Alternativna teorija klasične elektrodinamike koja dopušta isključivo kvantizirane točkaste naboje

Bruno Golik

PMF, Fizički odsjek, Bijenička c. 32, 10000 Zagreb

3. siječnja 2024.

Sažetak

U ovom radu iskazana je teorija klasične elektrodinamike u kojoj jedini dozvoljeni električni naboji odgovaraju topološkim singularitetima u elektromagnetskom polju, dok kontinuirane raspodjele naboja nisu dopuštene. Teorija je formulirana na temelju relativističke Weylove jednadžbe u inverznom prostoru, čija svojstvena stanja parametarski ovise o prostornim i vremenskim koordinatama i obliku trajektorije singulariteta. Pomoću svojstvenih stanja Weylove jednadžbe računaju se Berryjeva koneksija i Berryjeva zakrivljenost. Cilj ovog rada je eksplicitnim računom pokazati da komponente Berryjeve zakrivljenosti u ovoj teoriji odgovaraju komponentama elektromagnetskog polja točkastog naboja dobivenog iz Maxwellovih jednadžbi, do na multiplikativnu konstantu.

1 Uvod

1.1 Liénard-Wiechertovi potencijali i pripadna polja

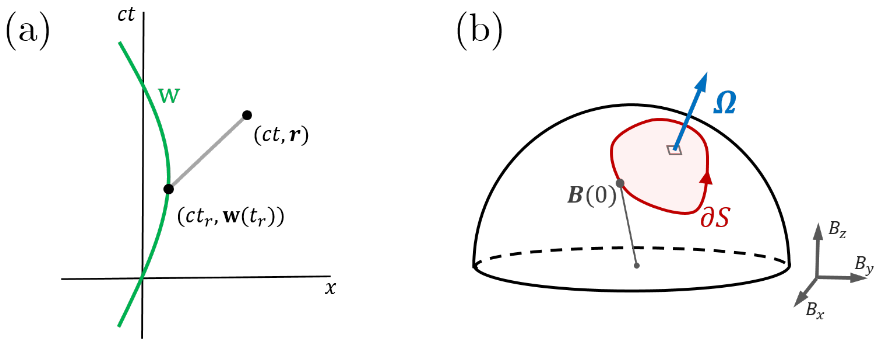
U klasičnoj elektrodinamici opisanoj Maxwellovim jednadžbama električno ($\mathbf{E}$) i magnetsko ($\mathbf{B}$) polje ovise o raspodjelama naboja i struja $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ na način opisan Jefimenkovim jednadžbama [2]. Posebno značajan elektrodinamički problem je sustav točkastog naboja q koji se u vakuumu giba po trajektoriji $\mathbf{w}$(t). Distribucije naboja i struja kod ovog sustava iznose $\rho = q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{w}(t))$, $\mathbf{j} = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{w}(t))$, gdje $\mathbf{v}(t)$ odgovara brzini naboja. Rješenje ovog problema u Lorentzovom baždarenju dano je Liénard-Wiechertovim (L-W) potencijalima V_M, $\mathbf{A}_M$:

$$V_M(x^\mu) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{sc - \mathbf{s}\cdot\mathbf{v}}, \quad \mathbf{A}_M(x^\mu) = \frac{\mathbf{v}}{c^2}V_M, \tag{1}$$

gdje je $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$ oznaka za točku prostorvremena, c je brzina svjetlosti, $\mathbf{s} = \mathbf{r}-\mathbf{w}(t_r)$, $s = |\mathbf{s}|$, i $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt}|_{t_r}$ je brzina točkastog naboja izvrijednjena u retardiranom vremenu t_r. Retardirano vrijeme definirano je implicitnom relacijom:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r). \tag{2}$$

Ovisnost potencijala (1) o retardiranom vremenu posljedica je konačnog vremena propagacije informacije o gibanju naboja, koja se širi brzinom svjetlosti (Slika 1a).



Slika 1 (a) Pojednostavljeni prikaz Minkowski prostorvremena sa svjetskom linijom naboja. Točka na svjetskoj liniji $w^\mu(t_r) = (ct_r, \mathbf{w}(\mathbf{t_r}))$ povezana je točkom x^μ linijom svjetlosnog tipa, koja predstavlja širenje signala informacije o gibanju naboja. (b) Zatvorena krivulja u parametarskom prostoru za sustav opisan Hamiltonijanom (8) prilikom adijabatske promjene smjera magnetskog polja. Berryjeva faza odgovara integralu koneksije po ∂S ili zakrivljenosti po S. Zakrivljenost ima radijalni smjer, analogno električnom polju mirnog naboja.

Električno i magnetsko polje slijede direktno iz L-W potencijala:

$$\mathbf{E}_M(x^\mu) = -\nabla V_M - \frac{\partial \mathbf{A}_M}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_M(x^\mu) = \nabla \times \mathbf{A}_M. \tag{3}$$

Donji indeks M označava da se radi o rješenju Maxwellovih jednadžbi. Detaljan izvod jednadžbi (1)-(3) dan je u [2, 3].

1.2 Berryjeva koneksija i zakrivljenost u kvantnoj adijabatskoj aproksimaciji

Teorija elektromagnetizma opisana u odjeljku 2 oslanja se na Berryjev račun koneksija i zakrivljenosti, koji je u originalnom članku [5] obavljen u kontekstu kvantne adijabatske aproksimacije. Zbog identičnog matematičkog formalizma, korisno je uspostaviti analogiju s originalnim problemom.

