

# Formiranje Schrödingerovih "cat-stanja" u nano-elektromehaničkim sustavima

Matija Tečer<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

Mentor: izv. prof. dr. sc. Danko Radić<sup>1</sup>

23. siječnja 2021.

---

**Sažetak** Kohrentnim tuneliranjem Cooperovih parova na kvantnu supravodljivu točku postavljenu između dva supravodljiva kontakta, tako da može harmonički oscilirati između njih, dolazi do ispreplitanja električnih i mehaničkih stupnjeva slobode na poseban način. Populaciju elektronskog naboja na kvantnoj točki, u posebnim uvjetima, moguće je opisati kao dvorazinski kvantni sustav, tj. qubit. Gibanjem kvantne točke između supravodljivih kontakata dolazi do ispreplitanja qubitnih (električnih) kvantnih stanja s (mehaničkim) kvantnim stanjima harmoničkog oscilatora. U ovom seminaru pokazano je kako uz prikladan protokol, manipuliranjem prednapona između supravodljivih kontakata, vremenska evolucija ovog sustava vodi na pojavu tzv. Schrödingerovih "cat-stanja" vrlo važnih u modernoj teoriji kvantne komunikacije.

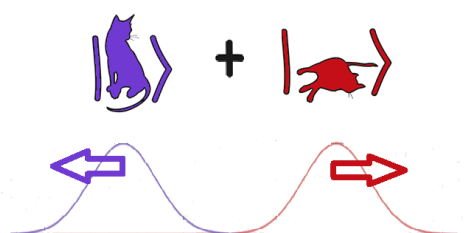
---

## 1 Uvod

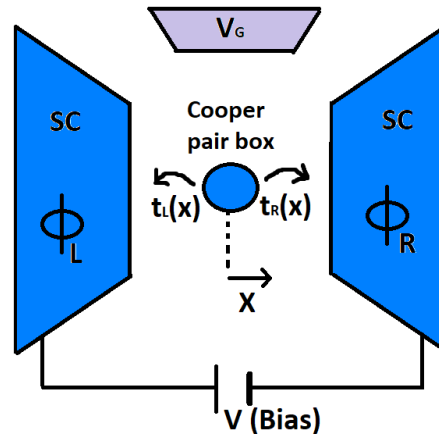
Još od slavnog Schrödingerovog misaonog eksperimenta 'Schrödingerove mačke' postavlja se pitanje je li moguće stvoriti kvantnu superpoziciju makroskopskih stanja. Naime, misaoni eksperiment pretpostavlja da je mačka zatvorena u metalnu kutiju s otrovom u bočici koja je "povezana" s atomom koji se nalazi u nestabilnom (pobuđenom) stanju. Dekontaminacija atoma u niže stanje pokreće lančanu reakciju koja uzrokuje puštanje otrova u kutiju, a time i lošu sudbinu za mačku. Budući da se atom nalazi u superpoziciji osnovnog stanja  $|g\rangle$  (što povlači smrt mačke) i ekscitiranog stanja  $|e\rangle$  (mačka ostaje živa), ovo "isprepletano" stanje mačke i atoma može se prikazati kao:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|M\rangle + |1\rangle|Z\rangle) \quad (1)$$

gdje smo s  $|M\rangle$  označili stanje mrtve mačke, a s  $|Z\rangle$  stanje žive mačke. No, zbog interakcije s okolinom ovo stanje vrlo kratko traje, tj. dolazi do dekoherencije i nedijagonalni članovi matrice gustoće  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  nestaju te se dobiva ansambl stanja mačka-atom, a ne kvantna superpozicija [1]. Stoga se postavlja pitanje, je li moguće stvoriti opažljivu kvantnu superpoziciju



Slika 1. Cat-stanja: Superpozicija koherentnih stanja



**Slika 2. Shematski prikaz sustava:** Supravodljiva kvantna točka harmonički titra između supravodljivih kontakata spojenih na prednapon  $V$ . Napon vrata  $V_G$  određuje elektrostatsku energiju kvantne točke

makroskopskih stanja. Odgovor je potvrđan; željena superpozicija može se ostvariti putem superpozicije koherentnih stanja. Koherentna su stanja superpozicija Fockovih stanja, no njihova posebnost leži u tome da se ponašaju "klasično" te da su otporna na vanjske perturbacije zbog čega ih možemo promatrati kao makroskopska stanja (granicu klasičnog i kvantnog). Superpozicija koherentnih stanja naziva se cat-stanjem (shematski prikaz na Slici 1). Cat-stanja nisu samo od akademskog značenja, već imaju i vrlo važnu ulogu u teoriji kvantne komunikacije kao i potencijalnu primjenu u kvantnom računarstvu.

Do sada je napravljeno nekoliko prijedloga te konkretnih eksperimentalnih izvedbi sustava u kojima je moguće stvoriti cat-stanja. Većina dosadašnjih izvedbi bazirana je na optičkim sustavima [2], [3].

U ovom seminaru pokazano je kako uz manipulaciju vanjskih parametara dolazi do stvaranja cat-stanja isprepletenih s qubitnim stanjima dvorazinskog sustava u sustavu prikazanom na Slici 2. Promatrani sustav zapravo je Josephsonov spoj u kojem je između supravodljivih kontakata postavljena supravodljiva kvantna točka koja može harmonički oscilirati između kontakata. Osciliranjem kvantne točke između supravodiča, dolazi do koherentnog tuneliranja Cooperovih parova sa supravodljivih kontakata na kvantnu točku. Supravodljivi kontakti spojeni su na prednapon  $V$  koji je moguće kontrolirati. Napon  $V$  određuje razliku faza između kontaktnih supravodiča [4]:

$$\phi = \phi_R - \phi_L \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}, \quad (2b)$$

gdje su  $\phi_R$  i  $\phi_L$  faze desnog odnosno lijevog supravodljivog kontakata. Manipulacijom elektrostatske energije kvantne točke putem napona vrata  $V_g$  (eng. 'gate voltage') moguće je ostvariti da se kvantna točka efektivno ponaša kao dvorazinski kvantni sustav, tj. kao qubit. Ova dva kvantna stanja razlikuje se za jedan Cooperov par; kvantna točka u stanju  $|0\rangle$  ima  $n$  Cooperovih parova, a u stanju  $|1\rangle$   $n + 1$  Cooperov par pa se stoga za ovaj sustav koristi engleski izraz 'Cooper Pair Box' (CPB).

