

Analitički opis metastabilnosti u kritičnom ponašanju neuređenog sustava

Lucija Nora Farkaš*

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička cesta 32, 10 000 Zagreb;

Mentor: *dr. sc. Ivan Balog, Institut za fiziku, Bijenička cesta 46, 10 000 Zagreb.*

(Dated: 20. siječnja 2019.)

U fokusu je pojava metastabilnosti u modelu nasumične mnogostrukosti (nadalje REM model, kao akronim izraza "Random Elastic Manifold"). Kako iz Hamiltonijana tog modela ne možemo izravno uočiti postojanje i relevantnost metastabilnih stanja, cilj je naći njihov potpis u nekoj drugoj veličini. Koristeći rezultate funkcionalne renormalizacijske grupe (nadalje FRG) za tok korelatora nereda nalazimo postojanje skale na kojoj korelator prestaje biti analitička funkcija. Razmatranjem drugog modela-igračke u kojem smo nametnuli jasno postojanje metastabilnih stanja argumentiramo da ta pojava neanalitičnosti nije slučajna, već je koristan pokazatelj metastabilnosti.

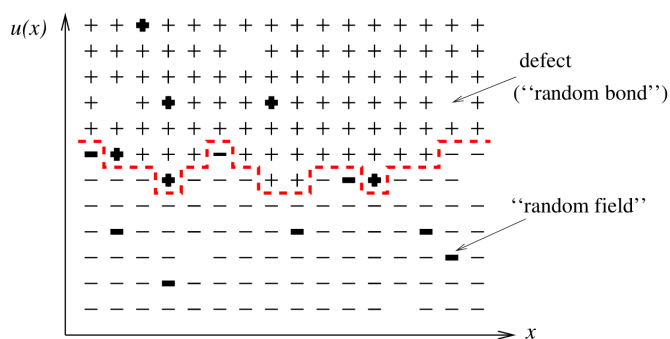
I. UVOD

Sustavi dominirani neredom otvoreno su i izazovno područje statističke fizike. Razumijevanje takvih sustava zahtjeva drukčiji konceptualni pristup od onog korištenog za čiste sustave. Jedan od primjera je potraga za osnovnim stanjem sustava s neredom. Za razliku od čistih sustava, kod neuređenih sustava učestala je pojava metastabilnih stanja, to jest stanja koja se mogu ispoljiti međusobno vrlo različitim konfiguracijama, dok energijom ostaju bliska osnovnom stanju. Kako sustavi s metastabilnim stanjima često trajno ostaju u nekom od tih stanja ili se iz njih relaksiraju neprimjetno sporo, logično je i motivirano naći i razumjeti neki indikator posotjanja metastabilnosti. Kako bismo to ostvarili, potrebno je razmatrati konkretan sustav. Nadalje u toj ulozi razmatramo REM model s neredom tipa nasumičnog polja.

I.1. Model nasumične elastične mnogostrukosti

Pojam nasumičnih elastičnih mnogostrukosti odnosi se na elastične mnogostrukosti u nasumičnom (neuređenom) mediju. Zanimaju nas, naravno, fizikalni modeli, pa je svrsishodno navesti neke od realizacija REM modela. Kontaktna linija tekućine koja vlaži grubu površinu, deformacija rešetke virova ili valovi gustoće naboja neki su od sustava opisivih REM formalizmom u raznim dimenzijama [1]. Kako je Isingov magnet jedan od čistih (u značenju bez nereda) modela na kojima se učestalo uvode i objašnjavaju temeljni pojmovi statističke fizike, za daljnju vizualizaciju problema koristimo upravo realizaciju u obliku neuređenog Isingovog modela. Postavlja se pitanje što u ovom sustavu predstavlja elastičnu mnogostrukost. Nametnemo li na takav sustav rubne uvjete s dva odvojena područja ruba, od kojih se jedno sastoji samo od "spin-up" a drugo od "spin-

down" stanja, na niskim temperaturama se javlja jasno sučelje ("elastična membrana", domenski zid) među nastalim "spin-up" i "spin-down" domenama. Uvodimo oznaku $\vec{u}(\vec{x})$ za odmak od (ravnog) domenskog zida koji bi se javio za čisti Isingov sustav na temperaturi $T = 0K$, a gdje je \vec{x} koordinata duž tog "idealnog" sučelja. Ovakva situacija prikazana je na slici I.1.



Slika I.1: Shematski prikaz sučelja (iscrtkana linija) u dvodimenzionalnom Isingovom modelu sa "spin-up" rubnim uvjetom na gornjem i "spin-down" na donjem rubu. Preuzeto iz [1].

Da bismo shvatili (barem konceptualno) kako se u ovom konkretnom RFIM (akronim za "Random Field Ising Model") sustavu ispoljava metastabilnost, koristimo se jednostavnim misaonim eksperimentom i idejom replika. Replike su sustavi istih modela s jednakim konfiguracijama nereda. Razmotrimo li nekoliko replika s različitim magnetskim poljima, možemo zamisliti kako promjenom tih polja pomikemo sučelja u sustavu. Izdvojimo li dvije replike i iz različitih početnih uvjeta mijenjamo magnetska polja dok ne postignemo uvjete koji bi na $T = 0K$ u čistom sustavu rezultirali jednakim konfiguracijama sustava i jednakim ravnim domenskim zidom, vidimo da taj postupak u neuređenom sustavu na $T = 0K$ zbog "zapinjanja" na neredu može rezultirati različitim (stabilnim) konfiguracijama sučelja. Ovim

* lucijanorafarkas@gmail.com

razmišljanjem došli smo do idejne mogućnosti postojanja metastabilnih stanja u RFIM-u. Ovdje je iščezavajuća temperatura bitna jer nema prave, dugotrajne metastabilnosti na konačnoj temperaturi: $T \neq 0K$ omogućuje dinamiku koja u nekom vremenu vodi do relaksacije sustava u pravo osnovno stanje.

