energije elektrona oblika



ima (uz kontrakciju metrike) amplitudu

$$-e^2 \int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu (l+m) \gamma^\mu}{(l^2 - m^2)((l-p)^2 - m_\gamma^2)} \quad (31)$$

Korištenjem izraza

$$\gamma_\mu l \gamma^\mu = l(2-D) \quad (32)$$

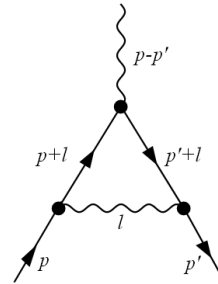
koji proizlazi iz antikomutacijskih relacija za γ matrice te korištenjem Feynmanove parametrizacije, Wickove rotacije, dimenzionalne regularizacije i razvoja $\Gamma(\epsilon)$ (vidi Dodatak) te ekstrakcijom pola prvog reda iz amplitude dobije se kinetički član

$$-i\Sigma_2 \supseteq \frac{1}{\epsilon} \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \not{p} \quad (33)$$

Usporedbom s (3a) iščitavamo vrijednost Z_2 u prvom redu računa smetnje koja glasi

$$Z_2 = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (34)$$

Korekcija vrha u najnižem redu s pripadajućim impulsima oblika



ima amplitudu

$$\begin{aligned} -i\Sigma_1 &= -e^3 \int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \times \\ &\times \frac{\gamma_\nu (l + \not{p}' + m) \gamma^\mu (l + \not{p} + m) \gamma^\nu}{(l^2 - m_\gamma^2)((l+p)^2 - m^2)((l+p')^2 - m^2)} \end{aligned} \quad (35)$$

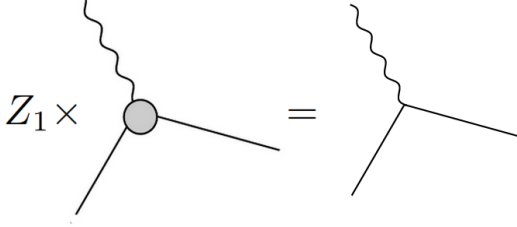
Korištenjem relacije

$$\gamma_\nu \not{l} \gamma^\mu \not{l} \gamma^\nu = l^2(2-D)^2 \gamma^\mu \quad (36)$$

i metoda navedenih u Dodatku te uzimanjem pola prvog reda dobije se

$$-i\Sigma_1 \supseteq \frac{1}{\epsilon} \frac{-ie^3}{(4\pi)^2} \gamma^\mu \quad (37)$$

što je struktura golog QED vrha $-ie\gamma^\mu$ do na faktor. Slično kao u (3), vrh u interakciji u kontekstu renormalizirane perturbacijske teorije shematski se može prikazati



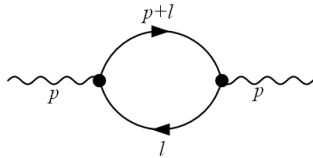
Kako je u najnižem redu računa smetnje dijagram na lijevoj strani zbroj golog vrha i najniže korekcije, slijedi da je

$$Z_1^{-1} = \left(1 + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}\right) \quad (38)$$

čime se dobije važan rezultat

$$Z_1^{-1} Z_2 = 1 \quad (39)$$

pokazan u prvom redu računa smetnje, ali vrijedi u svim redovima [1]. Preostaje još vakuumska polarizacija



koja ima amplitudu

$$-i\Pi_{\mu\nu}(p) = -e^2 \int_0^\infty \frac{d^D l \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \times \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + \not{l} + m)\gamma_\nu(\not{l} + m)]}{(l^2 - m^2)((p+l)^2 - m^2)} \quad (40)$$

Korištenjem standardnih metoda za izvrjednjavanje integrala i integracijom po Feynmanovom parametru dobije se rezultat

$$i\Pi_{\mu\nu}(p) \supseteq \frac{1}{\epsilon} \frac{-ie^2}{12\pi^2} g_{\mu\nu} \quad (41)$$

što daje posljednji potreban renormalizacijski faktor

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (42)$$

Iz (30) i (42) sada slijedi

$$e_B \mu^{-\epsilon} = e \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon}\right)^{-1/2} \approx e + \frac{e^3}{24\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (43)$$

Izraz za β funkciju u MV formalizmu zadovoljava jednadžbu [3]

$$\mu \frac{de}{d\mu} = \beta - \epsilon e \quad (44)$$

Množenjem izraza (43) sa faktorom $\mu d/d\mu$, deriviranjem, izjednačavanjem lijeve i desne strane i zanemarivanjem članova $1/\epsilon$ uz β konačno se dobije izraz za β funkciju u QED-u koji glasi

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} \quad (45)$$

Izraz (45) slaže se s literaturom [2] i predstavlja jedno od mogućih asimptotskih ponašanja, odnosno teži u beskonačno za neku konačnu vrijednost E .

