

# Predviđanje oscilatornog kretanja računanjem složenosti $Cmp$ kratkih vremenskih nizova, definirane pomoću permutacije i linearne kombinacije

*Student: Petar Grahovac*

*Mentor: prof. dr Zoran Rajilić, Odsjek za Fiziku, PMF Banja Luka  
Fizički Odsjek, PMF, Biljanička c. 32, 10 000 Zagreb*

*08. siječnja 2016.*

## **Sažetak:**

U seminaru je predstavljen račun složenosti  $Cmp$  kratkih vremenskih nizova, koja je definirana pomoću permutacije i linearne kombinacije. Ne poznavajući pravila koja generiraju vremenski niz, izvršeno je predviđanje oscilacije čestice promatrajući  $Cmp$  kao funkciju posljednjeg elementa vremenskog niza. Prava vrijednost tog elementa odgovara oštrom minimumu  $Cmp$ . Prednost predloženog metoda je brzina računanja. Promatran je također problem razlučivanja kaosa od šuma. Definicija  $Cmp$  opravdana je razmatranjem: broja različitih frekvencija pri redovitom osciliranju, Ljapunovljevog eksponenta kaotičnih vremenskih nizova, razine šuma, preciznosti Monte Carlo integriranja, koeficijenta nelinearnosti u izrazu za silu koja djeluje na česticu i rasta klasične entropije.

## **1.Uvod**

Glavni uzroci složenosti vremenskog niza su: dimenzija, nelinearnost, nestacionarnost, šum, agregacija i konačna duljina. Prva tri u vezi su s procesom generiranja, a slijedeća tri uzroka u vezi su sa mjerenjem.

Garland i suradnici su utvrdili da postoji korelacija složenosti, procijenjena računanjem permutacione entropije, i pogreške predviđanja vremenskog niza (Garland et al. 2014).

Bandt i Pompe su predložili permutacionu entropiju kao mjeru složenosti vremenskog niza, zasnovanu na poređenju susjednih elemenata.

Oni prebrojavaju permutacije koje nastaju u vremenskom nizu kao:

$$\begin{aligned}x_i &< x_{i+1} < x_{i+2} \\x_{i+1} &< x_i < x_{i+2}\end{aligned}\tag{1}$$

...

Permutaciona entropija je prilagođena za procjenu složenosti kratkih vremenskih nizova promjenom vremena odgode. Složenost regularnih vremenskih nizova je u korelaciji sa predvidljivošću. Jako je teško predvidjeti krizu iz kratkih i šumećih ekonomskih vremenskih nizova. Na primjer, mi smo u mogućnosti da predviđamo upotrebljavajući nekolicinu vremenskih nizova, talasiće ili žičane mreže. Relacija između predviđanja i izučavanja pravila koje je određeno vremenskim nizom nije jednostavna. Kaotični vremenski nizovi se mogu izučavati, ali ne i predviđati, za razliku od kvaziperiodičnih vremenskih nizova koji se mogu predviđati. Ovdje će se složenost računati na način na koji se prvo razmatraju vremenski nizovi dužine 110. Zatim se prave permutacije u deset podnizova čija je linearna kombinacija jednaka jedanaestom podnizu. Posljedica permutacija je predstavljena kao promjena konstanti linearne kombinacije i ta promjena određuje složenost.

Osnovna razlika između složenosti  $Cmp$  i permutacione entropije definirana je u tome što se ne vrši prebrojavanje postojećih permutacija, nego se pravi novi vremenski niz permutacijama unutar originalnog vremenskog niza.

## 2. Definicija $Cmp$

Niz  $A_1, A_2, \dots, A_{110}$  se može podijeliti na jedanaest podnizova. Prvih deset podnizova su:

$$\begin{aligned}F_{1,j} &= A_j \\F_{2,j} &= A_{j+10} \\F_{3,j} &= A_{j+20} \\&\dots \\F_{10,j} &= A_{j+90}\end{aligned}\tag{2}$$

gdje je  $j = 1, 2, \dots, 10$ . Može se pretpostaviti jedanaesti niz kao linearna kombinacija prethodnih. Za mnoge netrivialne vremenske nizove sljedeće jednadžbe,

$$\begin{aligned}
 A_{101} &= \sum_{i=1}^{10} c_i F_{i,1} \\
 A_{102} &= \sum_{i=1}^{10} c_i F_{i,2} \\
 &\dots \\
 A_{110} &= \sum_{i=1}^{10} c_i F_{i,10}
 \end{aligned} \tag{3}$$

su neovisne i daju konstante linearne kombinacije  $\langle c_1, c_2, \dots, c_{10} \rangle$ . Zatim se prave permutacije unutar prvih deset podnizova i dobijaju se sljedeći podnizovi:

$$\begin{aligned}
 F'_{1,1} &= A_{10}, \quad F'_{1,j} = A_{j-1} \\
 F'_{2,1} &= A_{20}, \quad F'_{2,j} = A_{j+9} \\
 F'_{3,1} &= A_{30}, \quad F'_{3,j} = A_{j+19} \\
 &\dots \\
 F'_{10,1} &= A_{100}, \quad F'_{10,j} = A_{j+89}
 \end{aligned} \tag{4}$$

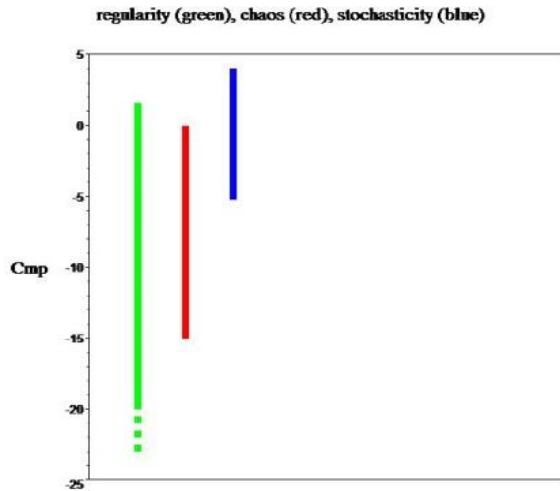
gdje je  $j = 2, 3, \dots, 10$ . Tada jednačine:

$$\begin{aligned}
 A_{101} &= \sum_{i=1}^{10} c'_i F'_{i,1} \\
 A_{102} &= \sum_{i=1}^{10} c'_i F'_{i,2} \\
 &\dots \\
 A_{110} &= \sum_{i=1}^{10} c'_i F'_{i,10}
 \end{aligned} \tag{5}$$

daju nove konstante linearne kombinacije  $\langle c'_1, c'_2, \dots, c'_{10} \rangle$ . Složenost  $Cmp$  se može definirati korištenjem vektorske Euklidske norme u prostoru dimenzije 10 kao:

$$Cmp = -\ln \frac{\| \langle c'_1, c'_2, \dots, c'_{10} \rangle - \langle c_1, c_2, \dots, c_{10} \rangle \|}{\| \langle c_1, c_2, \dots, c_{10} \rangle \|} \quad (6)$$

Izvršen je račun složenosti mnogih vremenskih nizova gdje se može primijetiti da minimalna vrijednost složenosti  $Cmp$  raste u smjeru redovitost-kaos-stokastičnost. Što je niz složeniji, permutacijom izazvana promjena vektora  $\langle c_1, c_2, \dots, c_{10} \rangle$  je manja, pa je  $Cmp$  veće.