Kako se neovisno o dimenziji sustava i realizaciji REM modela svi oni opisuju poljem pomaka u odnosu na čisti sustav i Hamiltonijanom oblika

$$\mathcal{H}[u] = \int d\vec{x} \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} \vec{u}(\vec{x}) \right]^2 + \int d\vec{x} V[\vec{x}, \vec{u}(\vec{x})], \quad (\text{I.1})$$

vidimo da ovu metastabilnost (ni konkretnu realizaciju ni njeno postojanje) ne možemo zaključiti iz Hamiltonijana.

Ovdje se $\mathcal{H}_{el}[u] = \int d\vec{x} \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} \vec{u}(\vec{x}) \right]^2$ odnosi na vodeći član u razvoju elastične energije mnogostrukosti, a $\mathcal{H}_{DO}[u] = \int d\vec{x} V[\vec{x}, \vec{u}(\vec{x})]$ je u ovom slučaju najopćenitiji zapis doprinosa nereda energiji sustava. Kako bismo detaljnije karakterizirali nered, uvodimo korelator nereda oblika

$$\langle V(\vec{x}, \vec{u}) V(\vec{x}', \vec{u}') \rangle := \delta^d(\vec{x} - \vec{x}') R(\vec{u} - \vec{u}'). \quad (\text{I.2})$$

Ovdje se δ -raspodjela odnosi na nasumičnost nereda u REM modelu, to jest nema nekog malog volumena oko \vec{x} u kojem bismo mogli naći koreliranost s neredom u drugim točkama tog volumena. Funkciju $R(\vec{u})$ nazivamo korelatorom nereda.

II. PROCJENA DOPRINOSA NEREDA

Prije nego što konkretnije argumentiramo bitnost i postojanje metastabilnosti u sustavima dominiranim neredom, interesira nas kada zapravo nered ima nezanemarljiv doprinos ponašanju sustava. Za takvu ocjenu koristimo se heurističkim argumentima. Uzimamo da nered dominira kad je doprinos nereda ukupnoj energiji sustava veći od elastičnog doprinosa. To ovisi o različitim parametrima, poput veličine (duljine, površine, skale itd.) sučelja, L , ili dimenzionalnosti problema, d ($d\vec{x} = d^d x$). Kako ova procjena prati Larkinove argumente [1], skala na kojoj se doprinosi izjednačavaju naziva se Larkinovom (ili kritičnom) skalom L_c .

Elastična energija se skalira s L^{d-2} . Ovdje L^d dolazi od volumnog elementa $d\vec{x}$, a L^{-2} od kvadrata gradijenta. Uvevši koeficijent proporcionalnosti c , ocjenjujemo doprinos elastičnosti sučelja s $E_{el} = cL^{d-2}$. Kako bismo našli skaliranje doprinosa nereda, koristimo centralni granični teorem. Za procjenu doprinosa nereda uzimamo da je učinak nereda proporcionalan fluktuacijama energije sučelja duljine L , koje se po spomenutom teoremu skaliraju s $\sqrt{N_{ef}^d}$, gdje je N_{ef} efektivni broj podsustava na koji možemo podijeliti promatranu mnogostrukost a da tako dobiveni podsustavi statistički slični originalnom. Kako je korelacijska duljina ξ mjera prostorne skale na kojoj je sustav značajno koreliran, dijeljenjem na manje podjeljke promijenili bismo svojstva sustava. Tako

kao primjerenu procjenu biramo $N_{ef} = L/\xi$. Ovime za doprinos nereda dobivamo $E_{DO} = \bar{f} \sqrt{L/\xi}^d$, gdje je \bar{f} karakteristična potencijalna energija jednog podsustava. Izjednačivši ova dva doprinosa, za Larkinovu duljinu dobivamo:

$$E_{DO} = E_{el} \implies L_c = \left(\frac{c^2}{\bar{f}^2} \xi^d \right)^{\frac{1}{4-d}}. \quad (\text{II.1})$$

Za dimenzije $d < 4$ i na skalama $L > L_c$ sučeljem dominira nered. Tako za termodinamičku granicu (u kojoj je L neograničeno veliko, i što je slučaj od interesa), nered uvijek dominira ispod kritične dimenzije $d = 4$.

Kad sučeljem dominira elastičnost, fluktuacije domenskog zida su male i transformacijom skaliranja prelaskom na veće skale dolazimo do ravnih sučelja. Ovak slučaj nije od interesa, te motivaciju za daljnje razmatranje REM modela donosi pojava hrapavih sučelja u sustavima dominiranim neredom. Ova hrapavost uzrokovana je zapinjanjem u metastabilnim stanjima.

