Ramseyjeva teorija

Nina Kamčev

Prirodoslovno matematički fakultet – Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu
E-mail adresa: Nina.Kamcev@math.hr

Sadržaj

Predgovor

Ovo su bilješke koje obuhvaćaju gradivo Ramseyjeve teorije u sklopu kolegija *Ramseyjeva i ergodska teorija* koji se održava na PMF – Matematičkom odsjeku u sklopu doktorskog studija tijekom akademske godine 2022./2023. Bilješke i materijal kolegija se uglavnom temelje na knjizi Grahama, Rothschilda i Spencera [**GRS13**], te na bilješkama Conlona, Leadera i Schachta [**Con21b**, **Lea04**, **Sch11**].

Kroz cijeli tekst koristit ćemo **podebljani** font za pojmove koje upravo definiramo, a *kurziv* za stvari koje želimo naglasiti ili neformalno definirati.

Sve čitatelje koji uoče dodatne greške bilo kakve prirode molim da mi na njih ukažu putem maila.Posebno su dobrodošli savjeti vezani uz hrvatsku terminologiju.

Posljednja izmjena napravljena je 7. veljače 2023.

POGLAVLJE 1

Uvod i pregled Ramseyeve teorije

Ramseyeva teorija je područje diskretne matematike. Počinjemo s prototipičnim teoremom iz ovog područja. Neka K_n označava potpuni graf na n vrhova.

Teorem 1.1 (Ramsey 1930). *Za dani t, postoji cijeli broj n takav da bilo koje crveno-plavo bojenje bridova potpunog grafa K_n sadrži jednobojnu kopiju K_t (to jest, kopiju K_t čiji su svi bridovi su u jednoj boji).*

Ova izjava ilustrira općenito načelo u Ramseyevoj teoriji: željena konfiguracija bit će u potpunosti sadržana u jednom od elemenata particije, za bilo koju konačnu particiju neke dovoljno velike strukture. Izreći ćemo još nekoliko primjera ovog načela, počevši s rezultatima Ramseyevog tipa za cijele brojeve. Od sada koristimo naziv **r-bojenje** skupa za particiju na r dijelova (ili klasa), a svaka podstruktura koja se u potpunosti nalazi unutar jednog dijela naziva se *jednobojnom* strukturom.

Najraniji opće poznati rezultat ove vrste je Hilbertova lema o kocki iz 1892., koju ovdje ne navodimo (vidi, primjerice, [**GRS13, Sch11**]). Godine 1916. Schur je dokazao da za bilo koje r i dovoljno veliko n, svako r-bojenje skupa $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ sadrži jednobojnu trojku $\{x, y, z\}$ tako da je $x + y = z$. (Takve trojke se nazivaju **Schurovim trojkama**). Van der Waerden dokazao je analognu izjavu o k-članim aritmetičkim nizovima (k-AP).

Teorem 1.2 (Van der Waerden 1927.). *Za svaki k i r, postoji n takav da svako r-bojenje skupa $[n]$ sadrži jednobojni k-AP.*

Ovaj je teorem također motiviran problemima iz teorije brojeva u vezi s kvadratnim ostacima, o kojima će biti govora u odgovarajućem poglavlju. Van der Waerdenov teorem i njegova proširenja pokrenuli su mnoga istraživanja u prilično različitim područjima matematike, uključujući teoriju grafova, ergodičku teoriju i analitičku teoriju brojeva.

Kao što je spomenuto, 1930. Ramsey je dokazao Teorem 1.1 (ili zapravo njegovu beskonačnu verziju), kao i njegova proširenja na hipergrafove i na proizvoljan broj boja (vidi poglavlje 2.1). Njegova motivacija bila je logički problem. Teorem je zatim ponovno dokazan od strane Skolema, te Erdősa i Szekeresa [**ES35**], s motivacijom iz diskretne geometrije. Štoviše, pošteno je reći da su Erdős i Szekeres popularizirali Ramseyev teorem – riječima Grahama, Rotschilda i Spencera, 'teško je precijeniti učinak njihovog članka [**ES35**]'.

Za bilo koji rezultat Ramseyeva tipa može se tražiti jača "verzija gustoće": ako jedan podskup sadrži najmanje 1% elemenata "velike strukture", sadrži li nužno željenu konfiguraciju? Lako je vidjeti da se Teorem 1.1 ne može poopćiti u ovom smjeru (vježba!). Međutim, "verzija gustoće" za Teorem 1.2 je slavni rezultat Szemerédija.

TEOREM 1.3 (Szemerédi 1975). *Za $\epsilon > 0$ i cijeli broj k, postoji n takav da svaki skup $S \subset [n]$ veličine $|S| \geqslant \epsilon n$ sadrži k-člani aritmetički niz.*

Za $k = 3$, tvrdnju je ranije dokazao Roth [**Rot53**]. Rothov je teorem potvrdio hipotezu Erdősa i Turána iz 1936. Izvorni dokaz bio je kombinatorni i uveo je revolucionarni alat nazvan Szemerédijeva lema o regularnosti Regularity Lemma (Szemerédi je osvojio Abelovu nagradu). Od tada je pronađeno više dokaza, primjerice Furstenbergov ergodski dokaz i Gowersov dokaz s najjačim ogradama, koji koristi diskretnu Fourierovu analizu, i uvodi "norme uniformnosti" (*uniformity norms*). Iako je dokazan 1975. godine, utjecaj ovog rezultata osjeća se i danas. Na primjer, bio je ključni sastojak u Green-Tao dokazu da prosti brojevi sadrže proizvoljno duge aritmetičke nizove.

1.1. Rezultati i metode u Ramseyevoj teoriji za grafove

Između ostaloga, Erdős i Szekeres [**ES35**] prvi su dali razumnu ocjenu za tzv. *Ramseyev broj*; da bismo opisali njihov rezultat, potrebne su nam sljedeće definicije.

DEFINICIJA 1.4. Za dane grafove G i H, kažemo da je G H-**Ramsey** i pišemo

$$G \xrightarrow{r} H,$$

ukoliko svako r-bojenje bridova grafa G sadrži jednobojnu kopiju grafa H. Kada je $r = 2$, obično pišemo samo $G \to H$.

Ramseyev broj $r(H)$ definiramo[1] kao

$$r(H) = \min\{n \in \mathbf{N} : K_n \to H\}.$$

Erdős i Szekeres su dokazali ogradu $r(K_t) \leqslant 4^t$. Tijekom godina, mnogo je truda uloženo u poboljšanje ove ograde ili u pokazivanje da je blizu optimalne, sa vrlo skromnim pomakom (zadnji napredak ostvario je Sah 2020.). Međutim, ti su problemi bili izrazito utjecajni u kombinatorici, te su igrali ključnu ulogu u razvoju slučajnih grafova i vjerojatnosne metode, kao i teorije kvazislučajnosti (*quasirandomness*). Neke od ovih poveznica istražit ćemo u Odjeljku 2.1.

Odmaknemo li se od potpunih grafova, počinje se pojavljivati niz zanimljivih fenomena. Na primjer, za put P_n, Gerencsér i Gyárfás su dokazali

$$r(P_n) = \frac{3n}{2}(1 + o(1)).$$

Poznati rezultat Chvátala, Rödla, Szemerédija i Trottera [**CRST83**] kaže da ako je H graf na n vrhova maksimalnog stupnja Δ, tada je Ramseyev broj $r(H)$ najviše $c(\Delta)n$ za neku konstantu $c(\Delta)$. To jest, 'Ramseyev broj grafova ograničenog stupnja raste linearno sa brojem vrhova'. Dat ćemo kratki dokaz pomoću leme o regularnosti.

Također ćemo raspravljati o sljedećem pitanju: Kada se 'graf domaćin' K_n može zamijeniti 'rijetkim grafom' G? Pojam rijetkosti može biti, primjerice, broj bridova ili maksimalna veličina klike. Konkretno pitanje ovog tipa je sljedeće.

[1] Formalno, prvo bismo trebali dokazati da je $r(H)$ konačan.