U ovom seminaru najprije je izveden Hamiltonijan koji opisuje navedeni sustav sa Slike 2. U središnjem dijelu rada pokazano je kako adekvatnom manipulacijom napona  $V$ , evolucija ovog sustava vodi na pojavu Schrödingerovih "cat-stanja" (superpozicija mehaničkih koherentnih stanja) kvantno isprepletenih s qubitnim stanjima. Na kraju rada dobivena su stanja okarakterizirana entropijom kvantne isprepletenosti.

Kako bismo uspješno teorijski opisali predloženi sustav, potrebno je najprije izložiti nekoliko bitnih svojstava i koncepata supravodiča i tipičnog Josephsonovog spoja.

## 1.1 Josephsonov spoj

Tipični Josephsonov spoj prikazan je na Slici 3. Dva supravodiča odvojena su tankim izolatorskim spojem. Parametar uređenja lijevog supravodiča je  $\Psi_L = |\psi_L|e^{i\phi_L}$ , a desnog  $\Psi_R = |\psi_R|e^{i\phi_R}$ . Parametre uređenja možemo promatrati kao valne funkcije kondenzata Cooperovih parova, dok u semiklasičnoj aproksimaciji (veliki broj parova)  $|\psi_{R/L}|^2$  možemo interpretirati kao gustoću Cooperovih parova s desne odnosno lijeve strane. Budući da kvantna mehanika dopušta tuneliranje čestica u klasično zabranjeno područje, moguće je da dio Cooperovih parova prodire sa supravodiča u područje izolatora (i drugog supravodiča). Gustoća Cooperovih parova koji tuneliraju kroz barijeru opada eksponencijalno s udaljenosti od supravodiča (valna funkcija eksponencijalno trne u klasično zabranjenom području).

U čistom kvantno-mehaničkom opisu, opservable broja (koja predstavlja broj Cooperovih parova) i faze ne možemo istovremeno znati proizvoljno precizno. Dapače, operator broja  $\hat{n}$  i operator faze  $\hat{\phi}$  su konjugirane varijable:

$$[\hat{\phi}, \hat{n}] = i \quad (3)$$

Budući da su navedene opservable konjugirane, svojstvena stanja operatora faze  $|\phi\rangle$  (sa svojstvenom vrijednosti  $\phi$ ), možemo prikazati preko svojstvenih stanja operatora broja  $|n\rangle$  (sa svojstvenom vrijednosti  $n$ ):

$$|\phi\rangle = \sum_N e^{in\phi} |n\rangle \quad (4)$$

i obrnuto:

$$|n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} |\phi\rangle \quad (5)$$

U idućim poglavljima seminara pokazati će se da je korisno definirati operator:

$$e^{i\hat{\phi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' |\phi'\rangle \langle\phi'| \quad (6a)$$

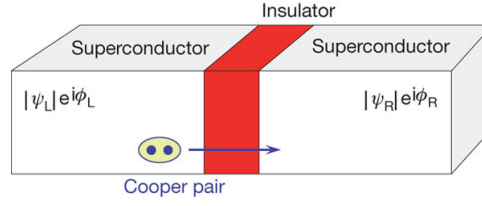
$$e^{i\hat{\phi}} |\phi\rangle = e^{i\phi} |\phi\rangle \quad (6b)$$

Koristeći izraz (4), ovaj operator i njegov hermitski konjugat  $e^{-i\hat{\phi}}$  (operator  $e^{i\hat{\phi}}$  nije hermitski) mogu se prikazati u bazi operatora broja:

$$e^{i\hat{\phi}} = \sum_n |n-1\rangle \langle n| \quad (7a)$$

$$e^{-i\hat{\phi}} = \sum_n |n\rangle \langle n-1| \quad (7b)$$

Sustav promatran u ovom seminaru, razlikuje se od tipičnog Josephsonovog spoja opisanog u ovom poglavlju time što se između supravodljivih kontakata ne nalazi izolator, već supravodljiva kvantna točka koja harmonički oscilira između kontaktnih supravodiča.



**Slika 3. Josephsonov spoj:** Između dva supravodiča postavljen je tanki sloj izolatora. Cooperovi parovi mogu tunelirati s jednog supravodiča na drugi kroz područje izolatora. [5]

## 2 Izvod Hamiltonijana

Hamiltonijan promatranog sustava (Slika 2) može se zapisati u obliku ([6]):

$$H = H_C + H_{TUN} + H_{HO} + H_{SC} \quad (8a)$$

$$H_C = \left( -2eV_G(t) + \frac{4e^2}{C} \right) |1\rangle \langle 1| \quad (8b)$$

$$H_{HO} = \hbar\omega \left( \frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{\hat{X}^2}{2} \right) = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (8c)$$

$$H_{SC} = |\phi_L\rangle \langle \phi_L| + |\phi_R\rangle \langle \phi_R| \quad (8d)$$

$$H_{TUN} = t_L(\hat{x}) \sum_{n_L} (|n_L + 1\rangle \langle n_L| \otimes |0\rangle \langle 1| + |n_L\rangle \langle n_L + 1| \otimes |1\rangle \langle 0|) + \quad (8e)$$

$$t_R(\hat{x}) \sum_{n_R} (|n_R + 1\rangle \langle n_R| \otimes |0\rangle \langle 1| + |n_R\rangle \langle n_R + 1| \otimes |1\rangle \langle 0|) \quad (8f)$$

Član Hamiltonijana  $H_{HO}$  je Hamiltonijan harmoničkog oscilatora te opisuje mehaničke stupnjeve slobode kvantne točke. Operatori  $\hat{P} = \sqrt{\frac{1}{\hbar m \omega}} \hat{p}$ ,  $\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega}} \hat{x}$  reskalirani su operatori položaja i impulsa, a operatori  $a$  i  $a^\dagger$  su operatori stvaranja i poništenja bozonskih eksitacija harmoničkog oscilatora.

$H_{SC}$  opisuje stupnjeve slobode povezane sa supravodljivim kontaktima. Koristeći činjenice da ukupni Hamiltonijan implicira da su  $\phi_L$  i  $\phi_R$  dobri kvantni brojevi te da se supravodljivi kontakti nalaze u tim stanjima (kontrolirano s  $V$ ), možemo zanemariti ovaj član u daljnjem razmatranju budući da on ne utječe na dinamiku sustava.