III. KRITIČNOST

Što možemo reći o hrapavim mnogostrukostima dominiranim neredom? Ono što se opaža numeričkim simulacijama i eksperimentima [1] je skaliranje polja pomaka $\vec{u}(\vec{x})$ s prostornom koordinatom \vec{x} kao

$$\langle [\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x}')]^2 \rangle \propto |\vec{x} - \vec{x}'|^{2\zeta}; \quad \zeta < 1, \quad (\text{III.1})$$

gdje $\langle \bullet \rangle$ predstavlja usrednjenje. Ovdje je

$$1/2 \langle [\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x}')]^2 \rangle = 1/2 \left[\langle \vec{u}(\vec{x}) \rangle^2 + \langle \vec{u}(\vec{x}') \rangle^2 \right] - \langle \vec{u}(\vec{x}) \vec{u}(\vec{x}') \rangle$$

korelacijska funkcija neuređenog sustava. Potencijsko ponašanje korelacijske funkcije jedna je od posljedica divergencije korelacijske duljine ξ i kao takvo ukazuje na kritično ponašanje sustava, te analogno kažemo da i ovaj neuređeni sustav za $d < 4$ i termodinamičku granicu pokazuje kritično ponašanje. Glavna motivacija je objasniti ovakvo netrivialno skalirajuće ponašanje koje opisuje hrapavost sučelja sustava dominiranog neredom i povezati ga s metastabilnošću.

IV. NEANALITIČNOST KORELATORA NEREDA

Kako bismo našli kritični eksponent ovog skaliranja ζ i pokazali spomenutu neanalitičnost korelatora nereda $R(u)$, koristimo se rezultatima funkcionalne renormalizacijske grupe. FRG razmatra bezdimenzionalne

veličine, te vrijedi spomenuti da su sve veličine koje nadalje koristimo bezdimenzionalne. Rezultati renormalizacije nam govore kako se promatrane veličine mijenjaju transformacijom reskaliranja [2]. Ovdje razmatranu skalu označujemo s l , a veličina od interesa je $\Delta_l(u) = \frac{-\partial^2 R}{\partial u^2}(u) = -R''(u)$. Funkcija $\Delta_l(u)$ zanimljiva je jer se koristi za račun korelacijske funkcije, iz koje se dobivaju mjerljive susceptibilnosti neuređenog sustava. Koristimo početni uvjet jakog nereda prikladan za nashumično polje [3]:

$$0 < \int du \Delta_{l=0}(u) < +\infty. \quad (\text{IV.1})$$

Potrebna jednadžba toka uz $\epsilon = 4 - d$ i $T = 0K$ glasi [4]

$$\partial_l \Delta_l(u) = (\epsilon - 3\zeta) \Delta_l(u) + \zeta [u \Delta_l(u)]' - \frac{1}{2} \left\{ [\Delta_l(u) - \Delta_l(u=0)]^2 \right\}'' . \quad (\text{IV.2})$$

Korisno je još jednom napomenuti da razmatramo sustave na iščezavajućoj temperaturi jer tada sustav može trajno ostati u nekom od mogućih metastabilnih stanja energetski bliskih osnovnom bez relaksacije. Tada je postojanje metastabilnih stanja za sustav najznačajnije pa tako i najprimjetljivije, što je optimalno za naš cilj pronalaženja indikatora njihovog postojanja.

Također, kritično je ponašanje dominirano fluktuacijama koje su statistički samoslične [2] do skale korelacijske duljine ξ . Veličine koje opisuju takve situacije moraju stoga zbog samosličnosti odgovarati fiksnim točkama transformacije reskaliranja. Zato u sljedećem koraku računamo funkciju $\Delta_l(u)$ upravo u tim točkama.

IV.1. Račun $\Delta(u)$ u fiksnoj točki

Prvo tražimo ζ u fiksnim točkama (točke u kojima vrijedi $\partial_l \Delta_l = 0$) i u tu svrhu integriramo izraz IV.2:

$$\partial_l \int_{-\infty}^{\infty} du \Delta_l(u) = (\epsilon - 3\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} du \Delta_l(u) + \zeta [u \Delta_l(u)] \Big|_{-\infty}^{\infty} - \Delta_l'(u) [\Delta_l(u) - \Delta_l(0)] \Big|_{-\infty}^{\infty} . \quad (\text{IV.3})$$

Uzevši u obzir izraz III.1, uvrštavanjem zamjene $[x, R(u)] \leftrightarrow [x', R(u')]$ i iz komutativnosti množenja vidimo da je R funkcija parna u u , pa su tako njene parne derivacije po tom argumentu (poput Δ_l) parne, a neparne (poput Δ_l') neparne u u . Sagledamo li IV.3 kao traženje Cauchyjeve principalne vrijednosti, iskoristivši ove argu-

mente o dobro definiranom paritetu Δ_l dobivamo

$$\begin{aligned} \partial_l \int_{-\infty}^{\infty} du \Delta_l(u) &= (\epsilon - 3\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} du \Delta_l(u) \\ \implies \partial_l \left[\ln \int_{-\infty}^{\infty} du \Delta_l(u) \right] &= (\epsilon - 3\zeta) . \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Stoga su jedine smislene fiksne točke transformacije skaliranja za kritični eksponent

$$\zeta = \frac{\epsilon}{3} = \frac{4-d}{3} .$$

Ovaj eksponent je za dimenzije od interesa ($d < 4$, za koje dominira nered) necjelobrojan.