PITANJE 1.5. Postoji li graf G bez K_4 takav da vrijedi

$$G \to K_3?$$

(Riječima, svako crveno-plavo bojenje bridova G sadrži jednobojni trokut.)

Prirodni kandidat za takav rijetki graf je slučajni graf $G_{n,p}$, pa se takvi rezultati često dobivaju i vjerojatnosnom metodom.

Zanimljivi su i Ramseyevi brojevi za *hipergrafove*, pogotovo radi iznenađujućih doljnjih ograda koje se dobivaju tzv. 'polusličajnim konstrukcijama'.

Kasnije u kolegiju, mogli bismo prikazati još nekoliko primjena klasičnih vjerojatnosnih alata i ideja na probleme Ramseyevog tipa (za grafove i aritmetičke strukture).

1.2. Rezultati i metode u aritmetičkoj Ramseyevoj teoriji

Pokazat ćemo i dokaz Rothovog teorema uz pomoć teorije grafova, koji koristi metodu regularnosti. Inače, Rothov originalni argument je Fourier-analitički argument, i možemo ga pokazati ovisno o interesu sudionika. Zatim ćemo dati kombinatorni i topološko-dinamički dokaz van der Waerdenovog teorema.

Schurove trojke i aritmetički nizovi su primjeri rješenja sustava linearnih jednadžbi. Prirodno je postaviti pitanje, koji sustavi linearnih jednadžbi su *rješivi* u svakoj *konačnoj* particiji cijelih brojeva? Odgovor na ovo pitanje daje Radov teorem. Konkrento, za jednu jednadžbu, imamo sljedeći toerem.

TEOREM 1.6 (Rado, 1933.). *Jednadžba $c_1x_1 + \cdots + c_mx_m = 0$ s cjelobrojnim koeficijentima ima jednobojno rješenje u svakoj particiji prirodnih brojeva na konačni broj skupova ako i samo ako neki neprazni podskup koeficijenata c_i ima sumu 0.*

Hindman je dokazao vrlo snažnu beskonačnu izjavu Ramseyevog tipa: za svaku r-particiju od $\mathbb{N}$, jedan dio sadrži beskonačni niz $x_1, x_2, \ldots$, kao i sve njihove konačne sume (to jest, brojeve oblika $\sum_{i\in I} x_i$ za konačne I). Ova izjava ima zanimljivi dokaz uz pomoć ultrafiltera, algebre i analitičkih alata, koji bismo mogli pokazati.

Nedavno je došlo do breakthrough-rezultata o donjim ogradama za 'van der Waerdenov' broj $w(3, k)$ zahvaljujući Greenu i Hunteru. Mogli bismo pokazati slabiju varijantu ove ograde, $w(3, k) \geqslant k^2(1 - o(1))$ (Hunter, 2022.), koja koristi vjerojatnosni argument i povezana je s metodama iz Poglavlja 2.1.

1.3. Rezultati Ramseyevog tipa u rijetkim slučajnim skupovima

Posljednjih godina postoji trend u kombinatorici prema dokazivanju da neki dobro poznatih teoremi, kao što su Ramseyev teorem, Szemerédijev teorem i Turánov teorem, imaju "rijetke slučajne" analogone. Na primjer, "rijedak slučajni analogon" Ramseyeva teorema je tvrdnja da ako definiramo slučajni podgraf G od K_n odabirom svakog ruba nezavisno nasumično s nekom malom vjerojatnošću $p = p(n)$, tada će *tipično* svako crveno-plavo bojanje grafa G sadržavati jednobojnu kopiju K_k. Pitanje je za koji p takva izjava vrijedi s vjerojatnošću 1, kada $n \to \infty$?

Oko 2015. Conlon i Gowers, te neovisno Schacht, su razvili snažne i općenite metode za prijenos (*transference*) različitih ekstremnih iskaza u nasumično okruženje. Mogli bismo ocrtati glavne ideje u ovim dokazima.

Navodimo ogledni iskaz jednog takvog teorema.

TEOREM 1.7. *Neka je $p = cn^{-2/(\ell+1)}$. Za dovoljno mali c, s velikom vjerojatnošću*[2]*, postoji 2-bojenje bridova $G_{n,p}$ bez jednobojne kopije K_ℓ. S druge strane, za dovoljno veliki c, s velikom vjerojatnošću, bilo koje 2-bojenje $G_{n,p}$ sadrži jednobojnu kopiju K_ℓ.*

Ukratko, $p = n^{-2/(\ell+1)}$ je *(grubi) prag (coarse threshold)* za ℓ-Ramseyevo svojstvo grafa $G_{n,p}$

Kao što smo spomenuli, ovakve izjave postoje za Turánov i Szemerédijev teorem.

[2] tj. vjerojatnost teži u 1 kada $n \to \infty$

POGLAVLJE 2

Ramseyeva teorija za grafove, Prvi dio

Ovo poglavlje se uglavnom temelji na predavanjima Davida Conlona [**Con21b**].

2.1. Ramseyev teorem za potpune grafove: prve ograde

Za dokaz Ramseyevog teorema, korisno je proširiti koncept Ramseyevog broja na tzv. *van-dijagonalni* režim.

DEFINICIJA 2.1. Za dane grafove H i J, pišemo

$$K_n \to (H, J)$$

ako svako crveno-plavo bojenje bridova grafa K_n sadrži crvenu kopiju grafa H ili plavu kopiju grafa J.

Ramseyev broj $r(H, J)$ je definiran sa

$$r(H, J) = \min\{n : n \to (H, J)\}.$$

Za potpune grafove, označavamo $r(s, t) = r(K_s, K_t)$ i $r(t) = r(K_t, K_t)$.

Također, promijenit ćemo jezik sa crveno-plavog bojenja na klike ili nezavisne skupove. **Nezavisan skup** u grafu G je skup vrhova koji ne sadrži nijedan brid grafa G. Primijetimo da je svojstvo $K_n \to K_t$ ekvivalentno svojstvu 'svaki graf G na n vrhova sadrži s-kliku' ili t-nezavisan skup.

Ramseyev teorem tvrdi da je $r(t)$ konačan broj, a prva gornja ograda potječe iz [**ES35**].

TEOREM 2.2 (Erdős, Szekeres, 1935.).

$$r(s+1, t+1) \leqslant r(s, t+1) + r(s+1, t).$$

DOKAZ. Neka je G graf na n vrhova bez klike veličine $s+1$ ili nezavisnog skupa veličine $t+1$. Svaki vrh v ima maksimalno $r(s, t+1) - 1$ susjeda; u protivnom, skup susjeda vrha v sadrži s-kliku ili $(t+1)$-nezavisan skup, kontradikcija.

Analogno, svaki vrh ima maksimalno $r(t+1, s) - 1$ *ne-susjeda.* Slijedi da ukupan broj vrhova zadovoljava

$$n \leqslant 1 + r(s, t+1) - 1 + r(s+1, t) - 1.$$

□

Dokazali smo, primjerice, $r(3, 3) \leqslant 6$. Zapravo vrijedi jednakost: možemo podijeliti bridove klike K_5 na dva ciklusa duljine 5, i nijedan element te particije ne sadrži trokut.

ZADATAK 2.3. Dokažite da je $r(3, 4) \leqslant 9$.

Zadatak 2.4. Dokažite *beskonačne verzije* Teorema 2.2:
(i) $K_\infty \to (K_t, K_t)$, i
(ii) $K_\infty \to (K_\infty, K_\infty)$.
Dokažite uz pomoć *kompaktnosti* da konačna verzija slijedi iz (i).

Lako je izvesti sljedeću ogradu na Ramseyeve brojeve, koja je pedesetak godina ostala najbolja poznata ograda.

Korolar 2.5. *Vrijede ograde*

$$r(s,t) \leqslant \binom{s+t-2}{t-1} \quad i \quad r(t) = O\left(4^t \cdot t^{-1/2}\right).$$

Ove ograde su postrožili Thomason (80-ih), Conlon (2000-ih) i Sah[3] (2021), no glavni član 4^t nije promijenjen.

Asimptotski najbolja donja ograda također se nije promijenila od 1940-ih. Sljedeća ograda dobivena je jednom od prvih primjena vjerojatnosne metode u kombinatorici.