Preostala dva člana opisat ćemo u zasebnim potpoglavljima.

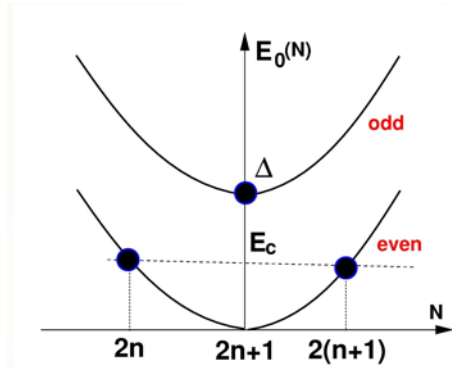
### 2.1 Elektrostatski dio Hamiltonijana

Izraz (8b) predstavlja elektrostatsku energiju kvantne točke. Navedeni izraz već je pojednostavljeni izraz za elektrostatsku energiju. Naime, već se promatra kvantna točka kao dvorazinski kvantni sustav. Stoga, krenimo od općenitijeg izraza za elektrostatsku energiju supravodljive kvantne točke ([7]):

$$E_C = \frac{e^2}{2C} (N - \alpha V_G)^2 + \Delta \quad (9a)$$

$$\Delta_N = \begin{cases} 0, & N = 2n \\ \Delta, & N = 2n + 1 \end{cases} \quad (9b)$$

$N$  je broj elektrona na kvantnoj točki,  $\alpha V_G$  inducirani naboj na kvantnoj točki uzrokovan naponom vrata  $V_G$ , a  $C$  ukupni kapacitet kvantne točke.  $\Delta$  je energetska procijep iz BCS teorije



**Slika 4.** Elektrostatska energija kvantne točke uz poseban odabir napona  $V_G$

supravodljivosti (energetski procijep između energije kondenzata Cooperovih parova i energije pobuđenja). Ovaj član posljedica je toga što svaki novi Cooperov par "ulazi" u kondenzat osnovnog stanja zajedno s prijašnjim parovima, dok će nespareni elektroni popunjavati pobuđena kvazičestična stanja (koja su procijepom  $\Delta$  odvojena od osnovnog stanja). Ukoliko je  $\Delta > \frac{e^2}{2C}$ , osnovno stanje (elektrostatskog dijela Hamiltonijana) kvantne točke nužno će biti ono s parnim brojem elektrona.

Izabirući  $\alpha V_G = 2n + 1$ , osnovno stanje kvantne točke postaje degenerirano (Slika 4). Dva stanja koja se razlikuju za jedan Cooperov par imaju jednaku energiju.

Ukoliko je  $\Delta \gg \frac{e^2}{2C}$ , prvo energetsko stanje iznad osnovnog (dodavanje još jednog Cooperovog para), ima energiju  $\frac{9e^2}{2C}$  veću od osnovnog stanja. Stoga, ukoliko je karakteristična energija tuneliranja (u idućem poglavlju ćemo vidjeti da to odgovara Josephsonovoj energiji  $E_J$ ) manja od razmaka  $\frac{9e^2}{2C}$  između osnovnog i pobuđenog elektrostatskog stanja, električne stupnjeve slobode kvantne točke možemo promatrati kao dvorazinski kvantni sustav (qubit). Ova dva degenerirana stanja kvantne točke, koja se razlikuju za jedan Cooperov par, označavati ćemo s  $|0\rangle \equiv |2n\rangle$  i  $|1\rangle \equiv |2(n+1)\rangle$ .

Uz ovaj specijalni odabir  $V_G$ ,  $H_C$  postaje jednak nuli u izrazu za ukupni Hamiltonijan (8).

## 2.2 Hamiltonijan tuneliranja

Promotrimo sada  $H_{TUN}$ , dio Hamiltonijana za koji ćemo ustvrditi da je odgovoran za sparivanje električnih i mehaničkih stupnjeva slobode kvantne točke. Stanja  $|0\rangle$  i  $|1\rangle$  kvantne točke opisana su u prošlom poglavlju. Stanja  $|n_L\rangle$  i  $|n_R\rangle$  su svojstvena stanja operatora broja lijevog odnosno desnog supravodljivog kontakta. Iz oblika (8e) vidljivo je da ovaj član opisuje tuneliranje Cooperovih parova s lijevog odnosno desnog supravodljivog kontakta na kvantnu točku i obrnuto. Funkcije  $t_L(\hat{x})$  i  $t_R(\hat{x})$  predstavljaju amplitude tuneliranja Cooperovih parova s lijevog odnosno desnog supravodljivog kontakta. Amplituda ovisi o poziciji kvantne točke  $x$  budući da gustoća Cooperovih parova koji tuneliraju trne eksponencijalno s udaljenosti od supravodiča. Stoga amplitude imaju oblik:

$$t_L(x) = -\frac{E_J}{2} e^{-\frac{\hat{x}}{\lambda}} \quad (10a)$$

$$t_R(x) = -\frac{E_J}{2} e^{\frac{\hat{x}}{\lambda}}, \quad (10b)$$

gdje je  $E_J$  tzv. Josephsonova energija koja opisuje energetsku skalu tuneliranja Cooperovih parova u Josephsonovom spoju. Efektivna duljina tuneliranja  $\lambda$  predstavlja prostornu skalu za duljinu prodiranja valne funkcije u klasično zabranjeno područje. Za promatrani sustav

je  $\lambda \gg x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ , gdje je  $x_0$  amplituda oscilacija osnovnog stanja (zero-mode oscilacije). Stoga, prirodno je uvesti mali parametar:

$$\epsilon = \frac{x_0}{\lambda} \ll 1 \quad (11)$$

Uvodeći operator  $\hat{X} = \frac{\hat{x}}{x_0}$  te razvijajući eksponencijale po malom parametru  $\epsilon$ , amplitude tuneliranja mogu se zapisati u obliku:

$$t_L \approx \frac{-E_J}{2}(1 - \epsilon\hat{X}) \quad (12a)$$

$$t_R \approx \frac{-E_J}{2}(1 + \epsilon\hat{X}) \quad (12b)$$

Nadalje, izraz (8e) prirodnije je prikazati u bazi operatora faze supravodljivih kontakata, budući da se isti nalaze u svojstvenim stanjima faze, te da se koristeći izraz (7) svodi na dijagonalnu formu u prostoru supravodljivih kontakata:

$$H_{TUN} = \frac{-E_J}{2}(1 - \epsilon\hat{X})(e^{-\hat{\phi}_L} \otimes |0\rangle \langle 1| + e^{\hat{\phi}_L} \otimes |1\rangle \langle 0|) + \frac{-E_J}{2}(1 + \epsilon\hat{X})(e^{-\hat{\phi}_R} \otimes |0\rangle \langle 1| + e^{\hat{\phi}_R} \otimes |1\rangle \langle 0|) \quad (13)$$