Kada bismo se za račun koristili Gaussovom modelom, koji je uobičajno primjenjivati na čiste sustave, dobili bismo cjelobrojni eksponent. Potrebno je objasniti ovakvo odstupanje od uobičajnih $\zeta \in \mathbb{N}$ kritičnih eksponenata. Zanimljivo je da bi i pretpostavkom analitičnosti korelatora te uvrštavanjem time mogućeg Taylorovog razvoja parne funkcije

$$\frac{\Delta(u)}{\Delta(0)} = 1 + \frac{a}{2!} u^2 + \frac{b}{4!} u^4 + \frac{c}{6!} u^6 + \frac{d}{8!} u^8 + \dots$$

u jednadžbu toka također dobili cjelobrojne eksponente $\zeta = 2\epsilon$ ili $\zeta = 0$. Osim što je iz III.1 jasna neadekvatnost $\zeta = 0$ rezultata, eksponent $\zeta = 2\epsilon$ daje za Δ nefizikalna rješenja (trivijalno iščezavajuće rješenje, $\Delta \propto u^2$ rješenje s pozitivnim koeficijentom proporcionalnosti kontradiktorno uvjetu IV.1 i slična). Ovo je jedna od prvih naznaka neanalitičnosti veličine Δ .

Uvrstimo li okolnosti fiksne točke ($\partial_l \Delta_l = 0$, $\zeta = \epsilon/3$) u izraz IV.2, uz uvođenje oznake Δ za veličinu Δ_l u fiksnoj točki, dobivamo jednadžbu

$$\left\{ \frac{\epsilon}{3} u \Delta(u) - \frac{1}{2} [(\Delta(u) - \Delta(0))^2] \right\}' = 0. \quad (\text{IV.5})$$

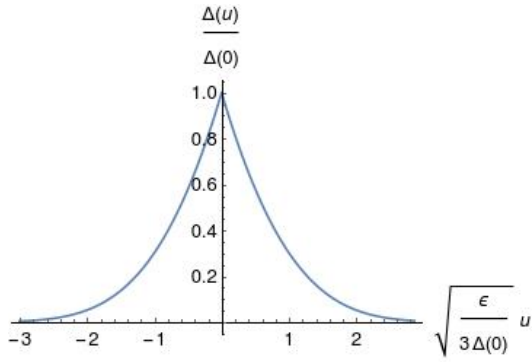
Dva puta integrirajući izraz IV.5 od 0 do u , dobivamo implicitno rješenje za ovisnost Δ o u :

$$\frac{\epsilon}{6\Delta(0)} u^2 = \frac{\Delta(u)}{\Delta(0)} - 1 - \ln \left[\frac{\Delta(u)}{\Delta(0)} \right]. \quad (\text{IV.6})$$

U ovim računima korištena je granica $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \Delta(u) = 0$, argumentirana početnim uvjetom IV.1 i činjenicom da se isti ne mijenja reskaliranjem u fiksnoj točki. Ovo rješenje prikazano je na slici IV.1, s koje je jasno vidljiva njegova neanalitičnost u obliku šiljka centriranog na ishodištu varijable pomaka u .

IV.2. Pojava neanalitičnosti reskaliranjem

Rješenje IV.6 odnosi se na fiksnu točku i opisuje kritično ponašanje. Početna fizikalna situacija prije



Slika IV.1: Ovisnost Δ o u u fiksnoj točki $\partial_l \Delta_l = 0$ s razvidnim singularitetom-šiljkom za $u = 0$.

reskaliranja opisana je potpuno analitičkim korelatom (početni uvjet FRG-a). Zanima nas kako nađeni singularitet-šiljak sa slike IV.1 u $u = 0$ nastaje promjenom renormalizacijske skale. Tok IV.2 za $T = 0K$ opisuje ponašanje $\Delta_l(u)$ pod transformacijama renormalizacijske grupe. Kako bismo iz tog toka dobili jasnu sliku razvoja neanalitičnosti, za početak ga dvaput deriviramo po u :

$$\begin{aligned} \partial_l \Delta_l''(u) &= \epsilon \Delta_l''(u) + u \zeta \Delta_l''(u) - 4 \Delta_l'(u) \Delta_l'''(u) \\ &\quad - 3 [\Delta_l''(u)]^2 - [\Delta_l''(u) - \Delta_l''(0)] \Delta_l''''(u). \end{aligned} \quad (IV.7)$$

Uvrstimo li u izraz IV.7 $u = 0$ i iskoristimo već spomenute argumente o paritetu, dobivamo jednadžbu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_l''(0)}{\partial l} &= \epsilon \Delta_l''(0) - 3 [\Delta_l''(0)]^2 \\ \implies \frac{d \Delta_l''(0)}{\epsilon \Delta_l''(0) - 3 [\Delta_l''(0)]^2} &= dl. \end{aligned} \quad (IV.8)$$

Integrirajući IV.8 od 0 do l , dobivamo izraz za $\Delta_l''(0)$:

$$\Delta_l''(0) = \frac{\Delta_0''(0) e^{\epsilon l}}{1 + \frac{3}{\epsilon} \Delta_0''(0) (e^{\epsilon l} - 1)}. \quad (IV.9)$$