Teorem 2.6 (Erdős).

$$r(t) > 2^{(t-1)/2} \cdot \frac{t}{e}.$$

Dokaz. Neka je G slučajan podgraf K_n u kojem je svaki brid prisutan nezavisno s vjerojatnošću $1/2$, i $n = 2^{(t-1)/2} \cdot \frac{t}{e}$. Tvrdimo da *s pozitivnom vjerojatnošću*, G ne sadrži kliku niti nezavisan skup na t vrhova (nezavisan skup je skup vrhova između kojih nije prisutan nijedan brid), iz čega slijedi postojanje željenog grafa G, tj. particije (ili bojenja) $G \cup G^c$.

Neka je X_t (slučajna varijabla koja označava) broj t-klika u G. Tvrdimo da je $\mathbf{P}[X_t \geqslant 1] \leqslant \mathbf{E}[X_t] < \frac{1}{2}$. Naime,

$$\mathbf{E}[X_t] \leqslant 2^{-\binom{t}{2}} \binom{n}{t} < 2^{-\binom{t}{2}} \frac{n^t}{t!} \leqslant 2^{-\binom{t}{2}} \left(\frac{t \cdot 2^{(t-1)/2}}{e}\right)^t \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{e}{t}\right)^t = \frac{1}{2}, \tag{2.1}$$

pri čemu smo koristili iznos broja n i ogradu $t! \geqslant 2\,(t/e)^t$. Time je dokaz kompletan. □

Tema za seminar 1. Gornje ograde na Ramseyeve brojeve uz pomoć svojstava pseudoslučajnih grafova: Thomason, Conlon, Sah.

*********************** 15. studenoga 2022. ***********************

2.2. Ramseyevi brojevi i konveksni poligoni

Erdős i Szekeres [**ES35**] su na izučavanje Ramseyevih brojeva bili potaknuti problemom Eszter Klein[4]: postoji li n takav da svakih n točaka ravnine u općoj poziciji (pretpostavljeno u daljnjem tekstu) određuje konveksni t-gon? Dokazat ćemo da je n konačan, pa neka $f(t)$ označava minimalni takav broj n.

Prvi dokaz slijedi iz Ramseyevog teorema za 4-uniformne hipergrafove.

[3] Članak prihvaćen u Duke Mathematical Journal.
[4] Klein i Szekeres imaju vrlo zanimljivu biografiju, zbog čega jer Erdős nazvao sljedeći teorem *Teoremom sretnog završetka.*

DEFINICIJA 2.7. Obitelj k-elementnih podskupova skupa n naziva se **k-uniformnim hipergrafom**. (Dakle, slučaj $k = 2$ odgovara grafovima). Potpuni k-uniformni hipergraf (ili k-graf) na skupu vrhova $[n]$ je obitelj svih k-elementnih podskupova skupa $[n]$.

Ramseyev broj $r_k(s,t)$ je minimalan prirodni broj n takav da vrijedi

$$K_n^{(k)} \to (K_s^{(k)}, K_t^{(k)}).$$

ZADATAK 1. Dokažite da je $r_k(t,t)$ konačan (poopćenjem dokaza Teorema 2.2).

TEOREM 2.8. *Za $t \geqslant 4$, $f(t) \leqslant r_4(t,5)$.*

DOKAZ. Neka je $n = r_4(t,5)$, i promatrajmo skup od n točaka u ravnini. Obojimo četiri-elementne skupove ('hiperbridove') na sljedeći način: četvorka S je crvena ukoliko S određuje konveksni poligon, i plava u protivnom.

Tvrdimo da ne postoji skup P od 5 točaka takav da je svaki hiperbrid sadržan u P plavi. Naime, svaki skup od 5 točaka određuje barem jedan konveksni četverokut (vježba!).

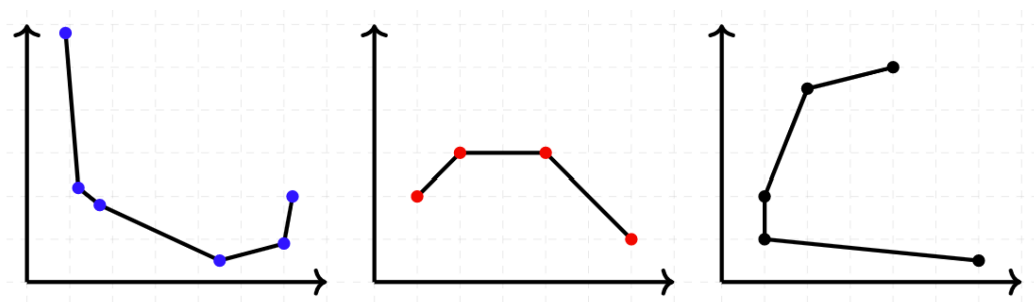
Dakle, Ramseyev teorem povlači da možemo pronaći podskup T veličine t takav da svake četiri točke određuju konveksni četverokut. Skup T čini konveksni t-gon. □

NAPOMENA 2.9. Napomenimo i da se Ramseyev teorem često koristi upravo u ovakvoj varijanti: kada je klika u recimo plavoj boji zabranjena strukturom konkretnog problema. Još jedan primjer iz funkcionalne analize koji mi je spomenuo Bulj.

Međutim, ako uzmemo u obzir geometrijsku strukturu, dobijemo puno bolje ograde.

DEFINICIJA 2.10. Odaberimo koordinatni sustav u ravnini, koji koristimo da bismo definirali nagib pravca između dviju točaka. Skup točaka S se naziva **cup** ukoliko su nagibi koje određuju te točke rastući niz, a **cap** ukoliko su nagibi padajući.

Neka je $g(s,t)$ minimalni broj n takav da svakih n točaka u općenitoj poziciji sadrži s-cup ili t-cap.[5]



Očito je $f(t) \leqslant g(t,t)$. Dokaz vrlo sličan Ramseyevom teoremu pokazuje sljedeću ogradu, iz koje slijedi $g(t) \leqslant 4^t$.

[5] Formalno bismo prvo trebali dokazati da $g(s,t)$ postoji, no to će slijediti iz sljedećeg teorema. Uvijek koristimo koordinatni sustav u kojem točke skupa S imaju različite x-koordinate.

TEOREM 2.11 ([**ES35**]). *Funkcija $g(s,t)$ je dobro definirana, i vrijede ograde*

$$g(s+1,t+1) \leqslant g(s+1,t) + g(s,t+1) - 1 \quad i \quad g(s,t) \leqslant \binom{s+t-4}{t-2} + 1.$$

DOKAZ [**Jun**]. Prvo primijetimo da vrijedi $g(3,s) = g(s,3) = s$.

Za $s,t \geqslant 3$, pretpostavimo da su vrijednosti $g(s+1,t)$ i $g(s,t+1)$ dobro definirane, i neka je $n = g(s+1,t) + g(s,t+1) - 1$. Dokazat ćemo

$$g(s+1,t+1) \leqslant n. \tag{2.2}$$

Neka je S skup veličine n koji ne sadrži $(s+1)$-cup ili $(t+1)$-cap. Bez smanjenja općenitosti, S sadrži s-cup. Neka je $\prec$ poredak točaka S po x-koordinatama. Neka je L skup svih točaka koje su minimalni (*lijevi*) krajevi s-cupova u S.

Tvrdimo da skup $S \setminus L$ ne sadrži s-cup ili $(t+1)$-cap. Druga tvrdnja je očita, a prva slijedi iz činjenice da uklanjanjem skupa L *uništavamo* sve s-cupove. Slijedi da je $|S \setminus L| \leqslant g(s,t+1) - 1$, i $|L| \geqslant g(s+1,t)$.

Dakle, L sadrži t-cap T. Neka su $X \prec Y$ dvije maksimalne (ili *najdesnije*) točke tog capa. Po definiciji L, Y je minimalna točka nekog s-cupa; označimo sljedeću točku tog cupa sa Z. Ako su točke XYZ cup, onda X proširuje promatrani s-cup, kontradikcija. S druge strane, ako su točke XYZ cap, onda Z proširuje cap T, što opet dovodi do kontradikcije. Dakle, vrijedi (2.2).