Ovaj izraz može se svesti na oblik:

$$H_{TUN} = -E_J \cos(\phi) \hat{\sigma}_x + \epsilon E_J \sin(\phi) \hat{X} \hat{\sigma}_y \quad (14)$$

gdje je  $\phi = \frac{\phi_R - \phi_L}{2}$ , a  $\hat{\sigma}_i$  su odgovarajuće Paulijeve matrice. Sada smo spremni promotriti pojednostavljeni ukupni Hamiltonijan sustava.

## 2.3 Ukupni Hamiltonijan

Uz specijalni odabir  $V_G$  i navedene aproksimacije, ukupni Hamiltonijan ima oblik:

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - E_J \cos(\phi) \sigma_x + \epsilon E_J \sin(\phi) \hat{X} \sigma_y \quad (15)$$

faza  $\phi$  određena je naponom  $V$  (izraz (2b)) koji se može kontrolirati.

## 3 Evolucija sustava

### 3.1 Slika interakcije

Kako bismo lakše izračunali operator vremenske evolucije sustava  $\hat{U}(t, t')$  promatramo sustav u slici interakcije. Stoga trebamo Hamiltonijan (15) razdvojiti na dva dijela:

$$H = H_0 + H_I \quad (16a)$$

$$H_0 = -E_J \cos(\phi) \sigma_x + \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (16b)$$

$$H_I = \epsilon E_J \sin(\phi) \hat{X} \sigma_y \quad (16c)$$

Valne funkcije u slici interakcije  $|\tilde{\psi}\rangle$  i u Schrödingerovoj slici  $|\psi\rangle$  povezani su relacijom

$$|\tilde{\psi}\rangle = U_0^\dagger |\psi\rangle \quad (17)$$

Operator  $U_0$  zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu s Hamiltonijanom  $H_0$ :

$$i\hbar \frac{\partial U_0(t, t')}{\partial t} = H_0 U_0(t, t') \quad (18)$$

Valna funkcija u Schrödingerovoj slici evoluira operatorom  $U$  koji zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu oblika (18) s ukupnim Hamiltonijanom  $H$ , dok valna funkcija u slici interakcije evoluira operatorom  $\tilde{U}_I$  koji zadovoljava jednadžbu:

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{U}_I(t, t')}{\partial t} = \tilde{H}_I \tilde{U}_I(t, t') \quad (19)$$

,gdje je  $\tilde{H}_I$  Hamiltonijan interakcije u slici interakcije:

$$\tilde{H}_I = U_0^\dagger H_I U_0 \quad (20)$$

Stoga valne funkcije evoluiraju kao:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{U}_I(t, t_0) |\tilde{\psi}(t_0)\rangle \quad (21a)$$

$$|\psi(t)\rangle = U_0(t) \tilde{U}_I(t, t_0) U_0(t_0)^\dagger |\psi(t_0)\rangle \quad (21b)$$

Sada možemo promotriti operator evolucije sustava za konkretni napon  $V$ .

## 3.2 Konstantni napon

Najprije ćemo promotriti slučaj konstantnog napona  $V(t) = V_0$  primjenjenog na supravodljive kontakte. U tome slučaju je razlika faza supravodiča:

$$\phi = \nu t \quad (22)$$

$$\nu = \frac{2eV}{\hbar} \quad (23)$$

Veličinu  $\nu$  nazivamo Josephsonovom frekvencijom. Također pretpostavljamo da je vlastita frekvencija oscilatora:

$$\omega = k\nu, \quad k \in \mathbb{N} \quad (24)$$

Kroz izvod ćemo  $\omega$  pisati u obliku (24), a na kraju ćemo promotriti rezonantni slučaj  $k = 1$ . Prvi korak u pronalaženju operatora evolucije, izračunati je Hamiltonijan interakcije u slici interakcije pomoću (20). Stoga moramo odrediti operator  $U_0$ . Budući da za promatrani Hamiltonijan vrijedi:

$$[H_0(t), H_0(t')] = 0 \quad (25)$$

možemo integrirati jednadžbu (18):

$$U_0(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_0(t') dt'\right) \quad (26a)$$

$$U_0(t) = \exp\left(-i\omega a^\dagger a t + i \frac{E_J}{\nu \hbar} \sin(\nu t) \sigma_x\right) \quad (26b)$$

Operator  $\hat{X}$  iz  $H_I$  pogodnije je napisati u obliku:  $\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$ . Sada možemo izračunati operator  $\tilde{H}_I$  koristeći Hadamardovu lemu i komutacijske relacije bozonskih operatora i sigma matrica:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots \quad (27a)$$

$$[a^\dagger a, a] = -a \quad [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger \quad (27b)$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (27c)$$

Transformirajmo najprije mehaničke stupnjeve slobode  $H_I$ :

$$e^{i\omega a^\dagger a} (a + a^\dagger) e^{-i\omega a^\dagger a} = a^\dagger e^{i\omega t} + a e^{-i\omega t} \quad (28)$$

Transformacijom električnih stupnjeva slobode dobiva se:

$$e^{-i\frac{E_J}{\hbar\nu}\sin(\nu t)\sigma_x}\sigma_y e^{i\frac{E_J}{\hbar\nu}\sin(\nu t)\sigma_x} = \sigma_y \cos\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu}\sin(\nu t)\right) + \sigma_z \sin\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu}\sin(\nu t)\right) \quad (29)$$