Izjednačimo li nazivnik u izrazu IV.9 s 0, dobivamo da druga derivacija $\Delta_l(u=0)$ po pomaku u divergira za kritičnu skalu $l_c = 1/\epsilon \ln \{1 - \epsilon/[3\Delta_0''(0)]\}$: dakle, počeli smo od analitičke funkcije, no konačnom renormalizacijom dolazimo do skale l_c na kojoj $\Delta_l''(0)$ izdivergira. Promatranjem fiksne točke našli smo da ta divergencija dovodi do singulariteta-šiljka sa slike IV.1. Konceptualno, l_c odgovara heuristički nađenoj Larkinovoj skali L_c : na njoj prevladava doprinos nereda i sučelje postaje hrapavo. Tu hrapavost ne možemo ukloniti dodatnim udaljavanjem (povećavanjem skale). Sustav se sad nalazi u kritičnom stanju opisanom izrazom III.1 (i za $l > l_c$). No, što je s izrazom IV.9 koji predviđa divergenciju samo za l_c ? Za neanalitičke funkcije ne možemo koristiti argumente o paritetu i iščezavanju neparnih derivacija korelatora za $u = 0$. Potrebno je vrijednosti za iščezavajući u

gledati kao jednostrane granice, budući da im sad za 0^+ i 0^- vrijednosti ne moraju biti iste, te stoga može vrijediti na primjer $\lim_{u \rightarrow 0^\pm} \Delta_l''(u) \neq 0$. Tako uvrštavanjem $u = 0$ u izraz IV.7 ne dobivamo zatvorenu jednadžbu za $\Delta_l''(0)$, poput IV.8.

V. MODEL-IGRAČKA

Kako bismo postigli intuitivniji uvid u povezanost metastabilnosti i neanalitičnosti razmatramo od model-igračku s metastabilnošću nametnutom Hamiltonijanom

$$H = -a|x| + bx^2, \quad a, b > 0. \quad (V.1)$$

Ovaj hamiltonijan, skupa s utjecajem vanjskog izvora h prikazan je na slici V.1.

Računamo particijsku funkciju ovog sustava, budući da se iz nje može izračunati većina relevantnih veličina statističkog sustava:

$$\begin{aligned} Z &= \int dx \exp(-\beta H) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-\beta(-a|x| + bx^2 - hx)] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta b}} \left\{ \exp \left[\beta \frac{(h-a)^2}{4b} \right] \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta} \frac{h-a}{2\sqrt{b}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \exp \left[\beta \frac{(h+a)^2}{4b} \right] \left[1 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta} \frac{h+a}{2\sqrt{b}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (V.2)$$

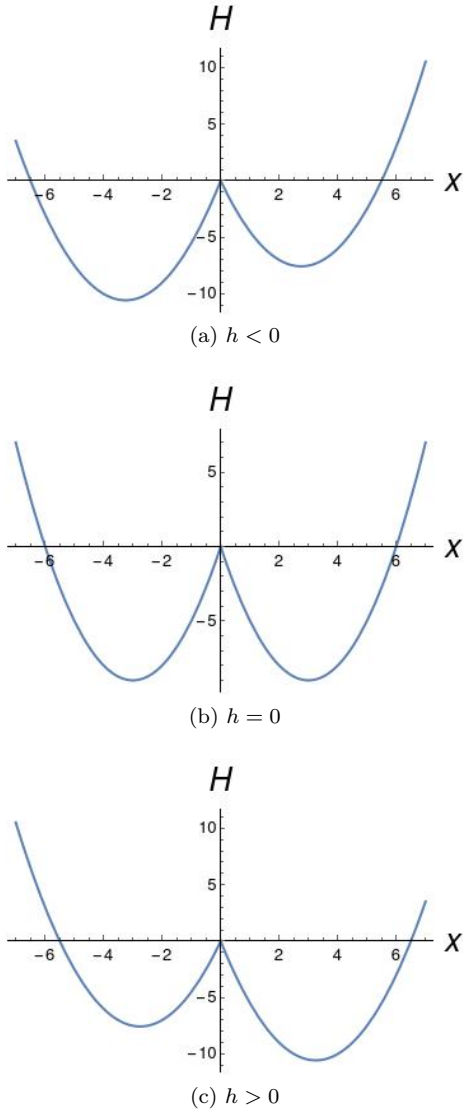
Dobivenu particijsku funkciju koristimo za račun parametra uređenja ovakvog sustava danog s

$$\begin{aligned} \phi_\beta[h] &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial h} \\ &= \frac{h-a}{2b} + \frac{a}{b} \frac{1}{1 + \exp \left(-\beta \frac{ah}{b} \right) \frac{1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta} \frac{h-a}{2\sqrt{b}} \right)}{1 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\beta} \frac{h+a}{2\sqrt{b}} \right)}}. \end{aligned} \quad (V.3)$$

Kao što je već spominjano, značaj prave metastabilnosti očituje se u $T = 0K$ režimu, te razmatramo parametar uređenja u toj granici:

$$\phi[h] = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \phi_\beta[h] = \operatorname{sgn}(h) \frac{|h| + a}{2b}. \quad (V.4)$$