Neka je kvantni sustav opisan Hamiltonijanom $H(\mathbf{R}(\mathbf{t}))$, koji implicitno ovisi o vremenu preko skupa parametara $\mathbf{R}(\mathbf{t})$. Neka je $H_0(\mathbf{R}(t))$ vremenski neovisan Hamiltonijan koji odgovara $H(\mathbf{R}(t))$ zamrznutom u trenutku t i neka su $|n(t)\rangle$ i $E_n(t)$ pripadna svojstvena stanja i energije. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je u $t = 0$ sustav u svojstvenom stanju $|n(0)\rangle$ i da nema degeneracije u H_0. U specijalnom slučaju spore vremenske promjene parametara $\mathbf{R}(t)$ vrijedi adijabatska aproksimacija [5], pa je evolucija stanja sustava $|\psi\rangle$ opisana jednadžbom:

$$|\psi(t)\rangle = e^{\theta_n^D + \theta_n^G} |n(t)\rangle, \quad \theta_n^D = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t E(t')\, dt'. \tag{4}$$

Odnosno, sustav ostaje u istom svojstvenom stanju trenutnog H_0, do na fazni faktor. Osim dinamičke faze θ_n^D, koja je uvijek prisutna u evoluciji, sustav dobiva i dodatnu geometrijsku fazu θ_n^G, koja je definirana relacijom:

$$\theta_n^G = \int_{\mathbf{R(0)}}^{\mathbf{R(t)}} i\,\langle n(\mathbf{R})|\, \nabla_{\mathbf{R}}\, |n(\mathbf{R})\rangle \cdot d\mathbf{R}. \tag{5}$$

Geometrijska faza odgovara integralu *Berryjeve koneksije* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{i} \langle \mathbf{n}(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \mathbf{n}(\mathbf{R}) \rangle$ po krivulji u parametarskom prostoru. U posebnom slučaju kada se parametri sustava nakon evolucije vrate u početno stanje, krivulja integracije ∂S je zatvorena, i odgovara rubu neke plohe S. Linijski integral (5) može se tada pomoću Stokesovog teorema pretvoriti u površinski integral po S. U specijalnom slučaju, kada je parametarski prostor trodimenzionalan, vrijedi:

$$\theta_n^G = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{R} = \oiint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \equiv \oiint_S \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{a}. \tag{6}$$

Veličina $\mathbf{\Omega}$ odgovara *Berryjevoj zakrivljenosti*. U općenitom slučaju parametarskog prostora proizvoljne dimenzije, Berryjeva zakrivljenost definirana je kao antisimetrični tenzor:

$$\Omega_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{7}$$

U tri dimenzije se ova definicija svodi na rotaciju koneksije. Valja naglasiti da se prilikom promijene koordinatne baze parametara $R(t) \to R'(t)$ koneksija i zakrivljenost respektivno transformiraju kao vektor i tenzor 2. reda.

Promotrimo kvantni sustav magnetskog dipola u homogenom magnetskom polju $\mathbf{B}$, čiji smjer se može adijabatski mijenjati u vremenu. Hamiltonijan ovog sustava glasi:

$$H = \kappa \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \tag{8}$$

gdje konstanta κ opisuje jačinu interakcije s magnetskim poljem, a $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ su Paulijeve matrice. Može se pokazati [6] da Berryjeva zakrivljenost dobivena iz svojstvenih stanja ovog Hamiltonijana ima oblik koji je potpuno analogan električnom polju mirujućeg naboja:

$$\mathbf{\Omega} = \pm \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^3}, \tag{9}$$

gdje predznak zakrivljenosti ovisi o odabiru svojstvenog stanja. Rezultat je ilustriran na slici 1b. Zbog matematičke sličnosti, ovaj kvantni sustav poslužit će kao korisna analogija s teorijom opisanom ispod.

2 Formulacija teorije

Standardna teorija klasične elektrodinamike opisana Maxwellovim jednadžbama općenito dopušta kontinuirane raspodjele naboja. Singularnost i kvantizacija električnih naboja nisu intrinzična svojstva Maxwellovih jednadžbi, i kao takve ih je potrebno naknadno postulirati. Dirac je pokazao [4] da bi kvantizacija električnog naboja prirodno slijedila iz njegove interakcije s magnetskim monopolom u kvantnoj mehanici. No, postojanje magnetskog monopola nikada nije bilo eksperimentalno potvrđeno.

Za razliku od Diracovog članka, teorija [1] uvedena u ovom odjeljku potpuno je klasična, i ne oslanja se na postojanje magnetskog monopola. U njoj su dopušteni isključivo singularni naboji koji poprimaju dvije moguće vrijednosti: $\pm e$, gdje je e elementarni naboj (konvencionalno definiran kao pozitivna veličina). Teorija se bazira na relativističkoj Weylovoj jednadžbi u prostoru koji je inverzan prostorvremenu Minkowskog:

$$c \frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{\psi}_R(k^\mu; \rho^\nu) = -(\sigma_x \frac{\partial}{\partial k_x} + \sigma_y \frac{\partial}{\partial k_y} + \sigma_z \frac{\partial}{\partial k_z}) \tilde{\psi}_R(k^\mu; \rho^\nu), \tag{10}$$

gdje je $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ 4-vektor u inverznom prostoru, a σ_i su Paulijeve matrice. Jednadžba (10) predstavlja desni oblik Weylove jednadžbe, što je označeno indeksom R u $\tilde{\psi}_R(k^\mu; \rho^\nu)$. Lijeva Weylova jednadžba odgovara (10) s negativnim predznakom na lijevoj strani jednakosti. Obje Weylove jednadžbe koriste se u ovoj teoriji za dobivanje različitih rješenja, na način opisan u ostatku odjeljka.

Valna funkcija $\tilde{\psi}(k^\mu; \rho^\nu)$ je dvokomponentni spinor koji parametarski ovisi o vektoru ρ^ν, koji sadžri informaciju o koordinatama prostora i vremena i trajektoriji naboja (definiran ispod). U trenutnoj teoriji, $\tilde{\psi}(k^\mu; \rho^\nu)$ nema fizikalnu interpretaciju, i služi samo kao pomoćna funkcija za izračun Berryjeve koneksije i zakrivljenosti. Kako bi se (10) svela na algebarsku jednadžbu, korišten je ansatz:

$$\tilde{\psi}_R(k^\mu) = \psi_R(\rho^\mu)\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho} - i\frac{\omega}{c}\rho^0\right), \tag{11}$$

pri čemu je veličina $\rho^\mu = (\rho^0, \boldsymbol{\rho})$ 4-vektor definiran kao:

$$\rho^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu (x^\nu - w^\nu) \equiv \Lambda^\mu{}_\nu s^\nu, \tag{12}$$

gdje je $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$ točka prostorvremena u kojoj računamo polja, dok $w^\mu = (ct_c, \mathbf{w}(t_c))$ odgovara položaju naboja u trenutku t_c, odnosno opisuje svjetsku liniju naboja. $\Lambda^\mu{}_\nu$ predstavlja matricu Lorentzove transformacije koja ovisi o trajektoriji naboja na način koji će biti kasnije specificiran. Za sada zahtijevamo da ova transformacija pripada pravoj, ortokronoj Lorentzovoj grupi $SO^+(1,3)$ (Eng. *Restricted Lorentz group*). Uvrštavanjem (11) u (10) dobiva se svojstvena jednadžba:

$$H\psi_R(\rho^\mu) \equiv \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\rho}\psi_R(\rho^\mu) = \rho^0\psi_R(\rho^\mu). \tag{13}$$