Stoga Hamiltonijan interakcije u slici interakcije poprima oblik:

$$\tilde{H}_I = \epsilon E_J \left( f_1(t)\hat{X}\sigma_y + f_2(t)\hat{P}\sigma_y + f_3(t)\hat{X}\sigma_z + f_4(t)\hat{P}\sigma_z \right) \quad (30)$$

gdje su:

$$f_1(t) = \cos\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu}\sin(\nu t)\right) \sin(\nu t)\cos(k\nu t) \quad (31a)$$

$$f_2(t) = \cos\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu}\sin(\nu t)\right) \sin(\nu t)\sin(k\nu t) \quad (31b)$$

$$f_3(t) = \sin\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu}\sin(\nu t)\right) \sin(\nu t)\cos(k\nu t) \quad (31c)$$

$$f_4(t) = \sin\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu}\sin(\nu t)\right) \sin(\nu t)\sin(k\nu t) \quad (31d)$$

Uz izračunati  $\tilde{H}_I$  moguće je odrediti operator  $\tilde{U}_I$ , no budući da  $\tilde{H}_I$  ne komutira u različitim trenutcima, nije moguće samo integrirati izraz (19). Stoga smo primorani koristiti aproksimativne metode. Koristiti ćemo aproksimaciju stacionarnih faza (Rotating Wave Approximation, RWA); zanemariti ćemo sve oscilatorne (nestacionarne) doprinose Hamiltonijanu. To ćemo postići razvijanjem funkcija  $f_i(t)$  u Fourierov red:

$$f_i(x) = \frac{a_{0i}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{ni}\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{ni}\sin(nx), \quad x = \nu t \quad (32)$$

i zanemarivanjem svih članova u razvoj osim konstantnog  $a_{0i}$ :

$$a_{0i} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) dx \quad (33)$$

U RWA aproksimaciji  $\tilde{H}_I$  možemo napisati u vremenski neovisnom obliku:

$$\tilde{H}_I = \frac{\epsilon E_J}{2} \left( a_{01}\hat{X}\sigma_y + a_{02}\hat{P}\sigma_y + a_{03}\hat{X}\sigma_z + a_{04}\hat{P}\sigma_z \right) \quad (34)$$



Odmah se može zaključiti da je  $a_{01} = a_{04} = 0$  jer su  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$  neparne funkcije. U slučaju neparnog  $k$ , što pokriva i rezonantni slučaj ( $k=1$ ), integranjem izraza (33) dobiva se da je  $a_{03} = 0$ , dok je koeficijent  $a_{02}$  jedini različit od nule:

$$a_{02} = J_{k-1} \left( \frac{2E_J}{\hbar\nu} \right) - J_{k+1} \left( \frac{2E_J}{\hbar\nu} \right) \quad (35)$$

gdje je  $J_n(y)$   $n$ -ta Besselova funkcija:

$$J_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx - y \sin(x)) dx \quad (36)$$

Budući da  $\tilde{H}_I$  u RWA aproksimaciji ne ovisi o vremenu, jednadžbu (19) možemo integrirati te dobivamo:

$$\tilde{U}_I = \exp \left( -i\epsilon\alpha t \hat{P} \sigma_y \right) \quad (37)$$

pri čemu je:

$$\alpha = \frac{E_J}{2\hbar} \left( J_{k-1} \left( \frac{2E_J}{\hbar\nu} \right) - J_{k+1} \left( \frac{2E_J}{\hbar\nu} \right) \right) \quad (38)$$

Sada operator evolucije možemo primijeniti na početno stanje sustava. Za početno stanje sustava uzimamo osnovno stanje sustava prije uključivanja napona; direktni produkt svojstvenog stanja  $\sigma_x$  matrice (sa svojstvenom vrijednosti +1) i osnovnog stanja harmoničkog oscilatora:

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+z\rangle + |-z\rangle) \otimes |0\rangle \quad (39)$$

gdje smo s  $|\pm z\rangle$  označili svojstvena stanja  $\sigma_z$  koja smo prije označavali s  $|0\rangle$  odnosno  $|1\rangle$ . Prije evoluiranja stanja zamjetimo da je:

$$\exp \left( -i\bar{X} \hat{P} \right) |0\rangle = |\bar{X}\rangle \quad (40)$$

operator prostorne translacije. Dobiveno stanje,  $|\bar{X}(t)\rangle$ , koherentno je stanje s  $\langle \hat{X} \rangle = \bar{X}(t)$ . Stoga za valnu funkciju u slici interakcije dobivamo:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \frac{1+i}{2} |+y\rangle \otimes |\alpha\epsilon t\rangle + \frac{1-i}{\sqrt{2}} |-y\rangle \otimes |-\alpha\epsilon t\rangle \quad (41)$$

$|\pm y\rangle$  su svojstvena stanja operatora  $\sigma_y$ . Dobiveno stanje isprepleteno je stanje qubitnih stanja i koherentnih stanja koja se šire u suprotnim smjerovima (shematski prikaz na Slici 1). U Schrödingerovoj slici valna funkcija ostaje sličnog oblika kao (41). Koherentna stanja evoluirati će u oblik  $|e^{-i\omega t}(\pm\alpha\epsilon t)\rangle$  (tj. kružit će u faznom prostoru po putanji klasičnog harmoničkog oscilatora), dok će qubitna stanja evoluirati pod utjecajem operatora  $\sigma_x$ :  $|\pm y(t)\rangle = e^{i\frac{E_J}{\hbar\nu} \sin(\nu t) \sigma_x} |\pm y\rangle$ . No, mi bismo htjeli dobiti konačno stanje u kojem su qubiti isprepleteni s "cat-stanjima", odnosno superpozicijom koherentnih stanja. Kako bismo to postigli, potrebno je osmisliti protokol za  $V(t)$  koji će generirati željena stanja.