Sa slike V.2 vidljivo je da hlađenjem parametar uređenja razvija neanalitički skok između pozitivne i negativne vrijednosti za iščezavajuće vanjsko polje. U kojem se onda od ta dva slučaja nalazi promatrana od

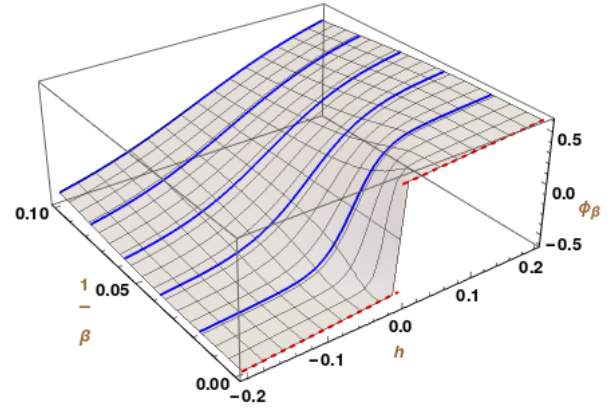


Slika V.1: Hamiltonijan promatranog modela-igračke s doprinosom vanjskog izvora h .

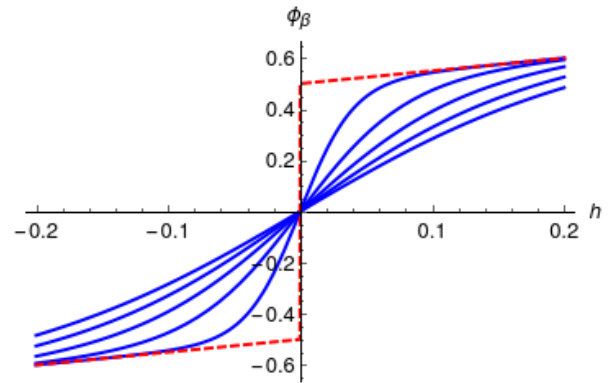
čestica? Odgovor očito ovisi o tome prilazimo li točki ($h = 0, T = 0K$) s $h < 0$ ili $h > 0$ vanjskim poljem. Kako bi taj odgovor imao fizikalni značaj, potrebno je, dakle, promatrati brojne replike sustava s poljem koje fluktuiira oko $h = 0$. U ovom modelu uzimamo da su te fluktuacije rapodjeljene Gaussovom raspodjelom

$$P(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma}\right). \quad (\text{V.5})$$

Uzevši u obzir princip samousrednjavanja [5] po ovakvom neredu, nadalje kao fizikalno relevantnu veličinu razmatramo usrednjen $T = 0K$ parametar uređenja $\langle\phi\rangle$ i srodne veličine dobivene računom kumulanata.



(a) Pune linije su izdvojene ovisnosti o h za pet različitih konačnih temperatura. Iscrtkana linija predstavlja ϕ , to jest $T = 0K$ slučaj.



(b) Ovisnosti o h za izdvojene temperature s a) dijela.

Slika V.2: Ovisnost polja ϕ_β o temperaturi $\frac{1}{\beta}$ i vanjskom izvoru h .

V.1. Račun kumulanata

Kumulanti su veličine srodne momentima, te se mogu prikazati jedni preko drugih [2]. Definiramo ih izrazom

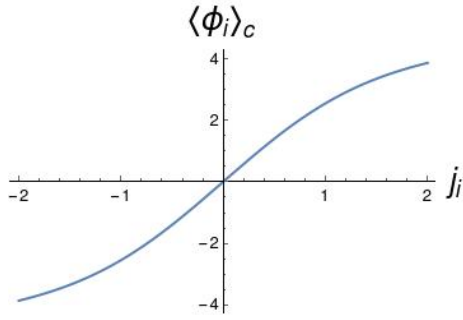
$$\langle\phi_i \dots \phi_j\rangle_c = \left[\frac{\partial}{\partial k_i} \dots \frac{\partial}{\partial k_j} \langle \exp \left(\sum_l k_l \phi_l \right) \rangle \right] \Big|_{\vec{k}=\vec{0}}; \quad (\text{V.6})$$

$$\phi_i[h] = \phi[j_i + h],$$

preko funkcije izvodnice $\langle \exp(\vec{k} \cdot \vec{\phi}) \rangle$. Ovdje je j_i polje u j -toj promatranoj replici a h polje koje predstavlja nered. Kumulant n veličina, $\langle\phi_{i_1} \dots \phi_{i_n}\rangle_c$, naziva se n -tim kumulantom. Veličine od interesa, usrednjeni parametar uređenja $\langle\phi_i\rangle$ i korelacijska funkcija $\langle\phi_1\phi_2\rangle - \langle\phi_1\rangle\langle\phi_2\rangle$ odgovaraju prvom i drugom kumulantu, koje računamo usrednjavanjem po neredu:

$$\langle\phi_i\rangle_c = \langle\phi_i\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dh P(h) \phi[j_i + h] \quad (\text{V.7})$$

$$= \frac{j_i}{2b} + \frac{a}{2b} \operatorname{erf}\left(\frac{j_i}{\sqrt{2\sigma}}\right).$$

Slika V.3: Prvi kumulant $\langle \phi_i \rangle_c$.