Nejednakost $g(s,t) \leqslant \binom{s+t-2}{t-1}$ slijedi iz $f(s,3) = s = \binom{s}{1}$ i (2.2), naime

$$g(s,t) \leqslant \binom{s+t-5}{t-2} + \binom{s+t-5}{t-3} + 2 - 1 = \binom{s+t-4}{t-2} + 1.$$

□

Međutim, u ovom slučaju, vrijedi jednakost! Ovo je u kontrastu s Ramseyevim teoremom, i jedan od rijetkih problema ovog tipa u kojem imamo točan rezultat.

TEOREM 2.12 ([**ES35**]). *Za $s,t \geqslant 3$, vrijedi*

$$g(s+1,t+1) > g(s+1,t) + g(s,t+1) - 2.$$

SKICA DOKAZA. Neka je $L(s+1,t)$ skup točaka veličine $g(s+1,t)-1$ koji ne sadrži $(s+1)$-cup ili t-cap. Možemo pretpostaviti da su nagibi svih pravaca koje određuju točke skupa $L(s+1,t)$ maksimalno 0.1. Skup $L(s,t+1)$ je definiran slično.

Uzmimo pravac nagiba -1, i postavimo kopije skupova $L(s+1,t)$ i $L(s,t+1)$ na dovoljno daleke pozicije 'u okolini' tog pravca. Time smo osigurali da svake dvije točke iz $L(s+1,t)$ zajedno sa točkom iz $L(s,t+1)$ čine cap, te svake dvije točke iz $L(s,t+1)$ zajedno sa točkom iz $L(s+1,t)$ čine cup.

Takva konfiguracija ne sadrži $(s+1)$-cup; naime, $(s+1)$-cup S bi presijecao oba skupa $L(s+1,t)$ i $L(s,t+1)$, pa bi moralo vrijediti $|S \cap L(s+1,t)| = 1$ (u protivnom L sadrži 3-cap). Slijedi $|S \cap L(s,t+1)| \geqslant s$, što je u kontradikciji s definicijom $L(s,t+1)$. Slični argument vrijedi za $(t+1)$-capove. □

Naravno, gornji primjer točno zadovoljava restrikcije koje je postavio dokaz Teorema 2.11 – minimalne točke s-cupova ųne upravo skup $L(s+1,t)$, veličine $g(s+1,t)-1$, i taj skup ne sadrži t-cap.

Primijetimo da je ovo samo primjer za cups-caps problem, dok je optimalna ograda za originalnu funkciju $f(t)$ još uvijek $f(t) \geqslant 2^{t-2}+1$. Erdős i Szekeres su pretpostavili da vrijedi $f(t) = 2^{t-2}+1$, a dokazani su slučajevi $t \leqslant 6$.

Tema za seminar 2. Suk [**Suk17**] je 2017 dokazao $f(t) \leqslant 2^{t+o(t)}$, prekrasnim dokazom koji preporučam pročitati.

Tema za seminar 3. Ramsseyevi brojevi za hipergrafove (Conlon, Fox, Sudakov) uključuje lijepe kombinatorne dokaze i vjerojatnosne argumente.

2.3. Vandijagonalni Ramseyevi brojevi

Sad ćemo se usredotočiti na vandijagonalne Ramseyeve brojeve $r(s,t)$, pri čemu je vrijednost s fiksna (recimo $s = 3, 4$), a t raste. Iz Teorema 2.2 slijedi $r(s,t) = O(t^{s-1})$ (pri čemu konstanta ovisi o s).

Dokazat ćemo odgovarajuću donju ogradu uz još jednu primjenu vjerojatnosne metode (tzv. metode *alteracije*). Baza logaritma je e osim ako je eksplicitno naznačena.

Teorem 2.13 (Izvor: [**AS16, Yua**]; Originalni dokaz: Spencer 1977). *Za dani s, odgovarajuću konstantu c_s i svaki t vrijedi*

$$r(s,t) \geqslant c_s \left(\frac{t}{\log t}\right)^{s/2}. \tag{2.3}$$

Dokaz. Neka je $N = c_s \left(\frac{t}{\log t}\right)^{s/2}$. Tvrdimo da za svaki n i za svaki $p \in (0,1)$ vrijedi

$$r(s,t) > n - \binom{n}{s} p^{\binom{s}{2}} - \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}}. \tag{2.4}$$

Promotrimo slučajan graf $G_{n,p}$ s vjerojatnošću bridova p. Neka je X ukupni broj klika od s vrhova plus i nezavisnih skupova od t vrhova. Označimo $x = \mathbf{E}[X]$, i primijetimo da vrijedi

$$x = \binom{n}{s} p^{\binom{s}{2}} + \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}}.$$

Postoji graf G (po definiciji očekivane vrijednosti) u kojemu vrijedi $X \leqslant x$ (tj. G sadrži najviše x 'loših' skupova). Uklonimo po jedan vrh iz svake s-klike i iz svakog t-nezavisnog skupa u G. Dobiveni graf ima barem $n - x$ vrhova, i time dokazuje tvrdnju.

Preostaje nam optimizacija: odabrati n (što veći mogući) i $p(n)$ takav da je $x < \frac{n}{2}$. Iznosi $p = n^{-2/s}$, $n = 2c_s(t/\log t)^{s/2}$ nam daju željenu nejednakost. Slijedi

$$r(s,t) \geqslant n - x \geqslant \frac{n}{2} \geqslant c_s \left(\frac{t}{\log t}\right)^{s/2}.$$

□

Zadatak 2. Koju ogradu daje samo nemodificirani slučajni graf?

NAPOMENA 2.14. Intuicija za izbor p i $n(t)$ je ugrubo kako slijedi: kako bi član $\binom{n}{s}p^{\binom{s}{2}}$ bio najvise $\frac{n}{4}$, biramo $p = \frac{1}{2}n^{-2/s}$. Drugi član, $\binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}}$, nam onda daje restrikciju za $t(n)$.

Primijetimo i da ključno poboljšanje u odnosu na čisti slučajni graf dolazi upravo od zahtjeva $\binom{n}{s}p^{\binom{s}{2}} < \frac{n}{4}$, koji je slabiji od $\binom{n}{s}p^{\binom{s}{2}} < 1$.

Bolju (i trenutno najjaču) poznatu donju ogradu možemo dobiti uz pomoć Lovászeve *lokalne leme*[6]. Naime,

$$r(s,t) \geqslant c_s \left(\frac{t}{\log t}\right)^{(s+1)/2}.$$

2.3.1. Lovászeva lokalna lema. Ova lema je ključni alat u vjerojatnosnoj kombinatorici. Često želimo dobiti strukturu (primjerice, slučajni graf) koja izbjegava određeni skup događaja (primjerice, s-klike i t-nezavisne skupove). U dosadašnjim dokazima nismo koristili ništa o korelaciji tih događaja, već samo subaditivnost. Kao posljedicu, dobili smo činjenicu da neželjenje događaje izbjegavamo s visokom vjerojatnošću.

Lovászeva lema je alat koji je vrlo koristan u situaciji kada su naši događaji uglavnom nezavisni, pa ih možemo izbjeći i kada nam subaditivnost to ne dopušta.

Neka su $A_1, A_2, \dots, A_n$ događaji u vjerojatnosnom prostoru. Graf D na skupu vrhova $V = [n]$ se naziva **grafom ovisnosti** za događaje $A_1, \dots, A_n$ ako je za svaki $i \in [n]$ događaj A_i nezavisan o $\{A_j : (i,j) \notin D\}$ ('jointly independent').

Iskazat ćemo prvo jednostavniju, *simetričnu* verziju. Izvor: [**AS16**].

TEOREM 2.15. *Neka su A_1, $A_2, \dots, A_n$ događaji u vjerojatnosnom prostoru, i $\mathbf{P}[A_i] \leqslant p$ za $i \in [n]$. Neka je D njihov graf ovisnosti, i d makismalni stupanj grafa D. Ako vrijedi*

$$ep(d+1) \leqslant 1,$$

onda je $\mathbf{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n}\right] A_i > 0$.