### 3.3 Protokol okretanja napona

Jedna od ideja za dobivanje željenog stanja je da razlika faza prije uključivanja prednapona bude različita od nule:  $\phi(t=0) = -\phi_0$  te da se u nekom trenutku  $t_1$ , prednaponu promijeni predznak:

$$V(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_0, & t \in [0, t_1] \\ -V_0, & t > t_1 \end{cases} \quad (42)$$

Koristeći (2b) i (18) dobiva se:

$$U_0(t) = \begin{cases} \exp(-i\omega a^\dagger at + \frac{iE_J}{\hbar\nu} h(t, \phi_0) \sigma_x), & t \in [0, t_1] \\ \exp(-i\omega a^\dagger at + \frac{iE_J}{\hbar\nu} g(t, t_1, \phi_0) \sigma_x), & t > t_1 \end{cases} \quad (43)$$

gdje je  $h(t, \phi_0) = \sin(\nu t - \phi_0) + \sin(\phi_0)$ , a  $g(t, t_1, \phi_0) = \sin(\nu t - (2\nu t_1 - \phi_0)) + \sin(\phi_0) + 2\sin(\nu t_1 - \phi_0)$ . Stoga će se i oblik za  $\tilde{H}_I$  razlikovati za ova dva perioda. Za predloženi protokol također ćemo koristiti RWA aproksimaciju, što će voditi na isti oblik kao i (34) samo uz druge koeficijente:

$$\tilde{H}_I = \frac{\epsilon E_J}{2} \left[ (b_{01} \hat{X} + b_{02} \hat{P}) \sigma_y + (b_{03} \hat{X} + b_{04} \hat{P}) \sigma_z \right], \quad t \in [0, t_1] \quad (44a)$$

$$\tilde{H}_I = \frac{\epsilon E_J}{2} \left[ (c_{01} \hat{X} + c_{02} \hat{P}) \sigma_y + (c_{03} \hat{X} + c_{04} \hat{P}) \sigma_z \right], \quad t > t_1 \quad (44b)$$

Stoga, moramo evoluirati sustav najprije do trenutka  $t_1$  s Hamiltonijanom (44a), a nakon njega s Hamiltonijanom (44b). Kako bismo dobili željeni rezultat, do trenutka  $t_1$  trebamo dobiti stanja u kojem su 'suprotna' koherentna stanja vezana na svojstvena stanja jedne od sigma matrica (kao u primjeru konstantnog napona), primjerice na  $\sigma_z$ ; što bi zahtjevalo da su koeficijenti  $b_{01} = b_{02} = 0$ . Nakon okretanja napona, htjeli bismo da se 'suprotna' koherentna stanja razdvoje na dva nova koherentna stanja koja su sada vezana na svojstvena stanja operatora  $\sigma_y$ ; to bi zahtjevalo da je  $c_{03} = c_{04} = 0$ . Izrazi za navedene koeficijente ne mogu se napisati u zatvorenoj formi; u Dodatku 1 nalaze se eksplicitno napisani izrazi. Iz njih slijedi da je traženi protokol moguće ostvariti uz:

$$A \sin(\phi_0) = (2K + 1) \frac{\pi}{2}, \quad K \in \mathbb{Z} \quad (45a)$$

$$\nu t_1 = \arcsin \left( M - \frac{2K + 1}{2} \right) \frac{\sin(\phi_0)}{2K + 1} + \phi_0, \quad M \in \mathbb{Z} \quad (45b)$$

gdje smo definirali  $A = \frac{2E_J}{\hbar\nu}$ . Budući da se  $\nu$  može kontrolirati (preko iznosa  $V_0$ ), a time i  $A$ , možemo ispuniti uvjet (45a). Trenutak okretanja napona u eksperimentu bilo bi teško egzaktno pogoditi, no u principu možemo izabrati trenutak okretanja napona  $t_1$  da zadovoljava uvjet (45b). Pogledajmo evoluciju sustava uz ovako odabrane parametre. Do trenutka  $t_1$ , sustav evoluira pod utjecajem operatora:

$$\tilde{U}_I(t_1) = \exp \left( -i \frac{\epsilon E_J t_1}{2\hbar} (b_{03} \hat{X} + b_{04} \hat{P}) \sigma_z \right) \quad (46)$$

Prije nego evoluiramo početno stanje sustava, definirajmo operator pomaka u mehaničkom potprostoru:

$$D(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (47a)$$

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad (47b)$$

$$D(\alpha) = e^{i(\bar{P}\hat{X} - \bar{X}\hat{P})} \quad (47c)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{X} + i\bar{P}) \quad (47d)$$

gdje je  $|\alpha\rangle$  koherentno stanje ( $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ). Najprije definirajmo:

$$\bar{P}_1(t_1) = \frac{\epsilon E_J t_1}{2\hbar} b_{03} \quad (48a)$$

$$\bar{X}_1(t_1) = -\frac{\epsilon E_J t_1}{2\hbar} b_{04} \quad (48b)$$

$$\alpha_1(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{X}_1(t_1) + i\bar{P}_1(t_1)) \quad (48c)$$

Djelovanjem operatora (46) na početno stanje (39) dobiva se:

$$|\tilde{\psi}(t_1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle e^{-i(\bar{P}_1(t_1)\hat{X} - \bar{X}_1(t_1)\hat{P})} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle e^{i(\bar{P}_1(t_1)\hat{X} - \bar{X}_1(t_1)\hat{P})} |0\rangle \quad (49)$$

U dobivenom izrazu prepoznamo operator pomaka u mehaničkom potprostoru (47c) pa stoga dobivamo:

$$|\tilde{\psi}(t_1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle |-\alpha_1(t_1)\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle |\alpha_1(t_1)\rangle \quad (50)$$

Nakon trenutka  $t_1$ , sustav evoluira pod utjecajem operatora:

$$\tilde{U}_I(t) = \exp\left(-i\frac{\epsilon E_J(t-t_1)}{2\hbar}(c_{01}\hat{X} + c_{02}\hat{P})\sigma_y\right) \quad (51)$$

Koristeći istu strategiju kao i kod operatora evolucije do trenutka  $t_1$ , definirajući  $\alpha_2$  za operator pomaka  $D(\alpha_2)$  te koristeći relaciju:

$$D(\alpha_2)|\alpha_1\rangle = e^{i\text{Im}(\alpha_2\alpha_1^*)} |\alpha_1 + \alpha_2\rangle \quad (52)$$

za stanje u trenutku  $t > t_1$  dobiva se:

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(t)\rangle = & \frac{1}{2} |+\rangle (\beta(t, t_1) |-\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t-t_1)\rangle - i\beta^*(t, t_1) |\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t-t_1)\rangle) \\ & + \frac{1}{2} |-\rangle (\beta^*(t, t_1) |-\alpha_1(t_1) + \alpha_2(t-t_1)\rangle + i\beta(t, t_1) |\alpha_1(t_1) + \alpha_2(t-t_1)\rangle) \end{aligned} \quad (53)$$

pri čemu smo definirali  $\beta(t, t_1) = e^{\text{Im}(\alpha_2\alpha_1^*)}$ . Za evoluciju stanja u Schrödingerovoj slici dobili bismo ekvivalentan rezultat kao u slučaju konstantnog napona. Dobiveno stanje je ono što smo tražili: isprepleteno stanje qubitnog stanja sa superpozicijom koherentnih stanja ("cat-stanjima"). Preostaje nam još okarakterizirati dobiveno stanje entropijom kvantne isprepletenosti.