Uvjet postojanja netrivijalnog rješenja jednadžbe (13) glasi $\rho^\mu\rho_\mu = 0$, odnosno vrijedi $\rho^0 = \pm|\boldsymbol{\rho}|$. Pripadna svojstvena stanja jednadžbe su $|\psi_{R,n}\rangle$ i $|\psi_{R,p}\rangle$, gdje indeksi p, n odgovaraju predznaku ρ^0. Uvjet $\rho^\mu\rho_\mu = 0$ implicira da je vektor ρ^μ svjetlosnog tipa. Vektori ρ^μ i s^μ povezani su Lorentzovom transformacijom (12). Općenita Lorentzova transformacija čuva normu 4-vektora, što znači da je i vektor s^μ svjetlosnog tipa: $s^0 = \pm|\mathbf{s}|$. Zbog zahtjeva da transformacija pripada $SO^+(1,3)$, ona čuva predznak vremenske komponente 4-vektora svjetlosnog tipa: $sgn(s^0) = sgn(\rho^0)$. Korištenjem ovih svojstava, zajedno s definicijom vektora s^μ, dobivaju se dvije moguće vrijednosti t_c:

$$t_c = t \pm \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_c)|. \tag{14}$$

Jednadžba (14) odgovara definiciji retardiranog vremena (2) u slučaju kada je $\rho^0 > 0$. Slučaj $\rho^0 < 0$ daje definiciju avansiranog vremena. Račun Berryjeve zakrivljenosti iz pripadnih funkcija $|\psi_{R,p}\rangle$ i $|\psi_{R,n}\rangle$ respektivno bi dao retardirana i avansirana rješenja Maxwellovih jednadžbi.

Primjenom identičnog računskog postupka na lijevu Weylovu jednadžbu dobivaju se funkcije $|\psi_{L,p}\rangle$ i $|\psi_{L,n}\rangle$. Iz lijeve i desne Weylove jednadžbe zajedno se dobivaju 4 rješenja: 2 retardirana i 2 avansirana. Zbog toga što avansirana rješenja nisu u skladu s kauzalnosti, u ovom radu su odbačena. Preostaju dva prihvatljiva rješenja: $|\psi_{L,p}\rangle$ i $|\psi_{R,p}\rangle$. Kao što će biti pokazano u odjeljku 3, zakrivljenosti dobivene pomoću njih respektivno odgovaraju elektromagnetskim poljima pozitivnog i negativnog točkastog naboja. Zato nadalje uvodimo pojednostavljenu notaciju $|\psi_-\rangle \equiv |\psi_{R,p}\rangle$, $|\psi_+\rangle \equiv |\psi_{L,p}\rangle$.

Lorentzova transformacija Λ u definiciji (12) ovisi o brzinama i akceleracijama singulariteta izvrijednjenim u vremenu t_c, što se svodi na ovisnost o t_r za kauzalna rješenja. Transformacija ima oblik $\Lambda = RB$, gdje $B(\mathbf{v})$ odgovara čistom Lorentzovom potisku definiranim brzinom naboja $\mathbf{v}(t_r)$, a $R(\boldsymbol{\theta}) = e^{i(\theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z)}$ je rotacija koja ovisi o brzini i akceleraciji naboja. Operatori J_i odgovaraju generatorima rotacije, dok je $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ definiran u integralnom smislu na slijedeći način:

$$\boldsymbol{\theta}(t_r) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \int^{t_r} (\boldsymbol{\omega}_{Th}(t') \cdot \hat{\mathbf{n}}) dt' \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{Th}(t') = \frac{1}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\mathbf{a}(t') \times \mathbf{v}(t')). \tag{16}$$

Izraz (16) odgovara *Thomasovoj precesiji* [8], gdje su $\mathbf{v}$ i $\mathbf{a}$ brzina i akceleracija naboja i $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Vektor $\hat{\mathbf{n}}$ predstavlja jedinični vektor smjera okomit na ravninu koju čine $\mathbf{a}(t_r)$ i $\mathbf{v}(t_r)$. U odjeljku 3 biti će pokazano da elektromagnetska polja ne ovise eksplicitno o $\boldsymbol{\theta}$, već isključivo o njegovoj derivaciji po retardiranom vremenu $d\boldsymbol{\theta}(t_r)/dt_r = \boldsymbol{\omega}_{Th}(t_r)$. U slučaju gibanja po pravcu vrijedi $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = 0$ i Lorentzova transformacija se svodi na čisti potisak. U slučaju 2D gibanja u ravnini se definicija $\boldsymbol{\theta}$ pojednostavljuje u:

$$\boldsymbol{\theta}(t_r) = \int^{t_r} \boldsymbol{\omega}_{Th}(t') dt'. \tag{17}$$

Primijetimo da je ovisnost Λ o retardiranom vremenu posljedica odabira retardiranih rješenja. Kada bi nas zanimala avansirana rješenja, potrebno bi bilo svugdje u definiciji Λ zamijeniti t_r s t_a.