Primijetimo i da zaključak ne ovisi o broju događaja n. Prethodna izjava slijedi iz sljedećeg teorema.

TEOREM 2.16 (Lovászeva lokalna lema, 1975). *Neka su $A_1, A_2, \dots, A_n$ događaji u vjerojatnosnom prostoru. Pretpostavimo da je $D = ([n], E)$ graf ovisnosti za $A_1, \dots, A_n$, i da postoje brojevi $x_i \in [0,1]$ koji zadovoljavaju*

$$\mathbf{P}[A_i] \leqslant x_i \prod_{i,j \in D} (1 - x_j) \tag{2.5}$$

za $i \in [n]$. Slijedi da je $\mathbf{P}\left[\bigcap_{i\in[n]} \bar{A}_i\right] \geqslant \prod_{i\in[n]}(1-x_i) > 0$.

*********************** 22. studenoga 2022. ***********************

DOKAZ ([**AS16**]). Prvo ćemo indukcijom po $|S|$ dokazati da za $S \subset [n]$ i $i \notin S$,

$$\mathbf{P}\left[\bar{A}_i \mid \bigcap_{j\in S} \bar{A}_j\right] \geqslant 1 - x_i. \tag{2.6}$$

[6] Izgovor: 'Lovas'. Inače, Lovász je dobitnik Abelove nagrade 2022.

Tvrdnja vrijedi za $S = \emptyset$. Pretpostavimo da vrijedi za sve skupove manje od $|S|$. Podijelimo S na $S_1 = \{j \in S : (i,j) \in D\}$ is $S_2 = S \setminus S_1$, i označimo $B_2 = \bigcap_{j \in S_2} \bar{A}_j$. Imamo

$$\mathbf{P}\left[A_i \mid B_2\right] = \frac{\mathbf{P}\left[A_i \cap \left(\bigcap_{j \in S_1} \bar{A}_j\right) \mid B_2\right]}{\mathbf{P}\left[\bigcap_{j \in S_1} \bar{A}_j \mid B_2\right]}.$$

Za brojnik, primijetio da je A_i nezavisan o B_2, pa vrijedi

$$\mathbf{P}\left[A_i \cap \left(\bigcap_{j \in S_1} \bar{A}_j\right) \mid B_2\right] \leqslant \mathbf{P}\left[A_i \mid B_2\right] = \mathbf{P}\left[A_i\right] \leqslant x_i \prod_{(i,j) \in D} (1 - x_j),$$

pri čemu smo za zadnju nejednakost koristili hipotezu (2.5). Za nazivnik, koristit ćemo pretpostavku indukcije. Naime, neka je $S_1 = \{j_1, \ldots, j_r\} \neq \emptyset$. Raspisujemo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[\bar{A}_{j_1} \cap \cdots \cap \bar{A}_{j_r} \mid B_2\right] = \mathbf{P}\left[\bar{A}_{j_1} \mid B_2\right] \cdot \mathbf{P}\left[\bar{A}_{j_2} \mid \bar{A}_{j_1} \cap B_2\right] \ldots \\ \mathbf{P}\left[\bar{A}_{j_r} \mid \bar{A}_{j_1} \cap \cdots \cap \bar{A}_{j_{r-1}} \cap B_2\right] \geqslant (1 - x_{j_1}) \ldots (1 - x_{j_r}).\end{aligned}$$

Time smo dokazali (2.6). Željena ograda sada slijedi iz

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[\bigcap_{i \in [n]} \bar{A}_i\right] &= \mathbf{P}\left[\bar{A}_1\right] \cdot \mathbf{P}\left[\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1\right] \ldots \mathbf{P}\left[\bar{A}_n \mid \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{n-1}\right] \\ &\geqslant (1 - x_1) \ldots (1 - x_n).\end{aligned}$$

□

U posljednje vrijeme su algoritamske varijante predmet intenzivnog istraživanja, počevši od rada Mosera i Tardosa [**MT10**].

2.3.2. Ramseyevi brojevi pomoću Lovászeve lokalne lema. Ova lema se (u simetričnoj verziji) može iskoristiti za bolju ogradu za $r(t,t)$... za faktor 2. Međutim, u vandijagonalnom režimu, dobivamo znatno poboljšanje. Naime, za slučaj $s = 3$, svaki trokut dijeli brid sa samo $3(n-3)$ trokuta, u odnosu na ukupni broj trokuta $\binom{n}{3}$.

Teorem 2.17 (Spencer, 1977.). *Postoji konstanta c sa svojstvom da za svaki t vrijedi*

$$r(3,t) \geqslant \frac{ct^2}{\log^2 t}.$$

Dokaz. U slučajnom grafu $G(n,p)$ (pri čemu ćemo p odrediti kasnije), neka je A_S događaj kada tri vrha skupa S čine trokut. Za svaki skup S veličine t, neka je B_S događaj u kojem je S nezavisan skup u $G(n,p)$.

Konstruirajmo graf ovisnosti D ňa skupu vrhova $V(D) = \binom{[n]}{3} \cup \binom{[n]}{t}$. Vrhovi S i S' su susjedni ako vrijedi $|S \cap S'| \geqslant 2$. Svaki čvor S veličine 3 ima najviše $3n$ susjeda u $\binom{[n]}{3}$ i najviše $3\binom{n}{t-2}$ susjeda u $\binom{[n]}{t}$. Za čvor B_S, odgovarajuće ograde su $\binom{t}{2}n$ i $t^2\binom{n}{t-2}$. Po Teoremu 2.16, dovoljno je zadovoljiti nejednakosti

$$p^3 \leqslant x(1-x)^{3n}(1-y)^{3\binom{n}{t-2}}, \tag{2.7}$$

$$(1-p)^{\binom{t}{2}} \leqslant y(1-x)^{\binom{t}{2}n}(1-y)^{t^2\binom{n}{t-2}}. \tag{2.8}$$

za odabrane parametre p, x, y, t. Kao i prije, cilj nam je odabrati $t(n)$ što manji mogući.

Nije teško provjeriti da vrijednosti $y = c_1(t^2\binom{n}{t-2})^{-1}$, $p = c_2 n^{-1/2}$, $x = c_3 p^3$ i $t = c_4 n^{1/2}\log n$, sa odgovarajućim izborom konstanti, zadovoljavaju dane restrikcije. $\square$

2.3.2.1. *Intuicija za parametre.* Desne strane (2.7) i (2.8) nam daju gornju ogradu na p i $1-p$, pa želimo da ta desna strana bude što veća. (Glavna restrikcija na t će nam doći iz $e^{-p\binom{t}{2}}$, pa želimo što veći p). Dakle za (2.7) nam odgovara da je y što manji, a za (2.8) da je x što manji.

Prirodno je uzeti $y = c_1 t^{-2}\binom{n}{t-2}^{-1}$, jer funkcija $y(1-y)^{\binom{n}{t-2}}$ u toj vrijednosti postiže svoj maksimum; manji y 'ne pomaže' za (2.7) jer je član $y^{3\binom{n}{t-2}}$ ionako već blizu 1.

Za x, restrikcija (2.7) povlači $x \geqslant p^3$, Iz (2.8), dobivamo dvije restrikcije:

$$e^{-p\binom{t}{2}} \leqslant e^{-xn\binom{t}{2}} \quad \text{i} \quad e^{-p\binom{t}{2}} \leqslant y.$$

Prva nejednakost povlači $p \geqslant xn \geqslant p^3 n$, dakle $p \leqslant n^{-1/2}$. Druga nejednakost daje $t > p^{-1}\log n = n^{-1/2}\log n$. Ovakav izbor parametara, uz odgovarajuće konstante, je dan u prethodnom dokazu.