## 4 Entropija kvantne isprepletenosti

Kako bismo izračunali entropiju kvantne isprepletenosti

$$S(t) = \text{Tr}[\hat{\rho}_q(t)\ln(\hat{\rho}_q(t))] = \text{Tr}[\hat{\rho}_m(t)\ln(\hat{\rho}_m(t))] \quad (54)$$

potrebno je najprije izračunati matricu gustoće  $\hat{\rho}(t)$  te reduciranu matricu gustoće  $\hat{\rho}_q = \text{Tr}_m(\hat{\rho})$ , ili  $\hat{\rho}_m = \text{Tr}_q(\hat{\rho})$ .  $\text{Tr}_{m/q}$  predstavlja uzimanje traga po mehaničkim odnosno qubitnim stupnjevima slobode, a  $\hat{\rho}_{q/m}$  predstavlja reduciranu matricu gustoće qubitnog odnosno mehaničkog dijela sustava. Koristeći definiciju matrice gustoće  $\hat{\rho} = |\tilde{\psi}(t)\rangle\langle\tilde{\psi}(t)|$  dobiva se:

$$\hat{\rho}(t) = \frac{1}{2} (|+y\rangle |\psi_+\rangle \langle\psi_+| \langle y+| + |+y\rangle |\psi_+\rangle \langle\psi_+| \langle -y| + |-y\rangle |\psi_-\rangle \langle\psi_+| \langle +y| + |-y\rangle |\psi_-\rangle \langle\psi_+| \langle -y|) \quad (55)$$

pri čemu smo definirali:

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta |-\alpha_1 - \alpha_2\rangle - i\beta^* |\alpha_1 - \alpha_2\rangle) \quad (56a)$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta^* |-\alpha_1 + \alpha_2\rangle + i\beta |\alpha_1 + \alpha_2\rangle) \quad (56b)$$

$$(56c)$$

Entropiju je jednostavnije izračunati preko qubitne reducirane matrice  $\hat{\rho}_q$ . Stoga napravimo parcijalni trag matrice gustoće po mehaničkim stupnjevima slobode:

$$2\hat{\rho}_q = |+y\rangle \langle +y| \text{Tr}(|\psi_+\rangle \langle\psi_+|) + |+y\rangle \langle -y| \text{Tr}(|\psi_+\rangle \langle\psi_+|) + |-y\rangle \langle +y| \text{Tr}(|\psi_-\rangle \langle\psi_+|) + |-y\rangle \langle -y| \text{Tr}(|\psi_-\rangle \langle\psi_+|) \quad (57)$$

Što vodi na izraz:

$$\hat{\rho}_q(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \eta(t) \\ \eta^*(t) & 1 \end{pmatrix} \quad (58)$$

pri čemu je  $\eta(t) = \langle\psi_-(t)|\psi_+(t)\rangle$ :

$$\eta(t) = \begin{cases} e^{-2|\alpha_1(t_1)|^2}, & t \in [0, t_1] \\ i \sin(4\beta(t)) e^{-2|\alpha_2(t-t_1)|^2} - \frac{i}{2} \left( e^{-2|\alpha_1(t_1)+\alpha_2(t-t_1)|^2} + e^{-2|\alpha_2(t-t_1)-\alpha_1(t_1)|^2} \right), & t > t_1 \end{cases} \quad (59)$$

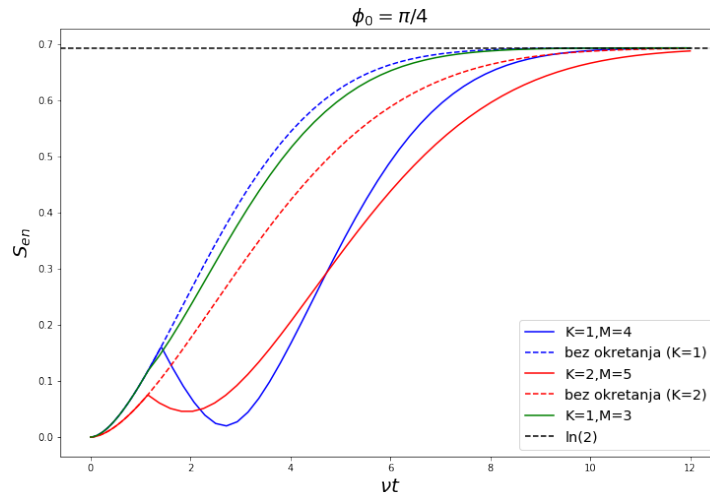
Entropija ne ovisi o bazi u kojoj ju računamo, stoga ćemo dijagonalizirati matricu (58). Dijagonalizacijom se dobivaju svojstvene vrijednosti:

$$\lambda = \frac{1}{2} (1 \pm |\eta|^2) \quad (60)$$

Uvrštavajući dobivenu vrijednost u izraz (54) dobiva se:

$$S(t) = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 - |\eta(t)|^2) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + |\eta(t)|^2}{1 - |\eta(t)|^2} \right) \quad (61)$$

Na Slici 5 grafički je prikazana entropija spreznja za različite protokole. Vidljivo je da u slučaju konstantnog napona, entropija monotono raste od nule (entropija čistog stanja) do maksimalne vrijednosti  $\ln 2$ . Za protokol s okretanjem smjera napona, ovisno o parametrima  $K$  i  $M$  iz uvjeta (45a), (45b), entropija raste, no u trenutku okretanja napona javlja se značajka koja prekida njezin monotoni rast da bi kasnije opet monotona rasla do maksimalne vrijednosti  $\ln 2$ .