**Slika 1.-** Intervali u kojima se nalaze vrijednosti složenosti za redovite, stokastične i kaosne vremenske nizove duljine 110. Stokastičnost predstavlja slučajnu nepredvidivost, kaotičnost kratkoročnu predvidivost, a dugoročnu nepredvidivost, dok redovitost predstavlja potpunu predvidivost.

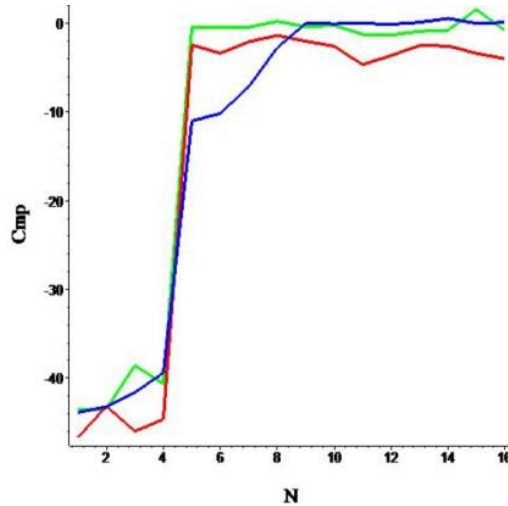
### 3. Redovite oscilacije

Na sljedećoj slici je plavom, crvenom i zelenom linijom predstavljena složenost redovitih vremenskih nizova i izračunate su pojedine kosinusne funkcije vremena kao pod (7):

$$\sum_{j=1}^N \cos((2,9 + 0,6j)i - 0,041j)$$

$$\sum_{j=1}^N (-0,9)^j \cos((2,8 + 0,7j)i - 0,03j)$$

$$\sum_{j=1}^N (-1,1)^j \cos((2,1 + 0,8j)i - 0,09j)$$



**Slika 2.-** Visoka složenost  $Cmp$  odgovara velikom broju različitih frekvencija  $N$ . Što je  $Cmp$  veće, raste broj različitih frekvencija.

## 4. Kaos i Šum

Gausov šum kao jedan od najčešćih modela šuma ima funkciju gustoće distribuiranja kao:  $p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{\frac{-\xi^2}{2\sigma^2}}$ , gdje  $\sigma^2$  predstavlja standardnu devijaciju ili varijansu šuma. Računajući složenost  $Cmp$  raznih slučajnih vrijednosti (oko 14 000) sa Gausovom raspodjelom (šumom) dobijamo da složenost šuma iznosi između -5,221 i 4,039, dok je složenost jednostavnih redovitih oscilacija oko -50.

- Feigenbaumov broj –

Prijelaz u kaos ne karakteriziraju bifurkacije (stanice na putu za kaos) beskonačnog reda, nego se temelji na principima:

- I) determinizam,
- II) univerzalnost i
- III) osjetljivost na početne uvjete (senzibilnost).

Feigenbaumova eksperimentalna istraživanja u razdoblju od 1974.-1976. na populacijskom procesu:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad 0 < r < 4$$

$$x_1 > 0, \quad x_1 \text{ je zadano} \quad (8)$$

te srodnim drugim procesima, su dala odgovore na neke važne pojave od kojih je najvažnije definiranost Feigenbaumove konstante koja se dobija preko niza  $r_k$  i pripadnih nizova njihovih razlika  $\delta_k = r_{k-1} - r_k$  i iznosi nakon računanja  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k / \delta_{k+1} = \delta = 4,669201609$ . Ona se uporabljuje kada se radi o jednoj vrsti reda (determinizma) prijelaza u kaos, te o jednoj vrsti univerzalnosti prelaza u kaos jer ta konstanta ne ovisi o nelinearnom iteratoru odnosno o prirodi konkretnih objekata dane pojave.

- Ljapunovljev eksponent-

Sva tri slučaja: stabilni, bifurkacijski i kaotični, mogu biti zapisani preko jedne relacije:

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| \approx e^{\lambda n} |x_1 - y_1|, \quad (9)$$

gdje vrijedi:

- I. za parametar  $\lambda < 0$  proces je u stabilnom režimu;
- II. za parametar  $\lambda = 0$  proces je u periodičko-bifurkacijskom režimu;
- III. za parametar  $\lambda > 0$  proces je u kaotičnom režimu.

Parametar  $\lambda$  se zove Ljapunovljev eksponent procesa  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Ako želimo provjeriti da li se dati proces odvija u kaotičnom režimu, treba izračunati pripadni Ljapunovljev eksponent  $\lambda$ , te ako je on pozitivan odgovor je potvrđan. Kada je zadan proces  $x_{n+1} = f(x_n)$  za Ljapunovljev eksponent vrijedi formula:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_k)| \quad (10)$$

Za vremenske nizove koji su generirani po Feigenbaumovoj slici, na osnovu parametra  $q$  računati su  $Cmp$  i Ljapunovljev eksponent  $\lambda$  i mogu se razlikovati dva slučaja:

- (1)  $Cmp \leq -6,46$ , ako je  $\lambda \leq 0,18$  (razlikovanje od čistog šuma),
- (2)  $Cmp \geq -1,7$  ako je  $\lambda \geq 0,19$  (nema razlike u odnosu na čisti šum) (11)

Može se zaključiti da sa rastom Ljapunovljevog eksponenta raste i  $Cmp$ , te da je složenost  $Cmp$  niža kada se doda manji broj šuma. Rezultati su predstavljeni u sljedećoj tablici.

q	$\lambda$	Cmp	q	$\lambda$	Cmp
1,3	-0,425	-41,59	1,46	0,19	-0,9
1,35	-0,097	-36,36	1,794	0,351	-0,507
1,402	0,028	-8,31	1,57	0,361	0,008
1,405	0,054	-6,46	1,68	0,403	-0,825
1,41	0,094	-8,85	1,83	0,481	-0,01
1,42	0,11	-8,05	1,89	0,548	-0,37
1,45	0,17	-6,96	1,94	0,585	-1,7
1,44	0,18	-7,84	1,99	0,684	-0,5

**Tablica 1.-** Ljapunovljev eksponent i složenost kratkih vremenskih nizova generirani su kao  $z_n = 1 - qz_{n-1}^2$ , gdje je  $z_0 = 0,7$ .