Naposljetku, spomenimo da je Ramseyev broj trokuta naspram klika poznat do na konstantu: $r(3,t) = \Theta(t^2/\log t)$. Donju ogradu nam daje sljedeći graf 'konstruiran' putem vjerojatnosnog procesa: neka je $e_1, e_2, \ldots, e_{\binom{n}{2}}$ slučajan poredak bridova grafa K_n, pri čemu je $n = O(t^2/\log t)$. U i-tom koraku, dodajmo brid e_i postojećem grafu G_{i-1} ako e_i ne *zatvara* trokut. Na kraju procesa dobijemo graf $G = G_{\binom{n}{2}}$, i (težak) problem je dokazati da G nema nezavisan skup od t vrhova s pozitivnom vjerojatnošću. Taj su problem riješili Kim 1995 i Bohman 2009[7]. Ovakve ideje se često nazivaju *polusličajnim* konstrukcijama, jer je restrikcija da G ne sadrži trokute deterministička.

Tema za seminar 4. Analiza i primjena *triangle-free* procesa i tzv. methoda diferencijalnih jednadžbi (Bohman 2009. i kasniji članci).

Ajtai, Komloś i Szemerédi su ojačali ovu ogradu na

$$r(s,t) \leqslant c_s \cdot \frac{t^{s-1}}{(\log t)^{s-2}},$$

što ćemo u sljedećem poglavlju dokazati za $s = 3$.

2.3.3. Gornja ograda za trokute naspram klika. Sada ćemo dokazati Ajtai-Komloś-Szemerédi ogradu za $s-3$. Prvo iskažimo njihov klasičan teorem iz ekstermalne teorije grafova, koji poboljšava Turánov teorem. Prisjetimo se, Turánov teorem iskazuje da svaki graf sa n vrhova i prosječnim stupnjem d ima nezavisan skup veličine barem $\frac{n}{d+1}$.

U sljedećem teoremu je lako zamijeniti maksimalni stupanj prosječnim stupnjem (uz modificiranu konstantu), ali potrebna nam je samo sljedeća verzija.

Teorem 2.18 (Ajtai, Komlos, Szemerédi 1980). *Neka je G graf sa n vrhova i maksimalnim stupnjem $d \geqslant 1$. Ako G ne sadrži trokut, onda sadrži nezavisan skup na $\frac{n\log_2 d}{8d}$ vrhova.*

[7] Zapravo, Kimova konstrukcija je varijanta opisanog procesa.

Gornja ograda za Ramseyev broj lako slijedi.

TEOREM 2.19. *Za svaki prirodni broj $t \geqslant 3$,*

$$r(3,t) \leqslant \frac{8t^2}{\log_2 t}.$$

DOKAZ. Neka je G graf bez trokuta na $n = 8t^2/\log_2 t$ vrhova. Tvrdimo da G sadrži nezavisan skup od t vrhova.

Ako neki vrh v ima t susjeda, tada ti susjedi čine nezavisan skup veličine t, pa tvrdnja slijedi. U protivnom, možemo primijeniti Teorem 2.18, čime dobivamo nezavisan skup veličine

$$n\frac{\log_2 t}{8t} \geqslant t,$$

pri čemu nejednakost slijedi iz izbora t, kao što smo htjeli dokazati. □

****************************** 29. studenoga ******************************

DOKAZ TEOREMA 2.18 [**AS16**]. Pretpostavimo $d \geqslant 16$, jer u protivnom tvrdnja slijedi iz Turánovog teorema.

Neka je W nasumičan nezavisan skup u G. Za dani vrh v, označimo skup susjeda v sa $N(v)$, i definirajmo slučaju varijablu [8]

$$X_v = \begin{cases} |N(v) \cap W|, & v \notin W \\ |N(v) \cap W| + d, & v \in W. \end{cases}$$

Deterministički vrijedi

$$\sum_{v \in V(G)} X_v = d|W| + \sum_{v \in V(G)} |N(v) \cap W| = d|W| + \sum_{u \in W} |N(u)| \leqslant 2d|W|,$$

pri čemu se druga jednakost pokazuje *dvostrukim prebrojavanjem.*

Uzimanjem očekivane vrijednosti dobivamo

$$\mathbf{E}\left[W\right] \geqslant \frac{1}{2d} \sum_{v \in V(G)} \mathbf{E}\left[X_v\right],$$

pa nam preostaje dokazati da za svaki vrh v,

$$\mathbf{E}\left[X_v\right] \geqslant \frac{\log_2 d}{4}. \tag{2.9}$$

Neka je $T_v = V(G) \setminus (N(v) \cup \{v\})$,. Prvo ćemo izložiti $W \subset T_v$. Neka je $S \subset T_v$ proizvoljan nezavisan skup u G. Neka je $U \subset N(v)$ skup susjeda od v koji nemaju susjeda u S, te $u = |U|$. Dovoljno je dokazati

$$\mathbf{E}\left[X_v \mid W \cap T_v = S\right] \geqslant \frac{\log_2 d}{4}$$

za svaki fiksni S. Pod uvjetom $W \cap T_v = S$, postoji točno $2^u + 1$ mogućnosti za $W \setminus S$. Opcije kada je $W \setminus S$ podskup od U doprinose vrijednosti $\mathbf{E}\left[X_v \mid W \cap V(H) = S\right]$ točno

$$\frac{2^u}{2^u+1} \cdot \frac{u}{2},$$

[8] Dodatak '$+d$' nema neko kombinatorno značenje, već je 'izmišljen' radi donje ograde za $\mathbf{E}\left[X_v\right]$.

a opcija $W \setminus S = \{v\}$ doprinosi $\frac{d}{2^u+1}$. Sveukupno, imamo

$$\mathbf{E}\left[X_v \mid W \cap V(H) = S\right] = \frac{2^u}{2^u+1} \cdot \frac{u}{2} + \frac{d}{2^u+1}.$$

Nije teško provjeriti nejednakost

$$\frac{2^u}{2^u+1} \cdot \frac{u}{2} + \frac{d}{2^u+1} \geqslant \frac{\log_2 d}{4}$$

za svaki u i $d \geqslant 16$, iz čega slijedi nejednakost (2.9). □

Napomena 2.20. U izjavi prethodne leme, nije teško zamijeniti hipotezu ‘maksimalnog stupnja d’ sa slabijom hipotezom ‘prosječnog stupnja $2d$’.

POGLAVLJE 3

Ekstremalna teorija grafova

3.1. Turánov teorem

U uvodu smo spomenuli činjenicu da u Ramseyevom teoremu ne možemo garantirati da boja s većim brojem bridova sadrži *veliku* kliku. Postavlja se pitanje, koji je maksimalni broj bridova u grafu G koji ne sadrži kliku veličine r (taj broj označavamo sa $t_r(n)$)? Inače, ovakvim pitanjima se bavi *ekstremalna teorija grafova*: u određenoj klasi grafova (klasu koja nas trenutno zanima čine grafovi bez K_r), koji je asimptotski maksimalni broj bridova?

Primjer grafova koji ne sadrže K_r su tzv. $(r-1)$-partitni grafovi, tj. graf čiji se skup vrhova može podijeliti na skupove $S_1, \ldots, S_{r-1}$ na način da svi bridovi leže između različitih skupova S_i i S_j.[9] Naravno, želimo li maksimizirati broj bridova, prirodan izbor je sljedeći graf – **Turańov** graf je potpuni $(r-1)$-partitni graf na n vrhova u kojem su klase vrhova veličine u intervalu $\left(\frac{n}{r-1} - 1, \frac{n}{r-1} + 1\right)$. su takozvani Turánov graf $T_r(n)$. Primijetimo da je

$$e(T_r(n)) = \left(1 - \frac{1}{r-1} + o(1)\right)\binom{n}{2}.$$

Ispostavlja se da Turánov graf uistinu postiže maksimalni broj bridova, tj.

$$t_r(n) = e(T_r(n)). \tag{3.1}$$

Dokazat ćemo malo slabiju, *asimptotsku* ogradu vjerojatnosnim argumentom. [10]

Teorem 3.1. *Neka je $\omega(G)$ broj vrhova najveće klike u grafu G, i $n = |V(G)|$. Za svaki G vrijedi*

$$e(G) \leqslant \left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right)\frac{n^2}{2}. \tag{3.2}$$

Dokaz. Prvo ćemo reformulirati tvrdnju. Neka je $\bar{d}(G) = 2e(G)/n$ prosječni stupanj grafa G. Nejednakost (3.2) je ekvivalentna $\bar{d}(G) \leqslant \left(1 - \frac{1}{\omega(G)}\right) n$, tj.

$$\omega(G) \geqslant \frac{n}{n - \bar{d}(G)}.$$

Neka je π slučajna permutacija vrhova $V(G)$. Označimo skup ne-susjeda vrha v (uključujući v) sa S_v . Definirajmo skup

$$X = X(\pi) = \{v \in V : \forall w \in S_v : \pi(w) > \pi(v)\}.$$

[9] Takva podjela vrhova se obično naziva dobrim bojenjem vrhova grafa.
[10] Čak šest različitih dokaza možete naći u Aignerovom članku.