Jednom kada su izračunata svojstvena stanja $|\psi_+\rangle$, $|\psi_-\rangle$, iz njih se može dobiti Berryjeva koneksija, čije se komponente u teoriji identificiraju kao vektorski i skalarni potencijal:

$$\mathbf{A} = i\langle\psi|\nabla|\psi\rangle, \quad V = -\frac{1}{c^2} i\langle\psi|\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle. \tag{18}$$

Valja naglasiti da su ovi potencijali bitno različiti od L-W potencijala $\mathbf{A_M}$, V_M iz Maxwellove teorije. Računom Berryjeve zakrivljenosti iz koneksije dobivaju se električno i magnetsko polje naboja:

$$\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{19}$$

Polja (19) se od polja točkastog naboja iz Maxwellove teorije razlikuju samo u globalnoj multiplikativnoj konstanti:

$$\mathbf{E}_M = \frac{e}{2\pi\epsilon_0} \mathbf{E}, \ \mathbf{B}_M = \frac{e}{2\pi\epsilon_0} \mathbf{B}, \tag{20}$$

gdje je ϵ_0 električna permitivnost vakuuma. Ova konstanta je fiksirana unutar teorije. Primijetimo da je električno polje definirano kao rotacija koneksije. Matematički identitet $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$ implicira da kontinuirana gustoća naboja u prostoru nužno iščezava, i jedini prihvatljivi izvori ostaju singulariteti za koje taj identitet ne vrijedi. Postuliranjem principa superpozicije na koneksije, teorija se može generalizirati na proizvoljni broj singulariteta. Kvantizacija naboja posljedica je Chernovog teorema [7] i detaljnije je diskutirana u [1].

Promotrimo nekoliko specijalnih slučajeva trajektorije naboja. U slučaju mirnog naboja koji se nalazi u točki $\mathbf{w}$, Hamiltonijan (13) svodi se na oblik analogan

(8). Kao što je i očekivano, račun zakrivljenosti daje električno polje oblika analognog s (9), dok magnetsko polje iščezava:

$$\mathbf{E} = \pm\frac{1}{2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{w}}{|\mathbf{r}-\mathbf{w}|^3},\ \mathbf{B} = 0; \tag{21}$$

ova polja odgovaraju poljima mirujućeg naboja do na multiplikativnu konstantu. Predznak polja posljedica je izbora funkcije $|\psi_+\rangle$ ili $|\psi_-\rangle$ pri računu zakrivljenosti.

Promotrimo slijedeće slučaj naboja koji se giba konstantnom brzinom. Zbog rotacione simetrije može se bez gubitka općenitosti uzeti da se naboj giba po z osi. Hamiltonijan (13) tada ima oblik:

$$H = x\sigma_x + y\sigma_y + \gamma(z - v_z t)\sigma_z. \tag{22}$$

Računom zakrivljenosti (odjeljak 3.1) dobivaju se polja:

$$\mathbf{E} = \pm\frac{1}{2}\frac{\gamma(\mathbf{r}-v_z t\hat{\mathbf{z}})}{\left[x^2+y^2+\gamma^2(z-v_z t)^2\right]^{3/2}},\ \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}v_z\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}, \tag{23}$$

koja su konzistentna s rješenjem Maxwellovih jednadžbi. Ovo nije iznenađujuće jer je (22) samo Lorentz potisnuta verzija Hamiltonijana za mirujući naboj. No, ono što nije trivijalno očito je da se (22) lako može generalizirati i na slučaj akceleriranog gibanja po pravcu. Slijedeći definiciju, Hamiltonijan općenitog, akceleriranog gibanja po z osi glasi:

$$H = x\sigma_x + y\sigma_y + \gamma(t_r)(z - w_z(t_r) - v_z(t_r)(t-t_r))\sigma_z. \tag{24}$$

Zakrivljenost za ovaj slučaj izračunata je u odjeljku 3.2, i njene komponente savršeno se slažu s poljima dobivenih pomoću Maxwellovih jednadžbi.

Hamiltonijan općenitog 2D gibanja u ravnini bitno je kompliciraniji od 1D slučaja zbog prisutnosti rotacije, odnosno Thomasove precesije. Unatoč tome, račun zakrivljenosti egzaktno reproducira rješenja Maxwellovih jednadžbi [2]:

$$\mathbf{E} = \pm\frac{1}{2}\frac{s}{(\mathbf{s}\cdot\mathbf{u})^3}\left[(c^2-v^2)\mathbf{u} + \mathbf{s}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{a})\right],\ \mathbf{B} = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{s}}\times\mathbf{E}, \tag{25}$$

gdje su uvedene pokrate $\mathbf{s} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)$, $s = |\mathbf{s}|$, $\mathbf{u} \equiv c\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{v}(t_r)$. Podrazumijeva se da su sve brzine i akceleracije u (25) izvrijednjene u retardiranom vremenu. Zbog kompleksnosti 2D računa, u odjeljku 3.3 je on obavljen samo za z komponentu električnog polja. Račun preostalih komponenti mogao bi se analitički obaviti na potpuno analogan način, i numerički je potvrđeno da daje točne rezultate.

Usporedbom s Maxwellovom teorijom [2], možemo primijetiti da izraz (25) ne daje točna polja samo u slučaju gibanja u ravnini, već i za općenitu 3D putanju naboja. Razlog je to što polja u točki prostorvremena x^μ ovise samo o brzini i akceleraciji naboja u jednoj retardiranoj točki putanje, a svaki dio putanje lokalno izgleda kao 2D krivulja. Zamislimo česticu koja se giba po 2D putanji takvoj da su joj brzina i akceleracija izvrijedneni u t_r identični brzini i akceleraciji čestice koja se giba po 3D putanji. Signal koji se širi u x^μ iz retardirane točke putanje biti če isti za obje čestice, rezultirajući identičnim poljima u x^μ. Zbog ove lokalne sličnosti putanja će Hamiltonijan za općenitu 3D putanju imati isti oblik kao za gibanje u ravnini, do na jednu razliku: definiciju kuta $\boldsymbol{\theta}$. U slučaju 2D gibanja je $\boldsymbol{\theta}$ po definiciji (17) uvijek okomit na ravninu gibanja. No, kada bi naivno postulirali da (17) vrijedi i za općenitu putanju, ova okomitost ne bi bila zadovoljena jer vektor

Thomasove kutne brzine u integrandi može mijenjati smjer tijekom gibanja, što vodi do desinkronizacije smjerova $\boldsymbol{\theta}$ i $\boldsymbol{\omega}_{Th}$. Zato je u općenitoj definiciji (15) potrebno projicirati $\boldsymbol{\theta}$ tako da uvijek bude okomit na ravninu gibanja u retardiranoj točki. Numerička provjera potvrđuje da ovakva generalizacija daje točna polja za proizvoljnu 3D putanju naboja.