2.2 Kvantna kromodinamika

Zbog svoje neabelovske prirode kvantna kromodinamika, iako u osnovi ima strukturu QED-a, sadrži više interakcija i matematički je kompliciranija teorija. QCD Lagrangian ima strukturu [4]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{q}(i\not{D} - m_q)q \quad (46)$$

pri čemu je a indeks boje i gdje je D_μ minimalna supstitucija oblika

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a T^a \quad (47)$$

pri čemu je g konstanta vezanja u teoriji, a T^a generatori SU(3) grupe za koje vrijedi nekomutativnost oblika

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c \quad (48)$$

gdje su f^{abc} antisimetrične strukturne konstante. To povlači da je zadovoljena komutacijska relacija

$$[D_\mu, D_\nu] = igF_{\mu\nu}^a T^a \quad (49)$$

Zbog baždarnosti invarijantnosti [4] Lagrangian (46) ne sadrži informaciju o gluonskom propagatoru, što znači da je potrebno uvesti novo tzv. kovarijantno baždarenje pomoću Faddeev-Popov pristupa [2] koji uvodi nova polja u Lagrangian, tzv. duhove (eng. ghosts), koji su Lorentzovi skalari, ali zadovoljavaju Fermi-Diracovu statistiku. Time (48) dobiva dopunu

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a(gf^{abc}\partial^\mu A_\mu^b - \partial^2\delta^{ab})c^c \quad (50)$$

QCD sadržava dakle četiri moguća verteksa, trogluonski, četvergluonski, kvark-antikvark-gluon interakciju i duh-antiduh-gluon interakciju koje su određene sljedećim članovima u Lagrangianu

$$i\mathcal{L}_{3g} = igf^{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{\mu b} A^{\nu c} \quad (51a)$$

$$i\mathcal{L}_{4g} = -\frac{ig^2}{4}f^{abc}f^{ab'c'}A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu b'} A^{\nu c'} \quad (51b)$$

$$i\mathcal{L}_{\bar{q}qg} = -ig\bar{q}\gamma^\mu T^a q A_\mu^a \quad (51c)$$

$$i\mathcal{L}_{\bar{c}cg} = ig\bar{c}^a f^{abc}\partial^\mu (A_\mu^b c^c) \quad (51d)$$

Iz uvjeta (28) analogno provodimo dimenzionalnu analizu koja daje

$$[A_\mu] = \frac{D-2}{2} \quad (52a)$$

$$[q] = \frac{D-1}{2} \quad (52b)$$

$$[c] = \frac{D-2}{2} \quad (52c)$$

$$[g_B] = [\Delta] = \frac{4-D}{2} \quad (52d)$$

Renormalizacijom kvarkova i gluona analogno fermionima i fotonima u QED-u i renormalizacijom duha sa $c = Z_2^c c_r$ te uvođenjem reskaliranja gole konstante vezanja dobijemo ponovno renormalizirani, fizikalni Lagrangian (46)+(50) te dio sa kontračlanovima sastavljen od sljedećih doprinosa

$$\begin{aligned} & (Z_3 - 1)\left(-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)^2 - \frac{1}{2\xi}\left(\partial^\mu A_\mu^a\right)^2\right) + \\ & (Z_2 - 1)i\bar{q}\not{\partial}q - \delta_{m_q}\bar{q}q + \\ & (Z_1^{3g} - 1)(g\mu^\epsilon f^{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{\mu b} A^{\nu c}) + \\ & (Z_1^{4g} - 1)(g^2\mu^{2\epsilon} f^{abc}f^{ab'c'}A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu b'} A^{\nu c'}) - \\ & (Z_1 - 1)(g\mu^\epsilon \bar{q}A^a T^a q) + \\ & (Z_2^c - 1)\bar{c}^a(-\partial^2\delta^{ac})c^c + \\ & (Z_1^c - 1)g\mu^\epsilon \bar{c}^a f^{abc}\partial^\mu (A_\mu^b c^c) \end{aligned} \quad (53)$$