Dobivena je analitička funkcija $\langle \phi_i \rangle_c$ čiji je graf prikazan na slici V.3. Usporedbom s grafom V.2 vidimo da je usrednjavanje po neredu uklonilo neanalitičnost ϕ . Izraz za drugi kumulant glasi:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_c &= \langle \phi_1 \phi_2 \rangle - \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dh P(h) \phi[j_1 + h] \phi[j_2 + h] - \langle \phi_1 \rangle \langle \phi_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

Uvrštavanjem ovisnosti V.4 za ϕ u izraz V.8 i integracijom istog analitički dobivamo drugi kumulant:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_c &= \frac{\sigma}{(2b)^2} + \frac{a}{2b} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\sigma}{(2b)^2}} \left[\exp\left(-\frac{j_1^2}{2\sigma}\right) + \exp\left(-\frac{j_2^2}{2\sigma}\right) \right] + \\ &+ \left(\frac{a}{2b}\right)^2 \left\{ 1 - \text{sgn}(j_1 - j_2) \left[\text{erf}\left(\frac{j_1}{\sqrt{2\sigma}}\right) - \text{erf}\left(\frac{j_2}{\sqrt{2\sigma}}\right) \right] - \text{erf}\left(\frac{j_1}{\sqrt{2\sigma}}\right) \text{erf}\left(\frac{j_2}{\sqrt{2\sigma}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$

Za bolji uvid rotiramo sustav transformacijom (čiji je Jakobijan jediničan):

$$x = \frac{j_1 + j_2}{\sqrt{2}}, y = \frac{j_1 - j_2}{\sqrt{2}} \implies j_1 = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, j_2 = \frac{x - y}{\sqrt{2}}. \quad (\text{V.10})$$

Drugi kumulant izražen u novim koordinatama glasi

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_c &= \frac{\sigma}{(2b)^2} + \frac{a}{2b} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\sigma}{(2b)^2}} \left[\exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4\sigma}\right) + \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\sigma}\right) \right] + \\ &+ \left(\frac{a}{2b}\right)^2 \left\{ 1 - \text{sgn}(y) \left[\text{erf}\left(\frac{x+y}{2\sqrt{\sigma}}\right) - \text{erf}\left(\frac{x-y}{2\sqrt{\sigma}}\right) \right] - \text{erf}\left(\frac{x+y}{2\sqrt{\sigma}}\right) \text{erf}\left(\frac{x-y}{2\sqrt{\sigma}}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

te poseban naglasak stavljamo na slučaj jednakih iznosa (istog ili suprotnog predznaka) polja j_i :

i) $y = 0$:

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_c = \frac{\sigma}{(2b)^2} + 2 \frac{a}{2b} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\sigma}{(2b)^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma}\right) + \left(\frac{a}{2b}\right)^2 \left\{ 1 - \left[\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\sigma}}\right) \right]^2 \right\}, \quad (\text{V.12})$$

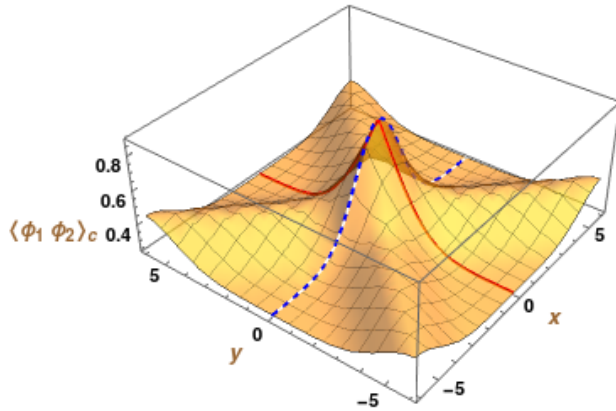
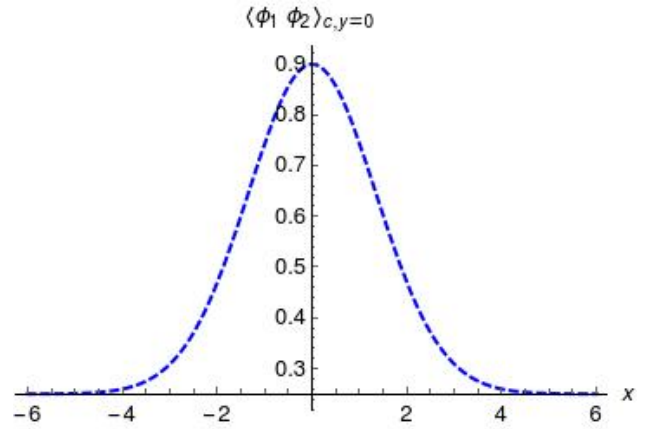
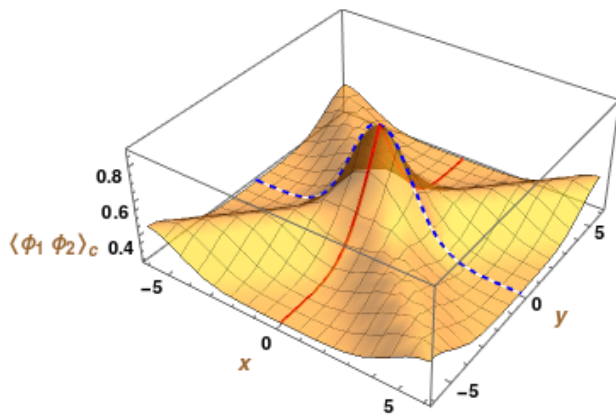
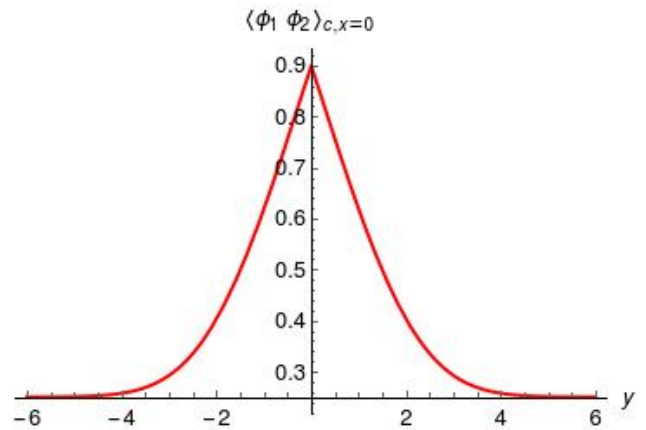
ii) $x = 0$:

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle_c = \frac{\sigma}{(2b)^2} + 2 \frac{a}{2b} \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\sigma}{(2b)^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\sigma}\right) + \left(\frac{a}{2b}\right)^2 \left\{ 1 - 2 \text{sgn}(y) \text{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\sigma}}\right) + \left[\text{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\sigma}}\right) \right]^2 \right\}.$$

Grafički prikaz ove ovisnosti drugog kumulanta o varijablama x i y dan je slikom V.4. S ovog prikaza razvidna je znakovita pojava singulariteta-šiljka za replike istog polja ($x = 0$, slika V.4d). Ovime još jednom, ali izravnije, dolazimo do uvida da pojava šiljka u korelacijskoj funkciji upućuje na relevantnost i postojanje metastabilnih stanja u kritičnim sustavima.

VI. ZAKLJUČAK

Razmatrili smo tok veličine $\Delta(u) = -R''(u)$ za $T = 0K$, gdje je $R(u)$ korelator nereda u REM modelu. Jednadžbu toka smo preuzeli iz rezultata funkcionalne renormalizacijske grupe. Iz nje smo pokazali da postoji konačna kritična skala na kojoj se renormalizacijom iz početnog analitičkog korelatora dobiva singularitet u obliku šiljka funkcije $\Delta(u)$ za pomak $u = 0$. Neanalitična $\Delta(u)$ ulazi u račun korelacijske funkcije REM modela.

(a) Prikaz drugog kumulanta s naglašenim $b)$ i $d)$ ovisnostima.(b) Izdvojena analitička ovisnost o x za $y = 0$.(c) Prikaz $a)$ s pogledom iz drugog smjera.(d) Izdvojena neanalitička ovisnost o y za $x = 0$ s razvidnim singularitetom-šiljkom.Slika V.4: Ovisnost drugog kumulanta o $x = \frac{j_1 + j_2}{\sqrt{2}}$ i $y = \frac{j_1 - j_2}{\sqrt{2}}$.

Šiljak se javlja u fiksnoj točki transformacije renormalizacije. Fiksne točke operatora renormalizacije odgovaraju kritičnom režimu. Kritičnost se općenito odlikuje potencijskim ponašanjem korelacijske funkcije, čiji je analogon ovdje izraz III.1: $\langle [\vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x}')]^2 \rangle \propto |\vec{x} - \vec{x}'|^{2\zeta}$. Ova j izraz opisuje hrapavost promatrane elastične membrane koju nije moguće otkloniti daljnjim reskaliranjem. Hrapavost je rezultat postojanja metastabilnih stanja energetske bliskih osnovnom, ravnom sučelju i nemogućnosti daljnje relaksacije na iščekavajućoj temperaturi. Nalazimo neuobičajan, necjelobrojan kritični eksponent hra-

pavosti $\zeta = (4 - d)/3$. Ova neobična ponašanja veličina ζ i $\Delta(u)$ pripisujemo postojanju metastabilnih stanja u ovom kritičnom, neuređenom sustavu. Kako ne možemo postojanje metastabilnih stanja zaključiti iz REM Hamiltonijana, predlažemo pojavu singulariteta-šiljka kao njihov indikator. Za razvoj dodatne intuicije promatramo model-igračku s jasno manifestirajućim metastabilnim stanjima. Izravnim računom nalazimo očekivani singularitet-šiljak drugog kumulanta (korelacijske funkcije) na $T = 0K$.

- [1] K. J. Wiese i P. Le Doussal: Functional Renormalization for Disordered Systems, Basic Recipes and Gourmet Dishes, *Markov Processes Relat. Fields* 13 (2007) 777-818.
 [2] A. Cheung: *Phase Transitions and Collective Phenomena*, bilješke, siječanj 2011.

- [3] P. Le Doussal: *Functional renormalization*, prezentacija za CNRS-LPTENS Paris Windsor ljetnu školu, kolovoz 2004.
 [4] P. Chauve, T. Giamarchi i P. Le Doussal: Creep and depinning in disordered media, *Phys. Rev. B* 62, 6241 (2000).

- [5] V. Dotsenko: *Introduction to the Replica Theory of Disordered Statistical Systems*, Collection Aléa-Saclay, 2001.