X je po konstrukciji klika, pa preostaje pronaći ogradu za $|X|$. Neka je X_v indikatorska slučajna varijabla događaja $\{v \in X\}$, tako da vrijedi $|X| = \sum_{v \in V(G)} X_v$. Za svaki v imamo

$$\mathbf{E}[X_v] = \mathbf{P}[v \in X] \geqslant \frac{1}{n - d(v)},$$

budući da je v u skupu X toč no kada je v manji od svih svojih susjeda, i svi elementi skupa S_v imaju jednaku vjerojatnost da budu najraniji u slučajnoj permutaciji π. Dakle,

$$\mathbf{E}[|X|] \geqslant \sum_{v \in V} \frac{1}{n - d_v} \geqslant \frac{n}{n - \bar{d}(G)},$$

pri čemu zadnja nejednakost slijedi iz konveksnosti funkcije $x \mapsto (1-x)^{-1}$.

Dakle, postoji permutacija vrhova za koju je $|X| \geqslant \frac{n}{n - \bar{d}(G)}$. □

Gornji argument može se naći u [**AS16**, Poglavlju 6], a izveli su ga Caro i Wei.

Zadatak 3. Pomnije analizirajte prethodni dokaz kako biste dokazali oštru ogradu (3.1).

Zadatak 4. Dokažite (3.1) uz pomoć sljedećeg hinta: ako je G maksimalan graf koji ne sadrži K_r, a u i v su ne-susjedni vrhovi u G (tj. $uv \notin E(G)$), onda su je $N_G(u) = N_G(v)$.

Zadatak 5. Uz pomoć Turánovog teorema, dokažite da je

$$r(3, n) \leqslant n(n+1).$$

Gornje pitanje može se postaviti i za općeniti graf F: koja je (asimptotski) maksimalna gustoća grafa koji ne sadrži F? Odgovor je vrlo sličan gornjemu, naime, ekstremalni grafovi su također grafovi $T_r(n)$ za odgovarajući r.

Definicija 3.2. **Kromatski broj** grafa H je minimalni r takav da postoji particija vrhova H u r elemenata takva da nijedan element particije ne sadrži brid grafa F. Označavamo ga sa $\chi(F)$.

Često se umjesto jezika particija koristi jezik *bojenja vrhova*, i gornja particija se naziva *dobrim bojenjem*. Primjerice, $\chi(K_r) = r$, a kromatski broj ciklusa je 2 za parne cikluse i 3 za neparne.

Turánov graf $T_{\chi(F)-1}(n)$ ne sadrži kopiju grafa F, i ispostavlja se da taj graf ima asimptotski maksimalan broj bridova u klasi 'F-slobodnih' grafova.

Teorem 3.3 (Erdős, Stone). *Za dani graf F i $\epsilon > 0$, postoji n takav da ako je G graf na barem n vrhova koji ne sadrži kopiju grafa F, onda vrijedi*

$$e(G) \leqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1} + \epsilon\right) \frac{n^2}{2}$$

Napomenimo da iz Turánovog teorema slijedi jednostavna ograda za Ramseyev broj $r(3, n)$.

3.2. Szemerédijeva lema

Ova je lema razvijena u sklopu dokaza Szemerédijevog teorema (v. Teorem 1.3), i od tada je našla brojne primjene u ekstremalnoj teoriji grafova i Ramseyevoj teoriji. Vrlo ugrubo, Szemerédijeva lema iskazuje da svaki graf ima određenu kvazi-slučajnu ili 'homogenu' strukturu.

Točnije, možemo podijeliti vrhove danog grafa u konačni broj klasa na način da se bipartitni grafovi između različitih klasa ponašaju kao slučajni grafovi. Potrebno nam je nekoliko definicija.

DEFINICIJA 3.4. Neka su A i B podskupovi vrhova grafa G, te neka je $E(A, B)$ skup bridova između A i B. **Gustoća** bridova između A i B je

$$d(A, B) = \frac{|E(A, B)|}{|A||B|}.$$

Za dani $\epsilon > 0$, par (A, B) se naziva **ϵ-regularnim** ako za sve podskupe $A' \subset A$ i $B' \subset B$ vrijedi

$$(|A'| \geqslant \epsilon|A| \text{ i } |B'| \geqslant \epsilon|B|) \quad \Rightarrow \quad |d(A', B') - d(A, B)| \leqslant \epsilon. \tag{3.3}$$

Particiju $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ vrhova grafa G nazivamo **ϵ-regularnom particijom** ako vrijedi $V_0 \leqslant \epsilon|V|$, $|V_1| = \cdots = |V_k|$, i broj parova (V_i, V_j) $(1 \leqslant i < j \leqslant k)$ koji nisu ϵ-regularni je najviše $\epsilon\binom{k}{2}$.

TEOREM 3.5 (Szemerédijeva lema o regularnosti, 1975. [**Sze75, Sze78**]). *Za svaki $\epsilon > 0$ i m postoji $M' = M'(\epsilon, m)$ takav da za svaki graf G (na dovoljno velikom broju vrhova) postoji ϵ-regularna particija na M skupova sa $M \in [m, M']$.*

Prije dokaza Szemerédijeve leme, pokažimo primjenu u dokazu Rothovog teorema. Sljedeću lemu obično nazivamo *brojećom lemom*, a ona ukazuje na to zašto je regularnost korisno svojstvo.

LEMA 3.6. *Neka je G graf, i neka su V_1, V_2, V_3 disjunktni podskupovi skupa $V(G)$. Pretpostavimo da su za $i \neq j \in [3]$ parovi (V_i, V_j) ϵ-regularni, te $d(V_i, V_j) = \alpha_{ij} \geqslant 2\epsilon$. Broj trokuta $v_1v_2v_3$ u G sa $v_i \in V_i$ za $i \in [3]$ je barem*

$$(1 - 2\epsilon)(\alpha_{12} - \epsilon)(\alpha_{23} - \epsilon)(\alpha_{31} - \epsilon)|V_1||V_2||V_3|.$$

*************************** 6. prosinca ***************************

DOKAZ. Za svaki v, neka je $d_i(v)$ broj susjeda vrha v u skupu V_i.

TVRDNJA 3.7. *Broj vrhova $x \in V_1$ sa $d_2(x) < (d(V_1, V_2) - \epsilon)|V_2|$ je najviše $\epsilon|V_1|$.*

Pretpostavimo suprotno: tada postoji podskup $V_1' \subset V_1$ veličine $\epsilon|V_1|$ takav da je gustoća bridova između V_1' i V_2 manja od $\alpha_{12} - \epsilon$, što proturječi definiciji regularnosti i time je dokazana tvrdnja.

Isti argument pokazuje $d_3(x) \geqslant (\alpha_{13} - \epsilon)|V_3|$ za sve osim $\epsilon|V_1|$ vrhova $x \in V_1$. Ako $x \in V_1$ zadovoljava $d_j(x) \geqslant (\alpha_{1j} - \epsilon)|V_j|$ za $j = 2, 3$, tada je broj bridova između $N(x) \cap V_2$ i $N(x) \cap V_3$ barem

$$(\alpha_{12} - \epsilon)(\alpha_{23} - \epsilon)(\alpha_{31} - \epsilon)|V_2||V_3|,$$

pri čemu smo koristili činjenicu da je $|N(x) \cap V_j| \geqslant \epsilon|V_j|$. Slijedi ista ograda za broj trokuta koji sadrže x. Sumirajući po 'dobrim' vrhovima x (kojih ima barem $(1 - 2\epsilon)|V_1|$), dobivamo željeni rezultat. $\square$

Sljedeća lema naziva se *Lema za uklanjanje trokuta* (*Triangle removal lema*), i vrlo je lijepa posljedica regularnosti. Govori nam da za dani ϵ, graf G je ili 'ϵ-blizu' grafu bez trokuta, ili sadrži barem $\delta(\epsilon)n^3$ trokuta.

