2.2 Paradoksi

Pr. 2.23 (Bertrand's box paradox)

- 3 kutije s kuglicama

$\rightarrow$ (1.) 2C

$\rightarrow$ (2.) 2B

$\rightarrow$ (3.) 1B 1C

Slučajno izaberemo kutiju te zatim jednu kuglicu iz te kutije. Ako je izvučena C kuglica, kolika je vjerojatnost da je i druga kuglica iz kutije C?

Rj. $C_i := \{i\text{-ta izvučena kuglica je } C\}$, $i = 1, 2$

$H_i := \{\text{u početku izabrana } i\text{-ta kutija}\}$, $i = 1, 2, 3$ $\rightarrow$ $\mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{3}, \forall i$

$$? = \mathbb{P}(C_2 \mid C_1) = \mathbb{P}(\underbrace{C_2 \cap C_1}_{= H_1} \mid C_1) = \boxed{\mathbb{P}(H_1 \mid C_1)}$$

1° $$\mathbb{P}(H_1 \mid C_1) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(C_1 \mid H_1)\cancel{\mathbb{P}(H_1)}}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(C_1 \mid H_i)\cancel{\mathbb{P}(H_i)}} = \frac{1}{1 + 0 + \frac{1}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}},$$

te

$$\mathbb{P}(H_2 \mid C_1) = 0, \quad \mathbb{P}(H_3 \mid C_1) = \boxed{\frac{1}{3}} \qquad \left[\mathbb{P}(H_1 \mid C_1) \neq \frac{1}{2}\,!\right]$$

2° $$\Omega := \{\text{koja od 6 kuglica je izvučena}\} = \{C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, C_1^{(3)}, B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, B_1^{(3)}\}$$

$\rightarrow$ $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ Laplaceov model!

$$\Rightarrow \mathbb{P}(H_1 \mid C_1) = \frac{|H_1 \cap C_1|}{|C_1|} = \frac{2}{3}$$

$H_1 = \{C_1^{(1)}, C_2^{(1)}\}$, $C_1 = H_1 \cup \{C_1^{(3)}\}$, $H_1 \cap C_1 = H_1$

te $$\mathbb{P}(H_3 \mid C_1) = \frac{1}{3}$$

"size-biasing"

1. kutija ima 2 puta više C kuglica od 3. pa je zbog toga $\mathbb{P}(H_1 \mid C_1) = 2 \cdot \mathbb{P}(H_3 \mid C_1)$

Pr. 2.24 (Monty Hall)

Imate izbor od 3 vrata → iza jednih je auto, iza druga 2 su koze.
Izabrali ste prva, a nakon toga je voditelj otvorio treća vrata i iza njih je bila koza. Ako možete, trebate li promijeniti vaš izbor vrata?

Rj: ["paradoks" je u tome što problem nije jednoznačno zadan, tj. postoji više rješenja.]

$H_i := \{$izabrali ste i-ta vrata$\}$, $i=1,2,3$ $\quad [\mathbb{P}(H_i)$ nebitne$]$

$A_i := \{$auto se nalazi iza i-tih vrata$\}$, $i=1,2,3$

$V_i := \{$voditelj otvara i-ta vrata$\}$, $i=1,2,3$

$K := V_3 \cap A_3^c$

Za $p_i := \mathbb{P}(A_i \mid H_1 \cap K) = \mathbb{P}_{H_1}(A_i|K) =: \mathbb{P}_1(A_i|K)$, $i=1,2,3$

zanima nas je li $\boxed{p_2 > p_1}$. $(p_3 = 0)$

Bayes za $\mathbb{P}_1$

$$p_2 = \frac{\mathbb{P}_1(K|A_2)\cancel{\mathbb{P}_1(A_2)}}{\sum_{j=1}^{3}\mathbb{P}_1(K|A_j)\cancel{\mathbb{P}_1(A_j)}} = \left[\mathbb{P}_1(A_j) = \tfrac{1}{3},\ \forall j,\ \mathbb{P}_1(K|A_3)=0\right]$$

$$= \frac{\mathbb{P}_1(K|A_2)}{\mathbb{P}_1(K|A_1)+\mathbb{P}_1(K|A_2)} \overset{DZ}{=} \left[\mathbb{P}_1(K|A_j) = \mathbb{P}_1(V_3 \cap A_3^c \cap A_j \mid A_j) \overset{A_j \subseteq A_3^c,\ j=1,2}{=} \mathbb{P}_1(V_3 \cap A_j | A_j) = \underline{\mathbb{P}_1(V_3|A_j)},\ j=1,2\right]$$

$K = V_3 \cap A_3^c$, $A_j \subseteq A_3^c$, $j=1,2$

$$= \frac{\mathbb{P}_1(V_3|A_2)}{\mathbb{P}_1(V_3|A_1)+\mathbb{P}_1(V_3|A_2)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_1(V_3|A_j) = ?,\ j=1,2}$$

Ovisi o "protokolu" na temelju kojeg voditelj odlučuje koja će vrata otvoriti!

[Drugim riječima, mi ne znamo sve postavke ovog slučajnog pokusa, već samo vidimo jedan njegov ishod!]

1° Voditelj otvara ona vrata iza kojih je koza (bira slučajno ako su koze iza oba vrata).

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}_1(V_3 \mid H_2) = 1,$$

$$\hookrightarrow \quad p_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} > \frac{1}{3} = p_1 .$$

2° Voditelj slučajno otvara jedna od preostala dvoja vrata.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_1) = \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_2) = \frac{1}{2}$$

$$\hookrightarrow \quad p_2 = p_1 = \frac{1}{2} .$$

3° Ako je auto iza vaših vrata, voditelj ne otvara niti jedna vrata, a ako nije, otvara ona iza kojih je koza.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_1) = 0, \quad \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_2) = 1$$

$$\hookrightarrow \quad p_2 = \boxed{1} > 0 = p_1 .$$

itd.

⊠