3.7 Očekivanje na diskretnom vjerojatnosnom prostoru

Kočimo, ako je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ diskretan (tj. Ω najviše prebrojiv), svaka sl. varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je nužno diskretna!

Prop. 3.46 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ diskretan vj. prostor te $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sluč. varijabla. Ako je $X \geq 0$, imamo

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(\omega). \quad (3.27)$$

$$= \text{"}\int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)\text{"}.$$

Općenito, $\mathbb{E}[|X|] < \infty \iff \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|\, \mathbb{P}(\omega) < \infty$ (3.28)

te u tom slučaju vrijedi (3.27).

Dokaz | Neka je $X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$.

1° $X \geq 0$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i \in I} a_i p_i = \sum_{i \in I} a_i\, \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_i\})$$

Ω diskretan!

$$= \sum_{i \in I} a_i \sum_{\omega : X(\omega) = a_i} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{i \in I} \sum_{X(\omega) = a_i} \overset{X(\omega)}{a_i}\, \mathbb{P}(\omega)$$

$$= \left[\bigcup_{i \in I} \{\omega : X(\omega) = a_i\} \text{ je particija od } \Omega! \right]$$

sve ≥ 0

$$= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(\omega) \in [0, \infty]. \quad (3.29)$$

2° $X \in \mathbb{R}$ $\to$ (3.28) slijedi iz (3.29) jer $|X| \geq 0$, a (3.27) se onda pokazuje analogno kao (3.29) s tim da u zadnjem koraku koristimo $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|\, \mathbb{P}(\omega) < \infty$.

Korolar 3.47 | • $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ diskretan vjer. prostor

• $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sluč. var.

(i) $0 \le X \le Y \Rightarrow \mathbb{E}[X] \le \mathbb{E}[Y]$. (3.30)

(ii) ako je (a) $X, Y \ge 0$, ili (b) $\mathbb{E}[|X|], \mathbb{E}[|Y|] < +\infty$, vrijedi

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]. \quad (3.31)$$

Dokaz (i) $\mathbb{E}[X] \overset{(3.27)}{=} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) \overset{X(\omega) \le Y(\omega), \forall \omega \in \Omega}{\le} \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\omega) \overset{(3.27)}{=} \mathbb{E}[Y]$.

(ii) (a) $(X+Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega) \ge 0, \forall \omega \in \Omega$, tj. $X + Y \ge 0$,

a (3.31) slijedi direktno iz (3.27).

(b) $|X+Y| \le |X| + |Y| \overset{(3.30)}{\Rightarrow} \mathbb{E}[|X+Y|] \le \mathbb{E}[|X|+|Y|] \overset{(a)}{=} \mathbb{E}[|X|] + \mathbb{E}[|Y|] < +\infty$

$\Rightarrow \exists\, \mathbb{E}[X+Y]$, a (3.31) opet slijedi iz (3.27). ■

[Općenito, $\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$ pa sva svojstva $\mathbb{E}$ slijede iz svojstava tzv. Lebesgueovog integrala!]