Ako kaotični vremenski nizovi sadrže šum, onda se složenost  $Cmp$  računa na način da su razina šuma i Ljapunovljev eksponent dovoljno niski (opadajući), što je prikazano u tablici 2.

q	$\lambda$ (bez šuma)	Cmp (sa 0,1% šuma)	Cmp (sa 0,1% šuma)
1,405	0,054	-6,36	-3,55
1,402	0,028	-6,19	-3,7
1,406	0,069	-5,41	-3,6
1,44	0,18	-3,4	-2,95
1,94	0,585	-1,67	-1,44
1,99	0,654	-0,49	-0,43

**Tablica 2.-** Izračunavanje Ljapunovljevog eksponenta i složenosti za kratke vremenske nizove koji sadrže šum.

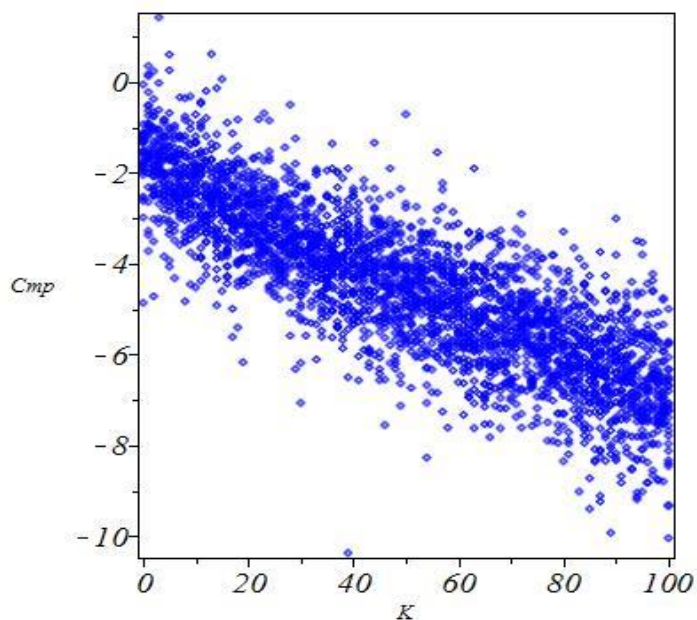
## 5. Integracija Monte Carlo metodom

Jedan od načina obrazloženja  $Cmp$  predstavljen je i izračunom proizvoljnih integrala Monte Carlo metodom, gdje je definiran omjer broja točaka neke određene praznine ispod krive sa onim iznad krive i gdje se upotrebljavaju nizovi slučajnih brojeva za izvršenje simulacije. Ako se vrši izračun integrala uporabom slučajno distribuiranih točaka  $(x_j, y_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, 110$ ) integracija je mnogo preciznija za složenije stokastične nizove  $x_j$  i  $y_j$ . U Tablici 3. su predstavljene vrijednosti zadanih integrala i vrijednosti složenosti za niz x-ova i y-ova, kao i greška koja se dobija prilikom računa.

Integrali	$Cmp_{x1}$	$Cmp_{y1}$	greška <sub>1</sub>	$Cmp_{y1}$	$Cmp_{y2}$	greška <sub>2</sub> (%)
$\int_0^1 e^{-v} \cos^2 5v dv$	-0,967	-0,812	5,9	-0,735	0,937	0,9
$\int_0^{2,53} \left[ 0,3v + \frac{2}{\sqrt{5 + 3\sin 4v}} \right] v dv$	-1,42	-0,82	14,16	-0,26	-0,09	10,82
$\int_0^{5,41} e^{v-(v-2)^2} dv$	-0,992	-0,711	17,12	-0,742	0,178	5,04

**Tablica 3.-** Složenost i greške dobijene Monte Carlo integracijom.

Povećanje složenosti  $Cmp$  približavanjem sistema termičkoj ravnoteži se može definirati na način da sustav ide u ravnotežu dok klasična entropija raste.



**Slika 3.-** Smanjivanjem  $K$  raste klasična entropija. Tad  $Cmp$  vjerovatno raste.



## 6. Nelinearne prigušene oscilacije

Ovdje se može izvršiti analiza koordinate čestice  $x(0,1j)$ , sa  $j = 1, 2, \dots, 110$  na koju djeluje sila:

$$F = -x - \beta x^3 - 0,005v \quad (12)$$

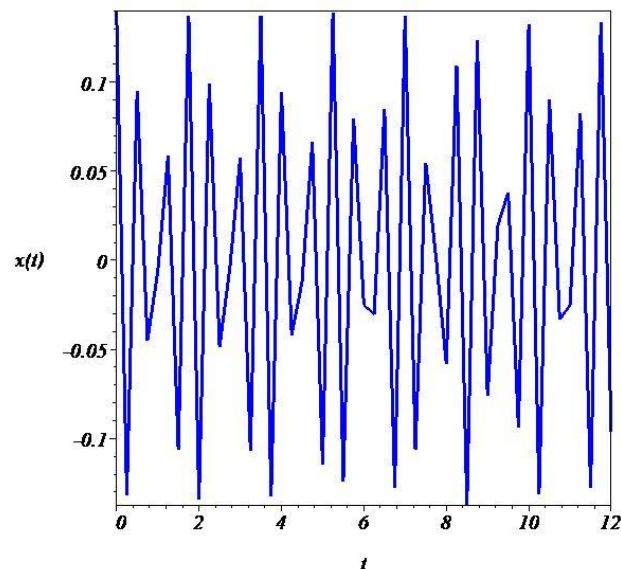
gdje je  $\beta$  koeficijent nelinearnosti koji određuje veličinu nelinearnog dijela sile, dok se njegovim porastom može primijetiti rast  $Cmp$ ,  $v$  je brzina, a vrijednost 0,005 je koeficijent proporcionalnosti između sile otpora sredine i brzine kretanja tijela. Prvi dio označava elastičnu silu, drugi dio je nelinearni dio sile, dok treći dio predstavlja silu otpora sredine. Promatrane su tri vrste kretanja i predstavljene su u sljedećoj Tablici:

$\beta$	Cmp	$\lambda$	$\beta$	Cmp	$\lambda$	$\beta$	Cmp	$\lambda$
1	-14,86	-0,032	7	-11,73	0,003	5941	-3,03	0,089
2	-17,80	-0,027	8	-11,82	0,007	6000	-1,43	0,098
3	-15,15	-0,015	9	-12,68	0,012	6300	-3,70	0,097
4	-13,92	-0,003	10	-14,58	0,010	6500	-3,66	0,095
5	-12,23	-0,002	20	-12,10	0,021	6501	-3,64	0,096
6	-11,14	-0,0009	500	-7,55	0,063	6541	-3,47	0,097

**Tablica 4.-** Predstavljene su vrijednosti koeficijenta nelinearnosti, složenosti i Ljapunovljevog eksponenta nelinearnih prigušenih oscilacija. Mogu se primijetiti tri vrste kretanja: redovito  $Cmp < -11$  i  $\lambda < 0$ , kaotično sa  $Cmp < -5,221$  i  $0 \leq \lambda \leq 0,063$  gdje se razlikuje od šuma, jer je interval složenosti šuma prisutan spolja i kaotično sa  $-5,221 < Cmp < 4,039$  i  $0,089 \leq \lambda$ ., gdje nema razlike u odnosu na interval složenosti šuma.

Oscilacije čestice su opisane diferencijabilnom jednadžbom kretanja (12), dok se pomoću ove jednadžbe i generiranja vremenskog niza mogu razmatrati podnizovi  $A_j = x_{j+p}$ ,  $p = 0, 1, 2$  (13), sa različitim pomacima  $p$ . Ovdje  $0,1j$  predstavlja diskretno vrijeme. Sa mnogo kraćim postupkom, uz  $1 \leq j \leq 100$  promatrao bi se samo jedan dio

oscilacije. Ako bi korak bio duži, onda vremenski niz koji se promatra ne bi sadržavao bitne informacije o osciliranju čestice.



**Slika 4.-** Koordinata čestice kao funkcija vremena.

## 7. Predviđanje 110-tog elementa niza i $Cmp$ kao funkcija 110-tog elementa niza

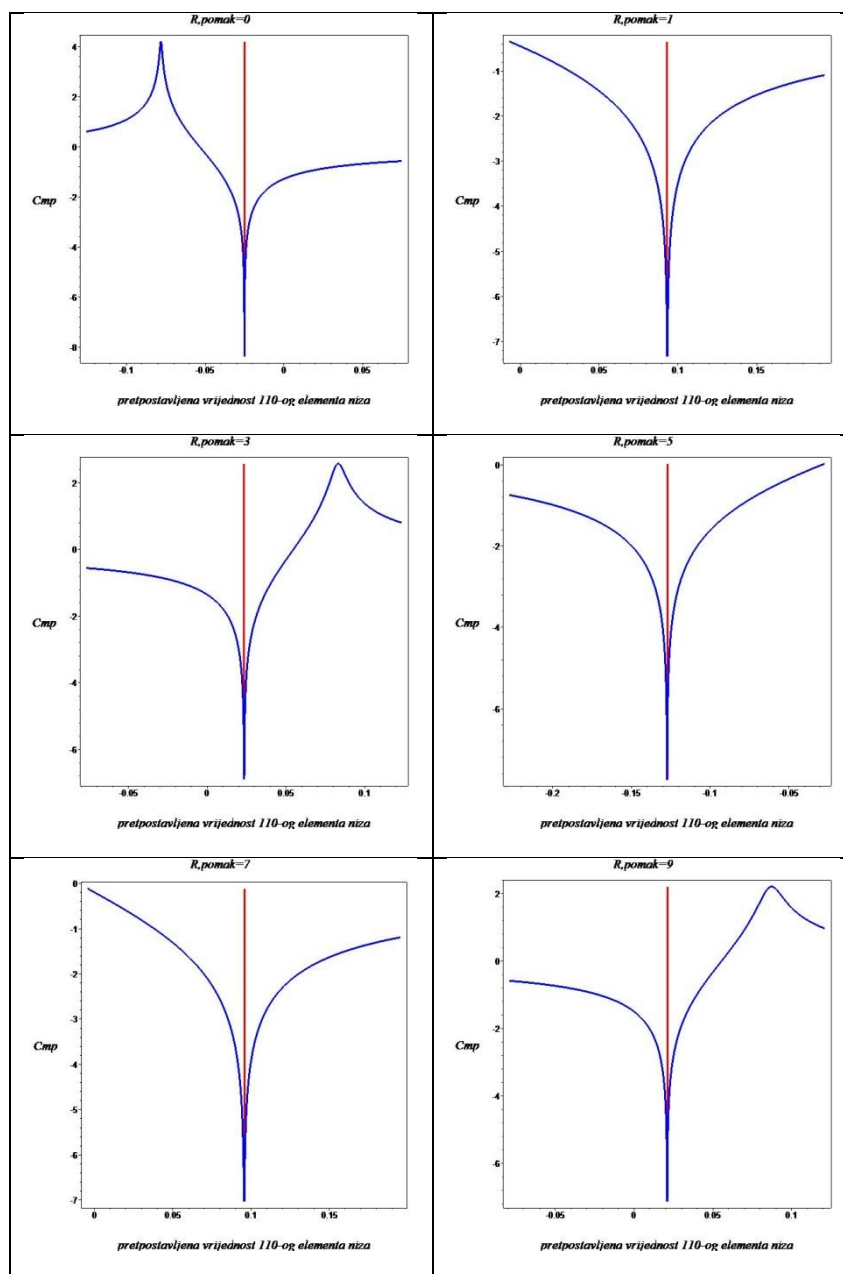
Pretpostavimo da znamo  $A_1, A_2, \dots, A_{109}$ , a ne znamo  $A_{110}$ . Računajući  $Cmp$  za različite pretpostavljene vrijednosti  $A_{110}$ , koje nisu daleko od  $A_1, A_2, \dots, A_{109}$ , i tražeći minimum, pokušavamo predvidjeti  $A_{110}$ . Očekujemo da ako ima pravila u  $A_1, A_2, \dots, A_{109}$ , složenost će biti minimalna za  $A_{110}$  koji ne krši ta pravila.

Ako su oscilacije redovite (slika 5.), važi princip minimalne složenosti - oštar dubok minimum točno određuje vrijednost 110-og elementa niza. Prethodni elementi generirani su primjenom određenih pravila. Zahtjev minimalne složenosti ekvivalentan je zahtjevu da se 110-i element uklopi u ista pravila. Redoviti niz možemo točno predviđati. Preciznost povećavamo smanjivanjem koraka na horizontalnoj osi (pretpostavljena vrijednost 110-og elementa niza, slika 5.).