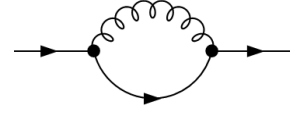
gdje se Z_1 standardno uzima kao renormalizacijski faktor trovrha. Iz renormalizacije slijede važne jednakosti

$$\begin{aligned} g_B\mu^{-\epsilon} &= Z_1^{3g}Z_3^{-3/2}g = Z_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}g \\ &= Z_1^c(Z_2^c)^{-1}Z_3^{-1/2}g = (Z_1^{4g})^{1/2}Z_3^{-1}g \end{aligned} \quad (54)$$

odnosno

$$Z_1Z_2^{-1} = Z_1^{3g}Z_3^{-1} = Z_1^c(Z_2^c)^{-1} = (Z_1^{4g})^{1/2}Z_3^{-1/2} \quad (55)$$

Za izračun β funkcije dovoljno je izabrati neke od jednakosti, a ostale možemo koristiti za provjeru. Renormalizacijski faktor Z_2 analogno elektrodinamici računamo iz dijagrama



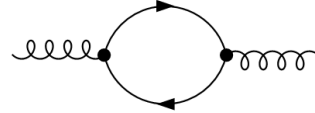
i on ima strukturu analognu self-energiji elektrona u QED-u, do na umnožak dva generatora $SU(N)$ grupe, za koje vrijedi [5]

$$T^a T^a = C_2(f) = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (56)$$

u fundamentalnoj reprezentaciji. Stoga kao rezultat imamo

$$Z_2 = 1 - C_2(f)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon} \quad (57)$$

Renormalizacijski faktor Z_3 analogan polarizaciji vakuuma sadrži doprinose četiri dijagrama. Prvi, shematski prikazan sa



potpuno je analogan polarizaciji vakuuma do na doprinos boje (trag generatora dolazi iz činjenice da imamo fermionsku petlju) koji iznosi

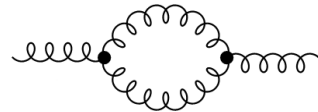
$$Tr[T^a T^b] = C(f)\delta^{ab} \equiv \frac{1}{2} \quad (58)$$

Stoga prvi doprinos od kvarkovskog dijagrama iznosi

$$Z_{3,q} = 1 - C(f)N_f\frac{g^2}{12\pi^2}\frac{1}{\epsilon} \quad (59)$$

gdje je N_f broj okusa kvarkova (dostupan na energiji E).

Slijedi dijagram s dva gluonska trovrha shematski dan sa



u kojem se pojavljuje umnožak dvije strukturne konstante

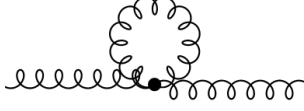
$$f^{abc}f^{ebc} = C_2(G)\delta^{ae} \equiv N \quad (60)$$

Raspisom amplitude po Feynmanovim pravilima za QCD [5] i korištenjem standardnih metoda (Dodatak

u polu prvog reda dobije se doprinos

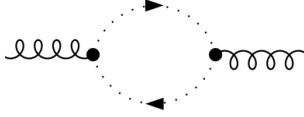
$$C_2(G) \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{19}{12} g^{\mu\nu} q^2 - \frac{11}{6} q^\mu q^\nu \right) \quad (61)$$

Dijagram s gluonskim četverovrhom



sadrži jedan gluonski propagator, iz čega je odmah vidljivo da rješenje integrala dimenzionalne regularizacije ne daje član s polom prvog reda, pa ovaj dijagram ne doprinosi renormalizacijskom faktoru.

Doprinos dijagrama s duhovima



uz ponovnu primjenu (60) iznosi

$$C_2(G) \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{12} g^{\mu\nu} q^2 + \frac{1}{6} q^\mu q^\nu \right) \quad (62)$$

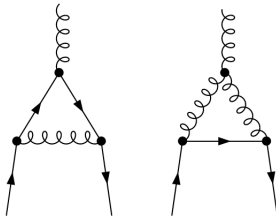
Rezultati (60) i (61) zbrojeni sačinjavaju baždarno invarijantnu formu

$$C_2(G) \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \frac{5}{3} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \quad (63)$$

Konačan rezultat za renormalizacijski faktor gluonskog propagatora iznosi

$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{4}{3} N_f C(f) + \frac{5}{3} C_2(G) \right) \quad (64)$$

Renormalizacija verteksa u najnižoj popravci sastoji se od doprinosa dva dijagrama



koji uz korištenje relacije

$$T^a T^b T^a = \left(C_2(f) - \frac{1}{2} C_2(G) \right) T^b \quad (65)$$

zajedno daju renormalizacijski faktor za verteks

$$Z_1^{-1} = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} (C_2(f) + C_2(G)) \quad (66)$$

Korištenjem druge po redu jednakosti u (54) i provođenjem standardne procedure u MV formalizmu nalazimo β funkciju za QCD oblika

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} N_f C(f) \right) \quad (67)$$

Rezultat se slaže s literaturom [2] i pokazuje da jaka konstanta vezanja opada s povećanjem energije. Zanimljivo je primijetiti da bi β rasla s energijom kada bi $N_f \geq 16$.