Preostaje još pitanje Lorentz kovarijantnosti ove teorije. Promotrimo dva inercijalna sustava: S i S', s pripadnim necrtanim i crtanim koordinatama. Hamiltonijan u sustavu S izražen je preko necrtanih koordinata, i oblika je (13). Metodom računa koneksije i zakrivljenosti iz njega se dobivaju polja $\mathbf{E}(t,\mathbf{r})$ i $\mathbf{B}(t,\mathbf{r})$. Transformacijom u sustav S' dobio bi se Hamiltonijan ovisan o crtanim koordinatama, iz kojeg bi se računom zakrivljenosti (deriviranjem po crtanim koordinatama) na identičan način dobila polja $\mathbf{E}'(t',\mathbf{r}')$ i $\mathbf{B}'(t',\mathbf{r}')$. Važno je primijetiti da dobivena polja odgovaraju rješenjima Maxwellovih jednadžbi u bilo kojem sustavu (Račun je matematički potpuno ekvivalentan, i nema razloga da sustav S bude poseban). Maxwellove jednadžbe su Lorentz kovarijantne, pa je zbog identičnih rezultata i ovako konstruirana teorija također kovarijantna.

3 Eksplicitni račun Berryjeve zakrivljenosti

3.1 Gibanje konstantnom brzinom

Kako bi ujedinili račun polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ u jednu proceduru, korisno je definirati vektor koneksije A_μ i antisimetrični tenzor zakrivljenosti $\Omega_{\mu\nu}$ na slijedeći način:

$$A_\mu = i\langle\psi|\partial_\mu|\psi\rangle, \tag{26}$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{27}$$

Indeksi μ,ν označavaju komponente odabrane koordinatne baze. Uvodimo dva značajna izbora koordinatne baze: $b' = \{-c^2 t, \rho^1, \rho^2, \rho^3\}$ i $b = \{-c^2 t, x, y, z\}$. Komponente tenzora u ovim bazama biti će označene crtanim i necrtanim indeksima, respektivno. Lako se može potvrditi da je komponente tenzora zakrivljenosti u bazi b moguće identificirati kao polja definirana u (19) na slijedeći način:

$$B_i = \Omega_{i0}, \quad \epsilon_{ijk}E_k = \Omega_{ij}, \tag{28}$$

gdje je ϵ_{ijk} Levi-Civita simbol i Latinski indeksi idu od 1 do 3. S druge strane, baza b' sadrži prirodne koordinate Hamiltonijana (13): ρ^1, ρ^2, i ρ^3. Zato će izrazi za komponente koneksije i zakrivljenosti u ovoj bazi imati vrlo jednostavnu formu.

Računska procedura koju koristimo prvo zahtijeva dobivanje komponenti koneksije ili zakrivljenosti u crtanoj bazi, nakon čega se necrtane komponente računaju standardnim tenzorskim transformacijama pri promjeni baze. Svojstvena stanja $|\psi_+\rangle$ i $|\psi_-\rangle$ dobivena iz (13) (i pripadne lijeve Weylove jednadžbe) glase:

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Ovdje su korištene polarne koordinate za zapis vektora $\boldsymbol{\rho}$, čije komponente su parametrizirane kao $\rho^1 = \rho\sin\theta\cos\phi$, $\rho^2 = \rho\sin\theta\sin\phi$ i $\rho^3 = \rho\cos\theta$. Nadalje ćemo proučavati isključivo rezultate dobivene pomoću $|\psi_+\rangle$, jer se potpuno analogan tačun može napraviti za $|\psi_-\rangle$, za koji bi jedina razlika u rezultirajućim poljima bila promjena predznaka. Nakon uvrštavanja $|\psi_+\rangle$ u (26) i vraćanja natrag u Kartezijeve koordinate, dobivamo komponente koneksije:

$$\begin{aligned} A_{0'} &= A_{3'} = 0, \\ A_{1'} &= \frac{1}{2}\frac{-\rho^2}{(\rho^1)^2 + (\rho^2)^2}\left(1 - \frac{\rho^3}{|\boldsymbol{\rho}|}\right), \\ A_{2'} &= \frac{1}{2}\frac{\rho^1}{(\rho^1)^2 + (\rho^2)^2}\left(1 - \frac{\rho^3}{|\boldsymbol{\rho}|}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Valja napomenuti da ova koneksija divergira na negativnom djelu ρ^3 osi. Ovo je poznati rezultat koji kaže da su dvije koneksije potrebne kako bi pokrile parametarski prostor u cijelosti (detaljnije opisano u [9]). Druga koneksija dobivena je korištenjem drugačijeg baždarenja, koje je ekvivalentno množenju $|\psi_+\rangle$ s faznim faktorom; moguće je odabrati baždarenje takvo da koneksija divergira na pozitivnom djelu ρ^3 osi. Ove dvije koneksije su tada povezane baždarnom transformacijom na djelu parametarskog prostora gdje im se domene preklapaju.

Promotrimo rješenje za najjednostavniji oblik trajektorije: 1D gibanje konstantnom brzinom po z osi, koje je opisano Hamiltonijanom (22). Korištenjem (30) i relacija $\rho^1 = x$, $\rho^2 = y$, $\rho^3 = \gamma(z - vt)$, dobivamo komponente koneksije u necrtanoj bazi:

$$A_\mu = \frac{\partial b^{\nu'}}{\partial b^\mu} A_{\nu'} \rightarrow A_0 = A_3 = 0,\ A_1 = A_{1'},\ A_2 = A_{2'}, \tag{31}$$

gdje $b^{\nu'}$ and b^μ respektivno označavaju koordinate crtane i necrtane baze. Slijeđenjem definicije zakrivljenosti (27) i identifikacijom polja pomoću (28), dolazimo do elektromagnetskih polja:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\frac{\gamma(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)}{\left[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2\right]^{3/2}}, \tag{32}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2c^2}\frac{\gamma v_z \hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{r}}{\left[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v} \times \mathbf{E}, \tag{33}$$

koja su identična poljima naboja koji se giba konstantnom brzinom u Maxwellovoj teoriji, do na multiplikativnu konstantu $q/2\pi\epsilon_0$.