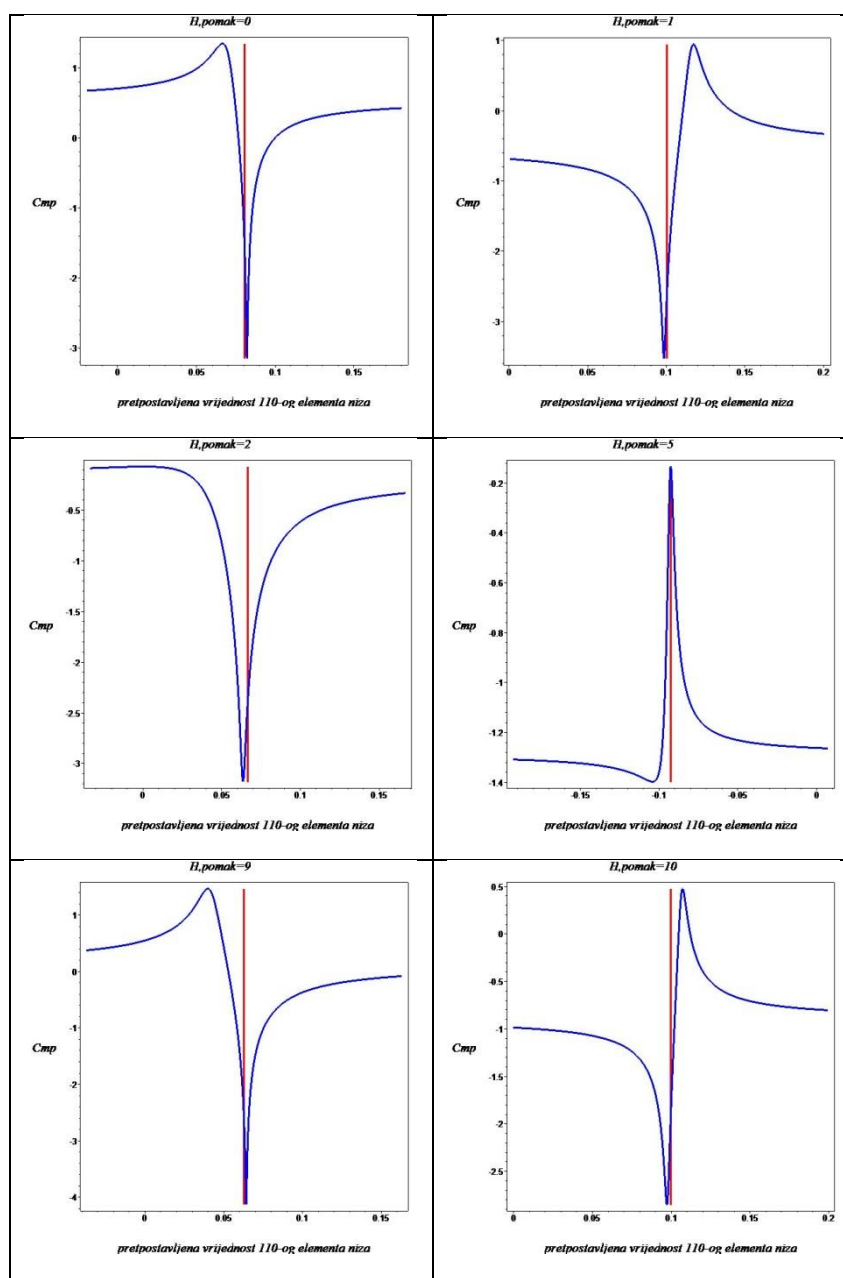
Za kaotične oscilacije (slika 6.) karakteristično je odstupanje od principa minimalne složenosti - oscilacije se ne nastavljaju na najjednostavniji mogući način, 110-i element odstupa od pravila prethodnih oscilacija, pravila se donekle mijenjaju. Kaotične oscilacije možemo predviđati približno točno. Pouzdanost predviđanja određena je oštrinom i dubinom minimuma. Većoj oštrini i dubini odgovara veća pouzdanost.

Ako su oscilacije stokastične (slika 7.), u okolini prave vrijednosti 110-og elementa nema ni oštrog minimuma ni oštrog maksimuma. Predviđanje naravno nije moguće. Očevidna je razlika dijagrama na slici 6. i slici 7. Što se može primjetiti pri pokušajima razlučivanja kaosa od šuma. Metoda po kojoj se ovdje radi u mnogim situacijama će biti učinkovita, ali ne uvijek. U slučaju kaosa s velikim Ljapunovljevim eksponentom, nije isključena mogućnost da se dobije dijagram koji liči na jedan od dijagrama u slici 7.. Tad se kaos i šum ne mogu razlučiti.

