

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

2. kolokvij - 23. lipnja 2022.

ZADATAK 1

(2+3+4 boda)

- (a) Definirajte vektorski produkt za vektore iz V^3 .
- (b) Dokažite kvaziasocijativnost vektorskog produkta, tj. da je

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}), \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (c) Definirajte kut između dvije ravnine i izvedite formulu za kosinus kuta između ravnina $\pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $\pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Sve svoje tvrdnje precizno iskažite i dokažite!

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

2. kolokvij - 23. lipnja 2022.

ZADATAK 2

(4+5 bodova) Dan je trokut ABC s vrhovima $A(0, 0, 3)$, $B(1, 0, 0)$ i $C(0, 2, 0)$. Na stranicama \overline{AB} , \overline{BC} i \overline{AC} redom se nalaze točke A' , B' i C' takve da vrijedi

$$\frac{|\overline{AA'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{BB'}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{CC'}|}{|\overline{AC}|} = \mu \in \langle 0, 1 \rangle.$$

- (a) Postoji li parametar $\mu \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da je trokut $A'B'C'$ pravokutan s pravim kutom pri vrhu B' ?
- (b) Dokažite da postoji jedinstveni $\mu \in \langle 0, 1 \rangle$ za koji je udaljenost između težišta trokuta ABC i polovišta dužine $\overline{B'C'}$ minimalna.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

2. kolokvij - 23. lipnja 2022.

ZADATAK 3

(9 bodova)

a) Dokažite da za proizvoljne vektore $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ vrijedi sljedeća formula:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

b) Izračunajte volumen kose četverostrane piramide čija je baza razapeta vektorima $\vec{u} = (2, 1, 0)$ i $\vec{v} = (3, 0, -1)$, a bočni brid vektorom $\vec{w} = (1, 2, 4)$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

2. kolokvij - 23. lipnja 2022.

ZADATAK 4

(9 bodova) Odredite jednadžbu pravca p koji prolazi točkom $(1, 0, 1)$, siječe pravac

$$q \dots \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2},$$

a njegova ortogonalna projekcija na ravninu $-x + y + 2z - 4 = 0$ prolazi točkom $(-1, 1, 1)$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

2. kolokvij - 23. lipnja 2022.

ZADATAK 5

(2+3+4 boda) Zadani su pravci

$$p_1 \dots \frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-2}{1}, \quad p_2 \dots \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1}, \quad p \dots \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{0}.$$

- (a) Odredite jednadžbu ravnine π koja sadrži pravce p_1 i p_2 te točku presjeka S ravnine π i pravca p .
- (b) Odredite jednadžbu ortogonalne projekcije p' pravca p na ravninu π .
- (c) Označimo s α kut između pravca p i ravnine π , te neka je $T(9, 2, 3)$. Odredite točku T' koja je dobivena rotacijom točkom T oko točke S unutar ravnine određene sa S, T i p' za kut 4α (smjer rotacije je od točke T prema pravcu p').