3.2 Općenito gibanje po pravcu (Bremsstrahlung)

U ovom odjeljku je demonstrirana generalizacija rezultata iz 3.1 dopuštanjem općenite vremenske ovisnosti brzine naboja. Pri tome se još uvijek ograničavamo na gibanje po pravcu, odnosno z osi. Hamiltonijan koji opisuje generalno gibanje po z osi dan je s (24).

Radi jednostavnosti, koristit ćemo modificiranu verziju procedure iz odjeljka 3.1. Umjesto transformiranja vektora koneksije i njegovog korištenja za izračun $\Omega_{\mu\nu}$, ovdje prvo računamo tenzor zakrivljenosti $\Omega_{\mu'\nu'}$ te zatim radimo transformaciju baze. Ova metoda je matematički ekvivalentna prijašnjoj, ali je u tehničkom smislu mnogo jednostavnija. Korištenjem (30) i definicije (27), dobivamo zakrivljenost:

$$\Omega_{i'j'} = \frac{1}{2}\epsilon_{i'j'k'}\frac{\rho^{k'}}{|\boldsymbol{\rho}|^3}, \tag{34}$$

dok ostale komponente zakrivljenosti iščezavaju. Korištenjem pravila transformacije tenzora, kao i činjenice da $\Omega_{0'\nu'}$ i $\Omega_{\mu'0'}$ iščezavaju, dobivamo komponente zakrivljenosti potrebne za identifikaciju polja:

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial\rho^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial\rho^{j'}}{\partial x^j}\Omega_{i'j'}, \qquad \Omega_{i0} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\rho^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial\rho^{j'}}{\partial t}\Omega_{i'j'}. \tag{35}$$

Ovdje x^i označavaju prostorne koordinate $\{x, y, z\}$, dok $\rho^{i'}$ označavaju $\{\rho^1, \rho^2, \rho^3\}$. U slučaju 1D gibanja, ova transformacija se dodatno pojednostavljuje zbog trivijalnih veza $\rho^1 = x$ i $\rho^2 = y$. Za razliku od specijalnog slučaja konstantne brzine u prijašnjem odjeljku, koordinata $\rho^3 = \gamma(t_r)[z - w_z(t_r) - v_z(t_r)(t - t_r)]$ je funkcija i vremena i svih prostornih koordinata zbog ovisnosti o retardiranom vremenu. Koristeći (35) i identificirajući polja pomoću (28), dolazimo do izraza za polja:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial\rho^3}{\partial z}\Omega_{2'3'}, & B_x &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\rho^3}{\partial t}\Omega_{1'3'}, \\ E_y &= \frac{\partial\rho^3}{\partial z}\Omega_{3'1'}, & B_y &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\rho^3}{\partial t}\Omega_{2'3'}, \\ E_z &= \Omega_{1'2'} - \frac{\partial\rho^3}{\partial y}\Omega_{3'1'} - \frac{\partial\rho^3}{\partial x}\Omega_{2'3'}, & B_z &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Koordinata ρ^3 eksplicitno ovisi o z i t, ali ima i dodatnu ovisnost o $\{t, x, y, z\}$ preko t_r. Korištenjem pravila za lančano deriviranje, kao i identiteta (34), izrazi za polja postaju:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2}\frac{x}{|\boldsymbol{\rho}|^3}\left[\gamma + \frac{\partial t_r}{\partial z}\frac{\partial\rho^3}{\partial t_r}\right], & B_x &= \frac{1}{2c^2}\frac{y}{|\boldsymbol{\rho}|^3}\left[-\gamma v_z + \frac{\partial t_r}{\partial t}\frac{\partial\rho^3}{\partial t_r}\right], \\ E_y &= \frac{1}{2}\frac{y}{|\boldsymbol{\rho}|^3}\left[\gamma + \frac{\partial t_r}{\partial z}\frac{\partial\rho^3}{\partial t_r}\right], & B_y &= \frac{1}{2c^2}\frac{-x}{|\boldsymbol{\rho}|^3}\left[-\gamma v_z + \frac{\partial t_r}{\partial t}\frac{\partial\rho^3}{\partial t_r}\right], \\ E_z &= \frac{1}{2}\frac{1}{|\boldsymbol{\rho}|^3}\left[\rho^3 - \left(y\frac{\partial t_r}{\partial y} + x\frac{\partial t_r}{\partial x}\right)\frac{\partial\rho^3}{\partial t_r}\right], & B_z &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Potrebne derivacije dane su ispod. Derivacije retardiranog vremena dobivene su implicitnim deriviranjem njegove definicijske relacije $c(t - t_r) = |\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)|$:

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{s}{s - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{s}}, \quad \frac{\partial t_r}{\partial x^i} = -\frac{1}{c}\frac{s^i}{s - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{s}}, \quad \frac{\partial\rho^3}{\partial t_r} = -\frac{1}{c}\gamma^3 a_z\left[s - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{s}\right], \tag{38}$$

gdje vektor $\boldsymbol{s}$ predstavlja prostorni dio s^μ, $s \equiv |\boldsymbol{s}|$ i $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Kako bi eliminirali $|\boldsymbol{\rho}|$ u nazivniku, koristimo identitet:

$$|\boldsymbol{\rho}| = \rho^0 = \gamma(s - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{s}), \tag{39}$$

koji vrijedi za retardirana rješenja. Uvrštavanjem rezultata (38) i (39) u (37) i prebacivanjem u standardnu vektorsku notaciju, konačni izraz za polja glasi:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\frac{s}{(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u})^3}\left[(c^2 - v_z^2)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{s}\times(c\hat{\boldsymbol{s}}\times(a_z\hat{\boldsymbol{z}}))\right], \tag{40}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{s}}\times\mathbf{E}, \tag{41}$$

uz pokratu $\mathbf{u} \equiv c\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{v}(t_r)$. Ova polja podudaraju se s poljima dobivenim iz Maxwellovih jednadžbi za 1D gibanje, do na multiplikativnu konstantu $q/2\pi\epsilon_0$.