**Slika 5. Entropija isprepletenosti:** Na grafu je prikazana entropija kvantne isprepletenosti za različite izbore parametara  $K, M$  koji osiguravaju ispunjenje uvjeta (45a), (45b). Crtkanom linijom prikazana je entropija za protokole u kojima se ne okreće smjer napona

## 5 Zaključak

U ovom seminaru prikazano je kako u nanoelektromehaničkom sustavu, u kojem supravodljiva kvantna točka titra harmonički između dva supravodljiva kontakta spojena na izvor napona  $V$ , koherentnim tuneliranjem Cooperovih parova sa kontaktnih supravodiča na kvantnu točku dolazi do ispreplitanja električnih i mehaničkih stupnjeva slobode kvantne točke. U prvom dijelu seminara izveden je Hamiltonijan ovog sustava te je pokazano kako se posebnim odabirom napona vrata, koja stvaraju električni potencijal na poziciji kvantne točke, može postići da se električni stupnjevi slobode ponašaju kao dvorazinski kvantni sustav, tj. kao qubit. U središnjem je dijelu pokazano kako evolucija ovakvog sustava, iz osnovnog produktnog stanja (produkt osnovnog stanja harmoničkog oscilatora i osnovnog stanja električnog dijela hamiltonijana), uz konstantni napon između kontaktnih supravodiča vodi na pojavu isprepletenog stanja qubitnih stupnjeva slobode s mehaničkim koherentnim stanjima. U nastavku je ispitan protokol u kojem je faza supravodiča prije uključivanja napona različita od nule te se u nekom trenutku  $t_1$  okrene predznak napona  $V$ . Pokazano je da za posebne odabire vrijednosti napona  $V$  i trenutka  $t_1$ , dolazi do formiranja isprepletenog stanja qubitnih stupnjeva slobode sa superpozicijom koherentnih stanja ("cat-stanjima"). Naposljetku je izračunata entropija spreznjanja za dobivena stanja u ovisnosti o vremenu za različite vanjske parametre sustava.

Budući da su koherentna stanja robusna na vanjske perturbacije, dobivena "cat-stanja" mogla bi imati potencijalnu primjenu u kvantnoj komunikaciji ukoliko bi se u njih uspjela kodirati kvantna informacija. Nadalje, ostaje prostor za osmišljavanje boljeg protokola manipulacije napona  $V$  za stvaranje "cat-stanja" u navedenom elektromehaničkom sustavu koji bi bio eksperimentalno lakše izvediv; u navedenom protokolu problem je okretanja napona u točnom trenutku  $t_1$ . Također, trebalo bi odrediti osjetljivost ovako izvedenog rezultata na odstupanje od rezonantnog uvjeta Josephsonove i mehaničke frekvencije te na tranzijentni process okretanja perioda.

## Literatura

1. M. A. Nielsen, I. L. C. *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, New York, 2010.).
2. Liao, J.-Q., Huang, J.-F. & Tian, L. Generation of macroscopic Schrödinger-cat states in qubit-oscillator systems. *Phys. Rev. A* **93** (ožujak 2016.).
3. You, J. Q. & Nori, F. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits. *Nature* **474** (lipanj 2011.).
4. Kittel, C. *Introduction to Solid State Physics 8th Edition* (John Wiley Sons, 2005.).
5. Hacker, B., Welte, S., Daiss, S., Shaukat, A., Ritter, S., Li, L. & Rempe, G. Deterministic creation of entangled atom–light Schrödinger-cat states. *Nature Photonics* **13** (2019.).
6. Eriksson, A. M. & Vikström, A. Zero-Phase-Difference Josephson Current Based on Spontaneous Symmetry Breaking via Parametric Excitation of a Movable Superconducting Dot. *Phys. Rev. Lett.* **118** (svibanj 2017.).
7. Matveev, K. A., Gisselält, M., Glazman, L. I., Jonson, M. & Shekhter, R. I. Parity-induced suppression of the Coulomb blockade of Josephson tunneling. *Phys. Rev. Lett.* **70** (svibanj 1993.).

## A Dodatak 1 - koeficijenti u razvoju

Koeficijenti u Hamiltonijanu (44a) su:

$$b_{01} = \cos(\phi_0) \cos(A \sin(\phi_0)) I_1(\phi_0) - \sin(\phi_0) \cos(A \sin(\phi_0)) I_2(\phi_0) \quad (62a)$$

$$b_{02} = \cos(\phi_0) \cos(A \sin(\phi_0)) I_3(\phi_0) - \sin(\phi_0) \cos(A \sin(\phi_0)) I_4(\phi_0) \quad (62b)$$

$$b_{03} = \cos(\phi_0) \sin(A \sin(\phi_0)) I_1(\phi_0) - \sin(\phi_0) \sin(A \sin(\phi_0)) I_2(\phi_0) \quad (62c)$$

$$b_{04} = \cos(\phi_0) \sin(A \sin(\phi_0)) I_3(\phi_0) - \sin(\phi_0) \sin(A \sin(\phi_0)) I_4(\phi_0) \quad (62d)$$

pri čemu su:

$$I_1(\phi_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(lx) \sin(x) \sin(A \sin(x) \cos(\phi_0)) \sin(A \cos(x) \sin(\phi_0)) dx \quad (63a)$$

$$I_2(\phi_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(lx) \cos(x) \cos(A \sin(x) \cos(\phi_0)) \cos(A \cos(x) \sin(\phi_0)) dx \quad (63b)$$

$$I_3(\phi_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(lx) \sin(x) \cos(A \sin(x) \cos(\phi_0)) \cos(A \cos(x) \sin(\phi_0)) dx \quad (63c)$$

$$I_4(\phi_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(lx) \cos(x) \sin(A \sin(x) \sin(\phi_0)) \cos(A \cos(x) \sin(\phi_0)) dx \quad (63d)$$

Izrazi za  $c_{0i}$  dobivaju se zamjenom  $\cos(\phi_0)$  s  $\cos(\nu t_1 - \phi_0)$  (isto vrijedi i za sinus), zamjenom  $\cos(A \sin \phi_0)$  s  $\cos(A(2 \sin(\nu t_1 - \phi_0) + \sin(\phi_0)))$  (isto vrijedi za sinus) te zamjenom  $I_i(\phi_0)$  s  $I_i(\nu t_1 - \phi_0)$ . Iz navedenih izraza vrlo jednostavno slijede uvjeti za željeni protokol (45a) i (45b).