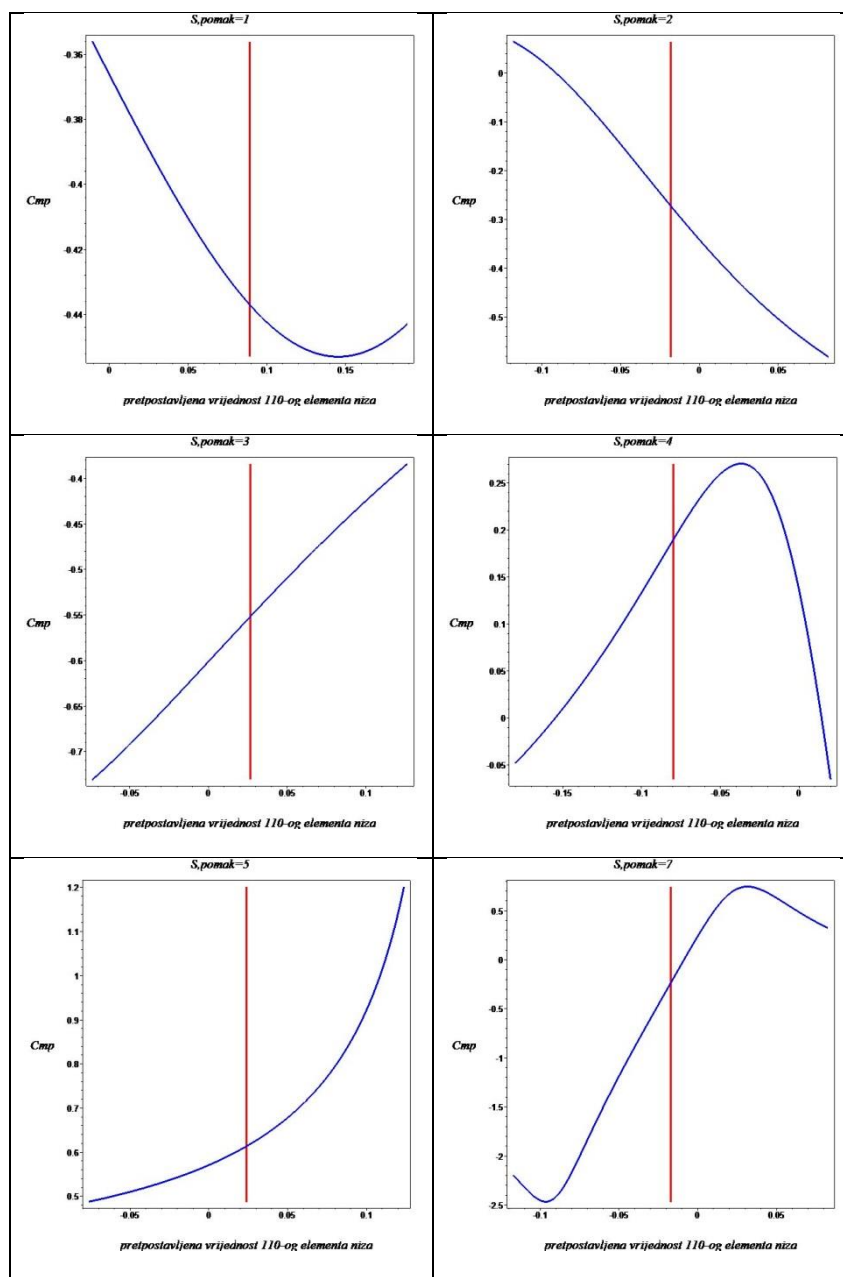
Može se primijetiti da minimalna složenost raste u smjeru redovitost-kaos-stokastika (slike 5., 6., 7.). Može se također primjetiti da pogreška predviđanja raste ako složenost raste, sukladno zapažanjem Garlanda i suradnika (Garland et al. 2014).



**Slika 5.-**  $Cmp$  kao funkcija  $A_{110}$  za redovite nizove, pri čemu je  $\beta = 8112, \gamma = 0,008$ . Vertikalna crvena linija pokazuje pravu vrijednost  $A_{110}$ . Minimumi su oštri i duboki. Predviđanje je točno. Preciznost se može povećavati skraćivanjem koraka na horizontalnoj osi.



**Slika 6.-**  $Cmp$  kao funkcija  $A_{110}$  za kaotične oscilacije, pri čemu je  $\beta = 6000, \gamma = 0,005$ . Predviđanje je približno točno. U slučaju kada je pomak jednak 5 ( $p=5$  u relaciji (13)), minimum je posebno širok i plitak i tada je potrebno veliko odstupanje od principa minimalne složenosti.



**Slika 7.-**  $Cmp$  kao funkcija  $A_{110}$  za vještačke stokastične vremenske nizove. U okolici prave vrijednosti  $A_{110}$  nema ni oštrog minimuma ni oštrog maksimuma. Predviđanje naravno nije moguće. Dijagrami su prikazani sa mogućnosti razlučivanja šuma i kaosa.

## 8. Konvencionalni i alternativni pristup

Pretpostavimo da smo izmjerili koordinatu čestice u trenucima  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$  i da želimo predvidjeti položaj čestice u budućnosti. U konvencionalnom pristupu se može definirati sila kao funkcija položaja, brzine i vremena (to može biti težak zadatak), a onda se rješava diferencijabilna jednačba kretanja. Ovdje se predlaže alternativni pristup koji omogućuje predviđanje bez znanja o pravilima generiranja vremenskog niza. Računamo  $Cmp$  za razne pretpostavljene vrijednosti budućeg položaja čestice. Ako je minimum oštar i dubok, imamo prilično pouzdano predviđanje tog položaja. Diferencijabilnoj jednačbi kretanja i osjetljivosti na početne uvjete u konvencionalnom pristupu odgovaraju princip minimalne složenosti i odstupanje od tog principa u alternativnom pristupu.

Često se postavlja pitanje je li neki računalni generiran niz pseudo-slučajnih brojeva zaista stokastičan ili koja je razina njegove stokastičnosti. Dijagrami na slikama 5. i 6. vezani su za determinizam (bez početnih uslova). Može biti zanimljivo provjeriti je li dijagram dobiven pomoću nekog niza pseudo-slučajnih brojeva sličan nekom od dijagrama sa slike 7. ili nekom od dijagrama sa slika 5. i 6..

## 9. Realni vremenski nizovi

### **S&P 500** burzovni indeks:

Računanjem složenosti vremenskih nizova vrijednosti burzovnog indeksa S&P 500 često dobijemo da oštri maksimumi pokazuju pravu vrijednost 110-og elementa. Nešto rjeđe oštri minimumi pokazuju pravu vrijednost. Ponekad su dijagrami slični onima na slici 7. (stokastizacija). Izgleda da stokastizacija prethodi velikim skokovima burzovnog indeksa, na dolje ili na gore, a da minimumi i maksimumi znače da postoje pravila promjene indeksa, koja ne znamo. Možda na osnovu dodatne analize burze, neovisne od računanja složenosti, možemo očekivati da će većina onih koji trguju dionicama postupiti u skladu sa pravilima ili će većina postupiti suprotno pravilima. Tad bismo mogli približno predvidjeti vrijednost indeksa S&P 500 . Minimum pokazuje tu vrijednost ako većina postupa po pravilima,

a maksimum pokazuje približnu vrijednost indeksa ako se većina ponaša (prodaje, kupuje ili samo zadržava dionice) suprotno pravilima. Kraha burze teško da možemo na ovaj način predvidjeti, ali bi uočena stokastika možda mogla imati ulogu jedne vrste upozorenja.