3.3 Općenito gibanje u ravnini

U ovom odjeljku promatramo općenito 2D gibanje naboja u xy ravnini. Račun je identičan onom u 3.2 jer su jednadžbe (35) jednako valjane. Radi jednostavnosti, ovdje je demonstriran samo račun komponente polja E_z; ostale komponente mogu se dobiti potpuno analognim postupkom. Lorentzova transformacija Λ koja povezuje 4-vektore ρ^μ i s^μ (izraz (12)), sada odgovara umnošku potiska i rotacije $\Lambda = RB$. Konkretno, matrica transformacije dana je s:

$$\begin{pmatrix}\rho^0\\ \rho^1\\ \rho^2\\ \rho^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & C & S & 0\\ 0 & -S & C & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & 0\\ -\gamma\beta_x & \epsilon_x & \delta & 0\\ -\gamma\beta_y & \delta & \epsilon_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s^0\\ s^1\\ s^2\\ s^3\end{pmatrix}. \tag{42}$$

Ovdje su uvedene pokrate: $\epsilon_i \equiv 1 + (\gamma - 1)\beta_i^2/\boldsymbol{\beta}^2$, $\delta \equiv (\gamma - 1)\beta_x\beta_y/\boldsymbol{\beta}^2$, $S \equiv \sin\theta_z$ i $C \equiv \cos\theta_z$. Kut rotacije je $\theta_z(t_r) = \int^{t_r} \omega_{Th}(t')dt'$, gdje je Thomasova kutna brzina okomita na xy ravninu: $\boldsymbol{\omega}_{Th}(t') = \omega_{Th}(t')\hat{\mathbf{z}}$. Kao što će biti pokazano, konačna polja ne ovise o θ_z, već isključivo o njegovoj derivaciji $\frac{d\theta_z}{dt_r} = \omega_{Th}(t_r) = \frac{1}{c^2}\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(a_x v_y - v_x a_y)$. Ovo svojstvo u skladu je s Maxwellovom teorijom, gdje polja u x^μ ovise isključivo o brzini i akceleraciji naboja u jednoj (retardiranoj) točki prostorvremena. Bilo kakva eksplicitna ovisnost o θ_z narušavala bi ovo svojstvo, jer θ_z sadrži "povijest" gibanja unutar integralne definicije.

Radi kasnije usporedbe, ovdje pišemo izraz za komponentu E_z dobivenu iz Maxwellovih jednadžbi za 2D gibanje u xy ravnini:

$$E_z = \frac{1}{2}\frac{z}{\gamma^3\alpha^3}\left[\gamma + \frac{1}{c^2}\gamma^3\left(a_x s^1 + a_y s^2\right)\right], \tag{43}$$

gdje je $s = s^0 = |\boldsymbol{s}|$, te je uvedena pokrata $\alpha \equiv s - \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\beta}$. Zbog razloga koji će kasnije biti jasan, korisno je (43) zapisati tako da se drugi član u uglatoj zagradi proširi s $\alpha/\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} E_z = \frac{1}{2}\frac{z}{\gamma^3\alpha^3}\Big[\gamma + \frac{1}{c^2\alpha}\gamma^3\Big(&a_x s^1 s^0 + a_y s^2 s^0 - a_x\beta_x (s^1)^2 - a_y\beta_y (s^2)^2 \\ &- (a_x\beta_y + a_y\beta_x)s^1 s^2\Big)\Big] \equiv \frac{1}{2}\frac{z}{\gamma^3\alpha^3}(\star\star), \end{aligned} \tag{44}$$

gdje simbol $(\star\star)$ označava sadržaj uglate zagrade.

Vratimo se sada originalnom problemu. Komponente vektora $\boldsymbol{\rho}$ su:

$$\begin{aligned} \rho^1 &= -\gamma(C\beta_x + S\beta_y)s^0 + (C\epsilon_x + S\delta)s^1 + (C\delta + S\epsilon_y)s^2 && (45)\\ &\equiv \rho^{1(0)}s^0 + \rho^{1(1)}s^1 + \rho^{1(2)}s^2, \\ \rho^2 &= -\gamma(-S\beta_x + C\beta_y)s^0 + (-S\epsilon_x + C\delta)s^1 + (-S\delta + C\epsilon_y)s^2 && (46)\\ &\equiv \rho^{2(0)}s^0 + \rho^{2(1)}s^1 + \rho^{2(2)}s^2, \\ \rho^3 &= s^3 = z. && (47) \end{aligned}$$

Ovdje su koeficijenti $\rho^{i(j)}$ uvedeni kao pokrate za članove koji množe s^0, s^1 i s^2: $\rho^{1(0)} = -\gamma(C\beta_x + S\beta_y)$, $\rho^{1(1)} = C\epsilon_x + S\delta$, itd. Kako bi izračunali E_z, koristimo jednadžbu (35) za Ω_{12}. U tom slučaju preživljavaju samo dva člana:

$$E_z = \left(\frac{\partial\rho^1}{\partial x}\frac{\partial\rho^2}{\partial y} - \frac{\partial\rho^2}{\partial x}\frac{\partial\rho^1}{\partial y}\right)\Omega_{1'2'} = \frac{1}{2}\frac{z}{\gamma^3\alpha^3}\left(\frac{\partial\rho^1}{\partial x}\frac{\partial\rho^2}{\partial y} - \frac{\partial\rho^2}{\partial x}\frac{\partial\rho^1}{\partial y}\right) \equiv \frac{1}{2}\frac{z}{\gamma^3\alpha^3}(\star); \tag{48}$$

ρ^1 i ρ^2 ovise o x i y eksplicitno kroz s^1 i s^2, ali sadrže i dodatnu ovisnost zbog prisutnosti t_r. Korištenjem pravila za lančano deriviranje, dobivamo:

$$(\star) = \left[\rho^{1(1)} + \frac{\partial t_r}{\partial x}\dot{\rho}^1\right]\left[\rho^{2(2)} + \frac{\partial t_r}{\partial y}\dot{\rho}^2\right] - \left[\rho^{1(2)} + \frac{\partial t_r}{\partial y}\dot{\rho}^1\right]\left[\rho^{2(1)} + \frac{\partial t_r}{\partial x}\dot{\rho}^2\right] \tag{49}$$

$$= \left[\rho^{1(1)}\rho^{2(2)} - \rho^{1(2)}\rho^{2(1)}\right] + \dot{\rho}^1\left[\frac{\partial t_r}{\partial x}\rho^{2(2)} - \frac{\partial t_r}{\partial y}\rho^{2(1)}\right] + \dot{\rho}^2\left[\frac{\partial t_r}{\partial y}\rho^{1(1)} - \frac{\partial t_r}{\partial x}\rho^{1(2)}\right], \tag{50}$$

gdje točka iznad simbola označava derivaciju po retardiranom vremenu. Prva uglata zagrada u (50) jednaka je γ. Derivacije ρ^1 i ρ^2 po t_r iznose:

$$\dot{\rho}^j = \dot{\rho^{j(0)}}s^0 + \dot{\rho^{j(1)}}s^1 + \dot{\rho^{j(2)}}s^2 - c[\rho^{j(0)} + \beta_x\rho^{j(1)} + \beta_y\rho^{j(2)}],\ j \in \{1,2\}. \tag{51}$$

