5. Neprekidne slučajne varijable

5.1 Funkcija gustoće

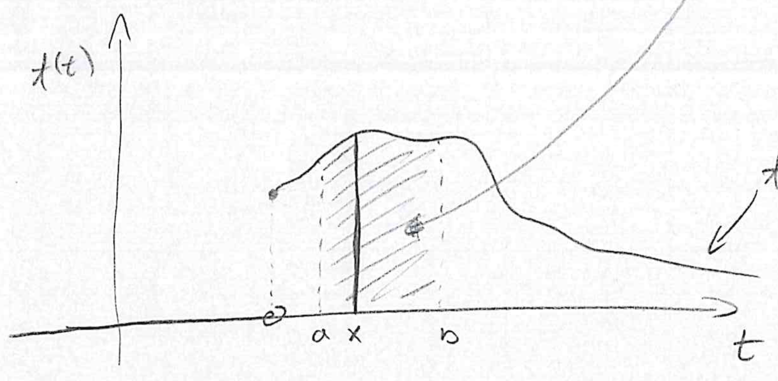
Def. 5.1 Sluč. varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je (apsolutno) neprekidna ako postoji f-ja $\boxed{f : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle}$ t.d. $\forall x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X \le x) = \boxed{\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}. \qquad (5.1)$$

$\hookrightarrow$ f zovemo $\boxed{\text{f-ja gustoće}}$ od X te često pišemo $\boxed{f = f_X}$.

$\hookrightarrow$ (5.1) povlači za $a < b$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < X \le b) &= \mathbb{P}(\{X \le b\} \setminus \{X \le a\}) \\
&= \mathbb{P}(X \le b) - \mathbb{P}(X \le a) \\
&\overset{(5.1)}{=} \int_a^b f(t)\,dt. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$



Također, $\forall x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x) &= \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(x - \tfrac{1}{n} < X \le x + \tfrac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt = 0 \quad (!) \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

(bez dokaza)

$$\left(= \text{“} \int_x^x f(t)\,dt \text{”}\right)$$

$$\left[\{X = x\} = \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \in \langle x - \tfrac{1}{n}, x + \tfrac{1}{n}]\}\right]$$

Specijalno, za $a<b$, npr. vrijedi

$$\mathbb{P}(a \le X < b) = \mathbb{P}(a < X \le b) \overset{(5.2)}{=} \int_a^b f(t)\,dt .$$

$\mathbb{P}(X=a)=\mathbb{P}(X=b)=0$

[za nepr. sluč. varijable nije bitno je li rub uključen ili ne!]

Općenito, za "skoro sve" $B \subseteq \mathbb{R}$, vrijedi

$$\mathbb{P}(X \in B) = \text{"} \int_B f(t)\,dt \text{"} .$$

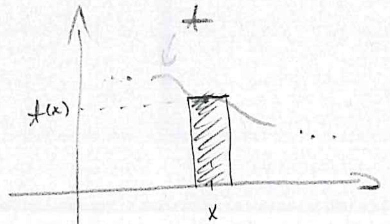
tzv. Lebesgueov integral.

Nap. 5.2 [intuicija o f-ji gustoće]

Ako je $f = f_X$, $\forall x \in \mathbb{R}$ i "mali" Δx, vrijedi

$$\mathbb{P}(X \in [x-\Delta x, x+\Delta x]) = \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(t) \approx 2\Delta x \cdot \boxed{f(x)}$$

$$\neq \mathbb{P}(X=x) \quad (=0) \; !$$



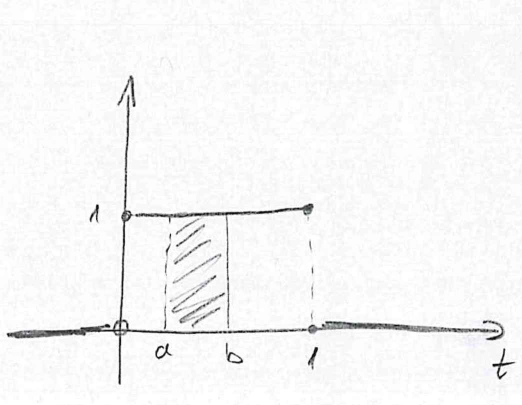
Pr. 5.3 $X :=$ slučajno odabran broj iz $[0,1]$

$$\mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x}{1}, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases} .$$

$\frac{\text{duljina}([0,x])}{\text{duljina}([0,1])}$

Uočimo, za

$$f(t) := \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$



vrijedi $\mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow X$ je neprekidna sl. var. s gustoćom f!

kažemo da X ima <u>uniformnu razdiobu</u> na $[0,1]$ (oznaka $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$).

Ako je $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty\rangle$ f-ja gustoće, nužno je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{n} f(t)\,dt$$

$$\underset{f=f_X}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \le n) \underset{\text{nepr. vjerojatnosti}}{=} \mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \le n\}}_{=\{X\in\mathbb{R}\}}\Big) = 1$$

Nap. • Vrijedi i obrat: svaka takva f-ja je funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable.

• F-ja gustoće jedinstveno određuje "distribuciju" neprekidne slučajne varijable.

• F-ja gustoće nije jedinstvena: npr. ako f_X promijenimo u konačno mnogo točaka, to će opet biti gustoća od X. ■