Sljedeća relacija predstavlja račun srednje vrijednosti složenosti vremenskih nizova S&P 500 za 140 raznih vrijednosti unutar jedne godine kao:

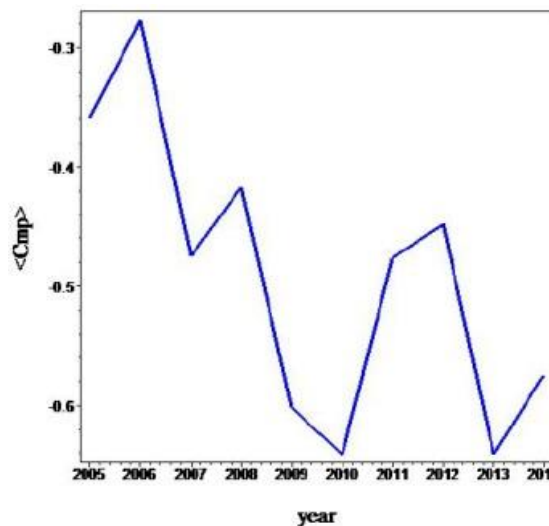
$$\langle Cmp \rangle = \frac{1}{141} \sum_{p=0}^{140} Cmp(p) \quad (14)$$

Predstavljajući da je:

$$A_i = SDP_{i+p}, \quad i = 1, 2, \dots, 110, p = 0, 1, \dots, 140. \quad (15)$$

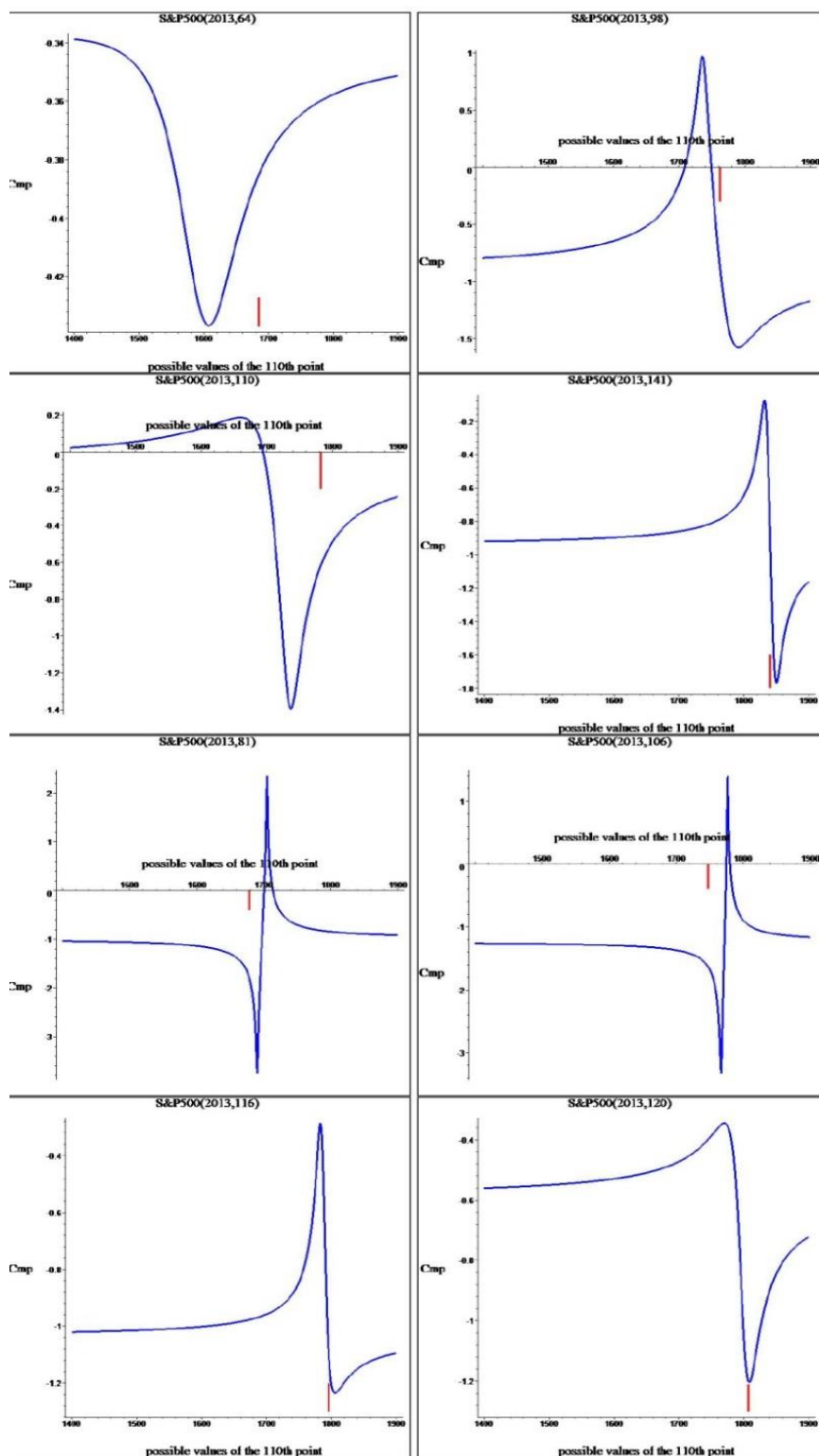
Prvi član  $A_i$  predstavlja podniz, dok je vrijednost na desnoj strani izmjerena i sa različitim pomacima  $p$ .

Grafik je predstavljen na sljedećoj slici:



**Slika 8.-**  $\langle Cmp \rangle$  je bila veoma visoka sve do 2007., kada se postepeno smanjila.





**Slika 9.-** Predviđanje burzovskog indeksa za 2013. godinu. Veoma je dobar za oštre i dublje minimume. Može se osjetiti pravilo pogađanjem minimuma. Ako postoji pravilo, onda je složenost izrazito malena.

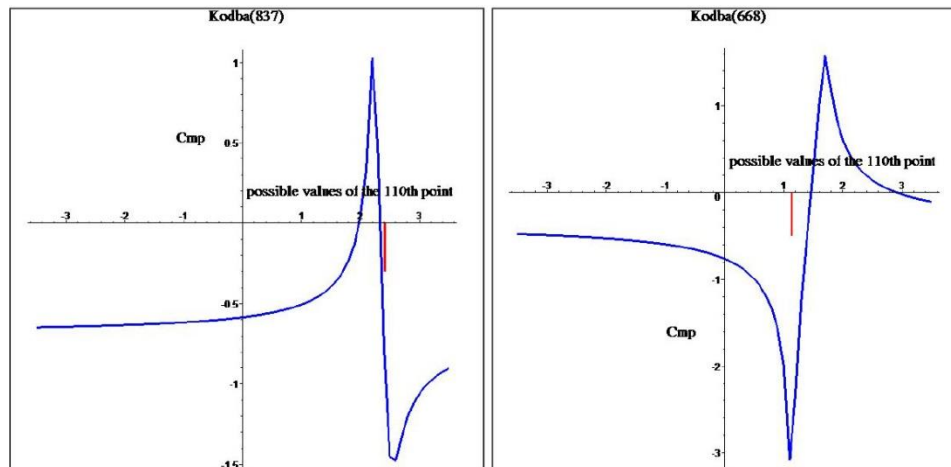
## Eksperiment sa RLC kolom :

U eksperimentu sa RLC kolom izmjeren je vremenski niz i izračunat pozitivan Lapunovljev eksponent. Računanjem složenosti se mogu predviđati 110-eti elementi podnizova.