Derivacije t_r po x i y dane su u (38). Nakon uvrštavanja (51) i (38) u (50), članovi unutar uglatih zagrada u (51) egzaktno se pokrate. Grupirajući preživjele članove, dolazimo do izraza:

$$\begin{aligned}(\star) = \gamma + \frac{1}{c\alpha}\Big(&[\dot{\rho^{2(0)}}\rho^{1(2)} - \dot{\rho^{1(0)}}\rho^{2(2)}]s^1s^0 + [\dot{\rho^{1(0)}}\rho^{2(1)} - \dot{\rho^{2(0)}}\rho^{1(1)}]s^2s^0 + \\ &[\dot{\rho^{2(1)}}\rho^{1(2)} - \dot{\rho^{1(1)}}\rho^{2(2)}](s^1)^2 + [\dot{\rho^{1(2)}}\rho^{2(1)} - \dot{\rho^{2(2)}}\rho^{1(1)}](s^2)^2 + \\ &[\dot{\rho^{1(1)}}\rho^{2(1)} - \dot{\rho^{1(2)}}\rho^{2(2)} + \dot{\rho^{2(2)}}\rho^{1(2)} - \dot{\rho^{2(1)}}\rho^{1(1)}]s^1s^2\Big).\end{aligned} \tag{52}$$

Uspoređujući (44) i (48), cilj nam je pokazati da su $(\star)$ i $(\star\star)$ jednaki. Unutar njihovih definicija, s^0, s^1 i s^2 su jedine veličine koje sadrže eksplicitnu ovisnost o x ili y. Dakle, kako bi $(\star)$ i $(\star\star)$ bili jednaki za proizvoljno odabranu točku prostorvremena, koeficijenti $C_{\mu\nu}$ koji množe produkte $s^\mu s^\nu$ moraju biti jednaki u oba izraza. Valja naglasiti da indeksna notacija ovih koeficijenata nema veze s tenzorskom notacijom, već samo služi da označi koji koeficijent pripada kojem produktu. Usporedbom individualnih koeficijenata se problem efektivno podijelio na 5 manjih problema, od kojih se svi rješavaju na analogan način. Za demonstraciju, promotrimo koeficijent koji množi s^1s^0, koji iznosi:

$$C_{10} = \frac{1}{c\alpha}[\dot{\rho^{2(0)}}\rho^{1(2)} - \dot{\rho^{1(0)}}\rho^{2(2)}] \tag{53}$$

$$= \frac{1}{c\alpha}\left[(C\delta + S\epsilon_y)\frac{d}{dt_r}(\gamma(S\beta_x - C\beta_y)) + (-S\delta + C\epsilon_y)\frac{d}{dt_r}(\gamma(C\beta_x + S\beta_y))\right] \tag{54}$$

$$= \frac{1}{c\alpha}\left[\gamma^2\beta_y(\dot{S}C - S\dot{C}) + \left(\epsilon_y\frac{d}{dt_r}(\gamma\beta_x) - \delta\frac{d}{dt_r}(\gamma\beta_y)\right)\right]. \tag{55}$$

Kao što je očekivano, veličina $\dot{S}C - S\dot{C}$ koja se pojavljuje u konačnom izrazu jednaka je $\omega_{Th} = d\theta_z/dt_r$, dok se svi članovi koji eksplicitno ovise o θ_z egzaktno pokrate. Odnosno, konačni rezultat ovisi isključivo o derivaciji kuta θ_z, bez ovisnosti o njemu samome. Preostale funkcije u (55) ovise o t_r preko β_x i β_y. Računom derivacija pomoću lančanog pravila i uvrštavanjem definicije ω_{Th} dobiva se konačni izraz za C_{10}:

$$C_{10} = \frac{\gamma^3}{c^2\alpha}a_x, \tag{56}$$

koji egzaktno odgovara pripadnom koeficijentu u $(\star\star)$. Analogna procedura može se obaviti za preostala 4 koeficijenta, vodeći do konačnog zaključka da su izrazi za E_z u obje teorije zaista jednaki.

4 Zaključak

U ovom radu prezentirana je alternativna teorija klasične mehanike koja dopušta isljučivo singularne, kvantizirane naboje. Računom Berryjeve koneksije i zakrivljenosti iz rješenja Weylove jednadžbe pokazano je da teorija reproducira identična elektromagnetska polja gibajućeg naboja kao i Maxwellove jednadžbe. Račun je eksplicitno obavljen za općenite slučajeve gibanja naboja po pravcu i unutar ravnine, dok je generalizacija na općenitu 3D putanju napravljena kvalitativnom argumentacijom, i potvrđena numeričkim računom.

Literatura

[1] B. Golik, D. Jukić, H. Buljan, *Theory of classical electrodynamics with topologically quantized singularities as electric charges*, arXiv:2311.14771

[2] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* (Pearson, London, 2013).

[3] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley and Sons, New York, 1999)

[4] P. A. M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. R. Soc. London **A133**, 60 (1931).

[5] M. V. Berry, *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*, Proc. R. Soc. London A 392, 45 (1984).

[6] D. Xiao, et al., *Berry Phase Effects on Electronic Properties*, arXiv:0907.2021

[7] Shiing-Shen Chern, *A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Rie- mannian Manifolds*, The Annals of Mathematics 45, 747 (1944).

[8] L.H. Thomas B.A., *The kinematics of an electron with an axis*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **3**, 1 (1927).

[9] T.T. Wu and C.N. Yang, *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*, Phys. Rev.D **12**, 3845 (1975).