3 Zaključak

Provođenjem renormalizacijske perturbacijske teorije na primjeru kvantne elektrodinamike i kvantne kromodinamike i računanjem polova prvog reda u amplitudama izračunali smo β funkcije. U QED-u vidimo ponašanje

$$\beta_{QED} = \frac{e^3}{12\pi^2} \quad (68)$$

što znači da β divergira u beskonačnost na nekoj konačnoj energiji, odnosno ima Landauov pol. Vjerojatno razlog leži u tome što ne možemo očekivati da će izraz za β funkciju dobiven perturbacijskim računom funkcionirati na visokim energijama, odnosno u režimu u kojem perturbacijska teorija nije valjana metoda. Uključivanjem viših redova smetnje u račun β funkcija dobiva popravke, što su izračunali Gell-Mann i Low na nivou dvije petlje i dobili izraz [2]

$$\beta_{QED} = \frac{e^3}{12\pi^2} + \frac{e^5}{64\pi^2} \quad (69)$$

Nadalje, rješavanjem jednadžbe za β funkciju (16), pazeći da integriramo u rasponu gdje je funkcija dobro definirana, dobivamo ponašanje konstante vezanja izražene preko konstante fine strukture i ovisnost glasi

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{E_0^2}\right)} \quad (70)$$

gdje nulti indeks prestavlja proizvoljno odabranu donju granicu integracije. Kako je i očekivano, konstanta vezanja raste s energijom. QED je dakle strogo perturbativna teorija. Za QCD smo dobili

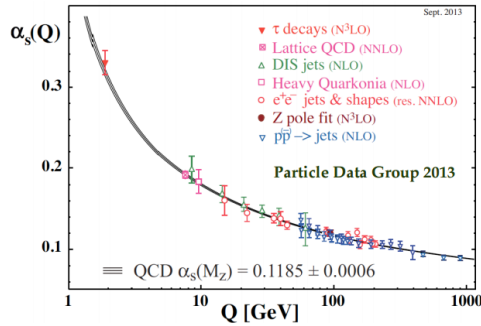
$$\beta_{QCD} = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} N_f C(f) \right) \quad (71)$$

što je primjer asimptotske slobode (pod uvjetom da teorija sadržava manje od 16 okusa kvarkova), što znači

da je potpuno sigurno koristiti perturbacijsku teoriju na visokim energijama. Teorije koje ne zadovoljavaju asimptotsku slobodu mogu se smatrati matematički nekonzistentnima [2]. Rješavanjem po (16) i biranjem granica integracije od μ (što je u principu od 400 MeV-a nadalje), do neke gornje granice Λ (što je režim u kojem je funkcija dobro definirana na skali neperturbativnog režima), kao rješenje dobijemo

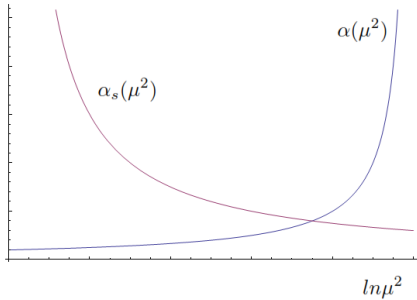
$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln(\frac{\mu^2}{\Lambda^2})} \quad (72)$$

odnosno konstanta vezanja pada s energijom. Slaganje s eksperimentom vidljivo je iz grafa na Slici 1.



Slika 1: Eksperimentalno pronađena ovisnost jake konstante vezanja o energiji [6].

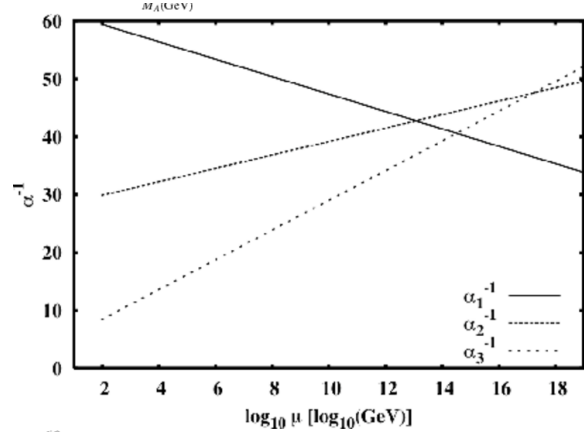
Razlog razlike u ponašanju QED-a i QCD-a leži u mogućnosti gluonske (i nemogućnosti fotonske) samo-interakcije. Shematski je to vidljivo u grafu



i za očekivati je da postoji neka energija na kojoj je jakost konstanti vezanja u obje teorije jednake vrijednosti.