Nakon mjerenja izlaznog napona  $K_i$  iz relacije:

$$A_i = K_{i+p}, \quad i = 1, 2, \dots, 109, \quad (16)$$

vrijednost Ljapunovljeveg eksponenta iznosi 0,33.



**Slika 10.-** Predviđanje vrijednosti izlaznog napona za  $A_{110}$ , izmjerenog u eksperimentu sa periodičnim RLC kolom. Predviđanje je veoma precizno za duboke i oštre minimume složenosti.

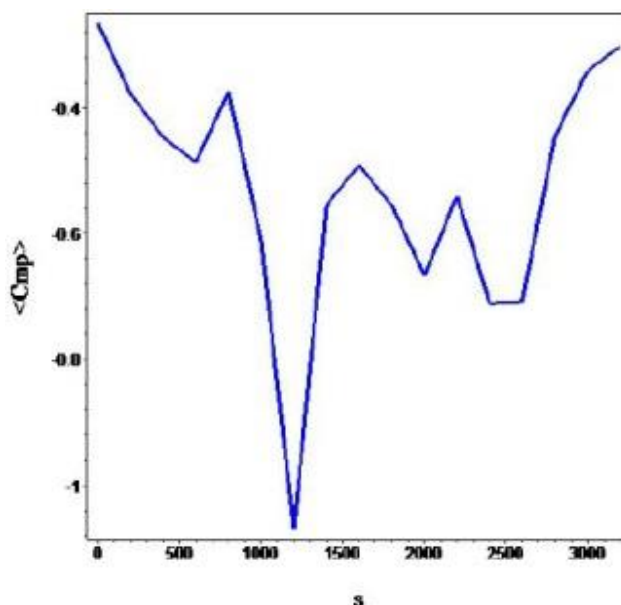
## Elektroencefalografski EEG vremenski nizovi :

EEG je metod neurofiziologije koji se između ostalog bavi i analizom prostorno-vremenskih obrazaca električne aktivnosti mozga tijekom psihičkih procesa. Ova oblast neurofiziologije je konstitucionalni dio kognitivne psihofiziologije, interdisciplinarne oblasti koja proučava fiziološke funkcije u cilju rasvjetljavanja procesa i mehanizama koji su u osnovi kognicije. Kognitivna psihofiziologija, kognitivna psihologija i kompjutersko modeliranje čine kognitivne neuroznanosti. To je najširi okvir primjene teorije determiniziranog kaosa.

EEG vremenski nizovi u obliku  $EEG_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 3595$ ) su evidentirani na pacijentima koji su podvrgnuti ECT terapiji za kliničku depresiju. Dobija se:

$$A_i = EEG_{i+p}, \quad i = 1, 2, \dots, 110s \quad (17),$$

gdje je  $A_i$  podniz, a  $EEG_{i+p}$  su izmjerene vrijednosti sa različitim pomacima  $p$ . Pomicanjem i usrednjavanjem se naglo mijenja složenost u vremenu u intervalu  $s \leq p \leq s + 90$ .



**Slika 11.-** Prosječna složenost  $Cmp$  EEG vremenskih nizova u intervalu  $s \leq p \leq s + 90$ . Može se primijetiti visok porast  $\langle Cmp \rangle$ .

## 10. Zaključak

$Cmp$ , kao mjera složenosti, definira se pomoću permutacije i linearne kombinacije.  $Cmp$  je povezan s (i) brojem različitih frekvencija u redovitim oscilacijama, (ii) Ljapunovljevim eksponentom kaotičnih vremenskih nizova, (iii) razinom šuma, (iv) točnošću metode Monte Carlo integracije i (v) koeficijentom nelinearnosti u izrazu za fluktuirajuću silu. Ako je složenost dovoljno niska, moguće je predviđati pod njenom uporabom i procijenjivati pouzdanost predviđanja. Pouzdanost predviđanja je velika, ako je minimum  $Cmp$  oštar i dubok.

Računanjem složenosti vremenskog niza također se može:

- (1) Točno predviđati redoviti vremenski niz jer tad važi princip minimalne složenosti
- (2) Približno predviđati kaotičan vremenski niz. Pouzdanost je određena širinom i dubinom minimuma u dijagramu - moguća vrijednost elementa kojeg pokušavamo predvidjeti. Pouzdanost je velika ako je minimum oštar i dubok.
- (3) Razlučiti šum i kaos u mnogim situacijama. Ponekad je to nemoguće ovom metodom.

Brzo računanje s kratkim nizom, bez potrebe da imamo ikakvo znanje o pravilima generiranja niza, prednost je ovog pristupa.

Grafički i numerički računi su rađeni u programskom paketu Maple.

# 11. Literatura

- [1] Bandt, C., & Pompe, B. (2002). Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series. *Physical Review Letters*, 88(17), 174102. <http://journals.aps.org/prl/issues/88/17>
- [2] Freking, A., Kinzel, W., & Kanter, I. (2002). Learning and predicting time series by neural networks. *Physical Review E*, 65(5), 050903. <http://journals.aps.org/pre/issues/65/5>
- [3] Garland, J., James, R., & Bradley, E. (2014). Model-free quantification of time-series predictability. *Physical Review E*, 90(5), 052910. <http://journals.aps.org/pre/issues/90/5>
- [4] Joo, T.W., & Kim, S.B. (2015). Time series forecasting based on wavelet filtering. *Expert Systems with Applications*, 42(8), 3868-3874. <http://www.sciencedirect.com/science/journal/09574174/42/8>
- [5] Kodba, S., Perc, M., & Marhl, M. (2005). Detecting chaos from a time series. *European Journal of Physics*, 26(1), 205-215. <http://www.matjazperc.com/ejp/time.html>
- [6] Rosso, O.A., Larrondo, H.A., Martin, M.T., Plastino, A., & Fuentes, M.A. (2007). Distinguishing Noise from Chaos. *Physical Review Letters*, 99(15), 154102. <http://journals.aps.org/prl/issues/99/15>
- [7] <https://www.rastko.rs/cms/files/books/4f4b842acd6f5>
- [8] [https://www.fer.unizg.hr/download/repository/Predavanje\\_3.pdf](https://www.fer.unizg.hr/download/repository/Predavanje_3.pdf)



