Osnove teorije vjerojatnosti

Zadaci za vježbu

PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu

zimski semestar – 2023/24

Zadatak 1. Pokažite da za $X_n \xrightarrow{P} X$ i g neprekidnu na Borelovom skupu C t.d. $\mathbb{P}(X \in C) = 1$ povlači $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

Zadatak 2. Iskažite i dokažite drugu Borel–Cantelli lemu.

Zadatak 3. Ako su $X_n \sim Ber(1/n)$ nezavisne, pokažite $X_n \xrightarrow{P} 0$ iako $\mathbb{P}(X_n = 1 \text{ b.č.}) = 1$.

Zadatak 4. Neka je $c > 0$ proizvoljan, Dokažite $X_n \xrightarrow{P} X$ ako i samo ako $\mathbb{E}|X_n - X| \wedge c \to 0$.

Zadatak 5. Pretpostavite $\mathbb{E}X_n = \mu$, $\operatorname{Var} X_n \to 0$, pokažite detaljno $X_n \xrightarrow{P} \mu$.

Zadatak 6. Pretpostavite $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$, pokažite detaljno $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

Zadatak 7. Dokažite precizno da za proizvoljnu sl. varijablu X vrijedi $\mathbb{E}|X| = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > s)ds$.

Zadatak 8. Ako je X slučajna var. za koju je $\operatorname{Var} X < \infty$, dokažite $\operatorname{Var} X \geq \mathbb{E}(X - c)^2$ za sve $c \in \mathbb{R}$.

Zadatak 9. Neka su X, Y nezavisne sl. varijable koje primaju vrijednosti na $\mathbb{Z}_+$, pokažite detaljno

$$\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y.$$

Zadatak 10. Ako je X slučajna var. za koju je $\mathbb{E}|X| < \infty$. Pokažite da relacija $\nu(A) = \int_A |x| dP_X(x)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, definira mjeru koja je apsolutno neprek u odn. na P_X.

Zadatak 11. Neka vrijedi $X \sim U(0, 2)$, $Y \sim U(1, 3)$. Odredite $d_{TV}(P_X, P_Y)$.

Zadatak 12. Neka vrijedi $X \sim Poi(\mu), Y \sim Poi(\lambda)$. Pokažite $d_{TV}(P_X, P_Y) \leq |\mu - \lambda|$.

Zadatak 13. Ako su X, Y dvije neprekidne sl. varijable s gustoćama f i g, dokažite da za razdiobe P_X i P_Y vrijedi

$$d_{TV}(P_X, P_Y) = \int_{A_+} f(s)ds - \int_{A_+} g(s)ds\,,$$

gdje je $A_+ = \{x : f(x) > g(x)\}$.

Zadatak 14. Ako sl. varijable X, X_n zadovoljavaju $\liminf_n \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$ za proizvoljan otvoreni skup G. Pokažite $\lim_n \mathbb{P}(X_n \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$ za svaki izmjeriv skup B t.d. $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$.

Zadatak 15. Ako je $\mathcal{G}$ σ–algebra, a X $\mathcal{G}$ izmjeriva sl. varijabla, dokažite precizno da za proizvoljnu nenegativnu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi $\mathbb{E}(\varphi(X) \mid \mathcal{G}) = \varphi(X)$.

Zadatak 16. Pretpostavite da su $X_n, n \geq 1$ uniformno integrabilne i t.d. $X_n \overset{\text{g.s.}}{\to} X$. Pokažite X je integrabilna te da vrijedi

$$\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X.$$

Pokažite da isti zaključak vrijedi i ako konvergenciju g.s. zamijenimo sa $X_n \overset{P}{\to} X$.

Zadatak 17. Može se pokazati ako su X_i n.j.d. i t.d. $\mathbb{E}X = c > 0$ tada gotovo sigurno vrijedi $\inf_n(X_1 + \cdots + X_n) > -\infty$. Pretpostavljajući ovu tvrdnju dokažite jaki zakon velikih brojeva, t.j. ako $\mathbb{E}X = \mu \in \mathbb{R}$

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \overset{\text{g.s.}}{\to} \mu.$$

Zadatak 18. Pokažite detaljno da konvergencija razdioba u totalnoj varijaciji povlači konvergenciju u Kolmogorov-Smirnov udaljenosti te po distribuciji.

Zadatak 19. Neka su X, Y dvije sl. varijable koje primaju vrijednosti na $\mathbb{Z}_+$, uvedimo $f(k) = \mathbb{P}(X = k)$ i $g(k) = \mathbb{P}(Y = k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, dokažite da za razdiobe P_X i P_Y vrijedi

$$d_{TV}(P_X, P_Y) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \wedge g(k)\,.$$

Zadatak 20. Kažemo da je slučajna varijabla X stohastički dominirana (ili manja) od slu. varijable Y ako $F_X(t) \geq F_Y(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$, oznaka $X \overset{st}{\leq} Y$

(a) Odredite u kojem su odnosu $F_X^{\leftarrow}(q)$ i $F_Y^{\leftarrow}(q)$ za $q \in (0,1)$.

(b) Pokažite da postoji sparivanje $(\hat{X}, \hat{Y})$ za X i Y tako da vrijedi $\hat{X} \leq \hat{Y}$.

Zadatak 21. Pretpostavite da su $X_i \sim Ber(p_i)$, za $p_i \in (0,1)$, $W = \sum_{i=1}^n X_i$, $Z \sim Poi(\lambda)$ za $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$. Ako su $V_i \overset{d}{=} (W - 1 \mid X_i = 1)$ dokazali smo

$$d_{TV}(P_W, P_Z) \leq \left(1 \wedge \frac{1}{\lambda}\right) \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}|W - V_i|.$$

Pretpostavite da dodatno vrijedi $W \geq V_i$ (odn. da takvo sparivanje postoji) i pokažite

$$d_{TV}(P_W, P_Z) \leq 1 - \frac{\operatorname{Var} W}{\mathbb{E} W}\,.$$

Zadatak 22. Pretpostavite da su $X_i \sim Ber(1/100)$, $W = \sum_{i=1}^{10} X_i$, te $Z \sim Poi(1/10)$, pretpostavimo

$$d_{TV}(P_W, P_Z) \leq \frac{1}{10}.$$

Nadjite gornju ogradu za vjerojatnost $\mathbb{P}(W \geq 1)$.

Zadatak 23. Pretpostavite da su X_i nezavisne i t.d. $|X_i| \leq 1$ te da vrijedi

$$\frac{\sum_1^n \operatorname{Var} X_i}{n} \to c \in (0, \infty).$$

Pokažite da $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ i $Z \sim N(0, c)$ zadovoljavaju

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z\,.$$

Zadatak 24. Pretpostavite da vrijedi $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$. Pretpostavimo da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna i t.d. je g' neprekidna u θ i $g'(\theta) \neq 0$. Pokažite da vrijedi

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, (g'(\theta)^2 \sigma^2)\,.$$