Renormalizacijske grupne jednadžbe danas su standardna procedura za ispitivanje modela u elementarnim česticama. Daju uvid u ponašanje modela u režimima koji nisu nužno dostupni eksperimentu, ocjenjuju matematičku konzistentnost teorije, omogućuju procjene u kojim je rasponima moguće koristiti perturbacijsku teoriju i pokazuju je li u nekom modelu moguće ujedinjenje i, ako jest, na kojim ga energijama

možemo očekivati. Ako se uzme u obzir cijeli Standardni model, ponašanje konstanti vezanja ima oblik prikazan na Slici 2.



Slika 2: Klizne konstante vezanja u SM. Vidljiv je trokut ujedinjenja. preuzeto iz [7].

Indikativno je da novi model ide u dobrom smjeru ako je trokut ujedinjenja na skalama od otprilike $10^{13} - 10^{17}$ GeV-a površinom manji, kao što je npr. pokazano u nekim supersimetričnim modelima, poput MSSM ili MWT[6].

4 Zahvale

Zahvaljujem prof.dr.sc. Amonu Ilakovcu, dr.sc. Luki Popovu i dr.sc. Jiangyang Youu na pomoći oko izrade seminara, brojnim sugestijama, prijedlozima i pomoći s računom.

5 Dodatak

5.1 Feynmanova parametrizacija

Svi su integrali prije izračuna parametrizirani po Feynmanu [8]

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = (n-1)! \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \frac{\delta(x_1 + \dots + x_n - 1)}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n} \quad (73)$$

5.2 Wickova rotacija

Wickovu rotaciju potrebno je provesti jer podintegralni izraz u prostoru Minkowskog nema simetriju nulte i ostalih komponenti impulsa. Stoga redefiniramo integraciju u euklidskom prostoru uvodeći

$$l^2 = -l_E^2 \quad (74a)$$

$$d^4 l = id^4 l_E \quad (74b)$$

te se granice integracije prebace u interval $(-\infty, \infty)$.

5.3 Dimenzionalna regularizacija

Koristilo se svojstvo da integrali s neparnim brojem tenzora u brojniku iščezavaju po parnom intervalu integracije. Nadalje, za metriku i tenzore koristilo se

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = D \quad (75a)$$

$$l_\mu l_\nu = \frac{1}{D} l^2 g_{\mu\nu} \quad (75b)$$

Integrali su se izvrijednili preko [9]

$$\int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{D}{2}} \quad (76)$$

$$\int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(n - 1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - 1 - \frac{D}{2}} \quad (77)$$

te se Γ funkcija razvila preko [8]

$$\Gamma(\epsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\epsilon} + 1 + \dots + \frac{1}{n} - \gamma \right) \quad (78)$$

i pomoću

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma \quad (79)$$

5.4 Napomene

Dijagrami su nacrtani u Mathematici 7 pomoću paketa HighEnergyPhysics, FeynArts-3.7. dostupnog na <http://www.feynarts.de/>. Dijelovi računa provjeravani su paketom FeynCalc.

Literatura

- [1] Ilakovac, Amon: Skripta iz kolegija Kvantna teorija polja, <http://www.phy.pmf.unizg.hr/~ailakov/>
- [2] Weinberg, Steven: The Quantum Theory of Fields, Volume II, Modern Applications, Cambridge University Press 1996
- [3] Machacek i Vaughn: Two-loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory I. Wave Function Renormalization, Nucl. Phys. B 222(1983) 83
- [4] Groznin, Andrey: Lectures on QED and QCD, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2007
- [5] Derya, Vera: Color Factors in QCD, <http://lpsc.in2p3.fr/schien/Rapports/derya.pdf>
- [6] Rojo, Juan: The Strong Interaction and LHC phenomenology, https://www2.physics.ox.ac.uk/sites/default/files/2014-03-31/qcdgrad_rojo_oxford.tt14.3_rge_pdf_19828.pdf
- [7] Sannino, Francesco: Dynamical Stabilization of the Fermi Scale, <http://arxiv.org/pdf/0804.0182v1.pdf>
- [8] Radovanović, Voja: Problem Book in Quantum Field Theory, 2nd Edition, Springer 2008
- [9] Peskin i Schroeder: An Introduction To Quantum Field Theory, Addison-Wesley 1995