

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 2**

Drugi kolokvij – 21. lipnja 2023.

**Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.** Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i geometrijskog pribora.

**Zadatak 1.**

- (a) Definirajte komplanaran skup vektora u  $V^3$ .

Odredite nužan i dovoljan uvjet na vektore  $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$  koji nisu nulvektori da skup

$$\{\vec{a}, \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b}, (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}, \vec{a} + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})\vec{b}\} \subset V^3$$

bude komplanaran. Obrazložite svoj odgovor.

- (b) Dokažite da je površina paralelograma razapetog nekolinearnim vektorima  $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$  jednaka  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .
- (c) Iskažite i dokažite formulu za kut između pravca i ravnine u  $E^3$ . Odredite mjeru kuta u stupnjevima ili radijanima između  $y$ -osi i ravnine zadane jednačbom  $x + y = 2$ .

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 2**

Drugi kolokvij – 21. lipnja 2023.

**Zadatak 2.** Neka je  $ABCD$  paralelogram. Točke  $P$  i  $Q$  nalaze se redom na stranicama  $\overline{AD}$  i  $\overline{BC}$  i pritom za neke  $\lambda, \mu \in \langle 0, 1 \rangle$  vrijedi

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AD} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{CQ} = \mu \overrightarrow{CB}.$$

Neka se pravci  $BD$  i  $PQ$  sijeku u točki  $S$ .

- a) U kojem omjeru točka  $S$  dijeli dužinu  $\overline{BD}$  ?
- b) Odredite nužan i dovoljan uvjet na  $\lambda$  i  $\mu$  da bi točke  $A$ ,  $C$  i  $S$  bile kolinearne.

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 2**

Drugi kolokvij – 21. lipnja 2023.

**Zadatak 3.**

a) Dokažite da za proizvoljne vektore  $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$  vrijedi Lagrangeov identitet

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

b) Dani su vektori  $\vec{a} = (2, -2, -1)$  i  $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ .

Odredite najmanji i najveći mogući volumen paralelepipeda razapetog vektorima  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , ako je  $\vec{c} \in V^3$  neki vektor duljine 3.

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 2**

Drugi kolokvij – 21. lipnja 2023.

**Zadatak 4.** Zadani su pravci

$$p \dots \frac{x+3}{-4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{2} \quad \text{i} \quad q \dots \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}.$$

- a) Pokažite da se dani pravci sijeku i odredite jednadžbe simetrala kutova koje ti pravci određuju.
- b) Odredite u kojim točkama pravac  $p$  siječe svaku od koordinatnih ravnina.

**ELEMENTARNA MATEMATIKA 2**

Drugi kolokvij – 21. lipnja 2023.

**Zadatak 5.** Dana je točka  $A = (1, 1, -1)$  i pravac

$$p \dots \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 3y + z = 0. \end{cases}$$

Neka je  $\pi$  ravnina koja sadrži točku  $A$  i okomita je na pravac  $p$ .

Odredite sve točke na pravcu  $p$  koje su od ravnine  $\pi$  udaljene za  $\sqrt{6}$ .