TEOREM 3.8. *Za svaki $\epsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ takva da svaki graf G na n vrhova ima jedno od sljedećih svojstava: (1) G sadrži barem δn^3 trokuta, ili (2) možemo ukloniti ϵn^2 bridova grafa G i dobiti graf bez trokuta.*

DOKAZ. Neka G sadrži manje od δn^3 trokuta, i dokazat ćemo da vrijedi (2). Primijenimo Teorem 3.5, i neka je $X_1 \cup \cdots \cup X_M$ dana $\frac{\epsilon}{4}$-regularna particija vrhova G. Uklonimo bridove xy iz G ako

(i) $(x, y) \in X_i \times X_j$, pri čemu (X_i, X_j) nije $\frac{\epsilon}{4}$-regularan par, ili $d(X_i, X_j) < \frac{\epsilon}{2}$; ili
(ii) $x \in V_0$

Broj bridova koje smo uklonili radi prvog uvjeta je najviše $\frac{\epsilon}{4}n^2 + \frac{\epsilon}{2}n^2$. Drugi uvjet eliminira najviše $\epsilon n^2/4$ bridova. Dakle, uklonili smo najviše ϵn^2 bridova.

Tvrdimo da preostali graf ne sadrži trokut. U protivnom, ako preostali graf sadrži trokut $x_1x_2x_3$ sa $x_i \in X_i$ (indeksi bez smanjenja općenitosti), onda su parovi $(X_1, X_2), (X_2, X_3), (X_3, X_1)$ $\frac{\epsilon}{4}$-regularni s gustoćom bridova barem $\frac{\epsilon}{2}$. Dakle, Lema 3.6 implicira da je broj preostalih trokuta barem

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^3 |X_1||X_2||X_3| \geqslant \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^3 \left(\frac{\epsilon}{4M}\right)^3 n^3.$$

Za dovoljno mali δ, dolazimo do zaključka da G sadrži barem δn^3 trokuta, što je kontradikcija. □

TEMA ZA SEMINAR 5. Szemerzédijeva lema i primjene.

3.3. Rothov teorem

Sada ćemo dokazati Rothov teorem, koji je poseban slučaj Szémeredijevog teorema (Teorem 1.3) za nizove duljine 3. Rothov originalni dokaz koristi diskretnu Fourieovu analizu, a mi ćemo pokazati dokaz uz pomoću Szemerédijeve leme koji se može naći primjerice u [Con21a]. Prvo ćemo doakazati jaču, *geometrijsku* verziju Rothovog teorema. *Pravilni kut* u $[n]^2$ je trojka točaka oblika $(x, y), (x + d, y), (x, y + d)$ za neki $d \neq 0$.

LEMA 3.9. *Za dani $\epsilon > 0$ i dovoljno veliki n, svaki podskup $A \subset [n]^2$ sa barem ϵn^2 elemenata sadrži pravilni kut.*

DOKAZ. Neka je A skup veličine barem ϵn^2 bez pravilnih kuteva. Konstruirajmo *tripartitan* graf G čije su klase vrhova $X = [n]$, $Y = [n]$ i $Z = [2n]$. Za $x \in X, y \in Y$ i $z \in Z$, graf $G(A)$ se sastoji od bridova oblika

(i) xy, kada je $(x, y) \in A$,
(ii) xz, kada je $(x, z - x) \in A$ i
(iii) yz, kada je $(z - y, y) \in A$.

Drugim riječima, svaka točka $(x, y) \in A$ određuje tri brida grafa G: $(x, y) \in X \times Y$, $(x, x+y) \in X \times Z$ i $(x + y, y) \in Z \times Y$.

Primijenimo Teorem 3.8 s konstantom $\epsilon/2$. U slučaju da G sadrži barem $\delta n^3 > n^2$ trokuta, postoji trokut (x, y, z) sa $z \neq x + y$. Svaki takav trokut (x, y, z) odgovara trojci u A koja zadovoljava

$$(z - y, y) - (x, y) = (z - x - y, 0) \quad \text{i}$$
$$(x, z - x) - (x, y) = (0, z - x - y),$$

i time čini željeni pravilni kut. (Geometrijski promatrano, trokut u G daje tri točke skupa A od kojih dvije dijele leže na istom vertikalnom pravcu, dvije na istom horizonalnom pravcu, i dvije na istoj dijagonali.)

U slučaju (2) Teoremaa 3.8, možemo ukloniti $\epsilon n^2/2$ bridova grafa G i dobiti graf bez trokuta. Međutim, G sadrži barem $|A| \geqslant \epsilon n^2$ *degeneriranih* trokuta – naime, svaka točka $(x, y) \in A$ određuje trokut $(x, y, x + y)$ u G. Ti degenerirani trokuti ne dijele bridove, pa ih ne možemo ukloniti brisanjem $\epsilon n^2/2$ bridova, što daje kontradikciju.

□

Sada nije teško završiti dokaz Rothovog teorema.

TEOREM 3.10 (Roth, 1953.). *Za svaki $\delta > 0$ postoji n_0 takav da, za $n \geqslant n_0$, svaki podskup skupa $[n]$ sa barem δn elemenata sadrži aritmetički niz duljine 3.*

DOKAZ. Definirajmo $B \subset [2n]^2$ kao

$$B = \{(x, y) : x - y \in A\}$$

(tj., B je skup dijagonala u $[2n]^2$ *određenih* skupom A). Vrijedi $|B| \geqslant \delta n^2 = \frac{\delta}{4} \cdot (2n)^2$, dakle B sadrži pravilni kut $(x, y), (x + d, y), (x, y + d)$. Slijedi da su točke $x - y - d, x - y, x - y + d$ u A, i one čine aritmetički niz. □

3.4. Lema o ulaganju

Za kasniju primjenu, pokazat ćemo kako se regularnost može koristiti za ulaganje proizvoljnog grafa H, čak i kada je broj vrhova H reda veličine n.

LEMA 3.11. *Dan je graf H sa t vrhova, maksimalnog stupnja Δ i $\chi(H) \leqslant r$. Neka je G graf, i neka su $V_1, \dots, V_r$ disjunktni podskupovi skupa $V(G)$. Za danu pozitivnu konstantu ϵ, pretpostavimo da vrijedi*

(i) za svaki $i \in [r]$, $|V_i| \geqslant 2\epsilon^{-\Delta} t$, te

(ii) za svaki $i \neq j \in [r]$, $d(V_i, V_j) \geqslant 2\epsilon$, i par (V_i, V_j) je $\frac{1}{2}\epsilon^{\Delta}\Delta^{-1}$-regularan.

G sadrži kopiju grafa H.

DOKAZ. Podijelimo vrhove grafa H na r nezavisnih skupova $U_1, \dots, U_r$. Pronaći ćemo ulaganje f grafa H u G sa svojstvom $f(U_i) \subset V_i$ za $i \in [r]$. Označimo vrhove H sa $u_1, \dots, u_t$. Za $h \in [t]$, neka je $L_h = \{u_1, \dots, u_h\}$. Za svaki $y \in U_j \setminus L_h$, neka je T_y^h skup vrhova u V_j koji su zajednički susjedi skupa $f(L_h \cap N(y))$ (drugim riječima, T_y^h su zajednički susjedi svih dosad uloženih susjeda vrha y).

Indukcijom ćemo pronaći ulaganje skupa L_h takvo da za $y \in V(H) \setminus L_h$,

$$|T_y^h| \geqslant \epsilon^{|N(y) \cap L_h|}|V_j|. \tag{3.4}$$

Tvrdnja je trivijalna za $h = 0$, pa možemo postaviti da postoji željeno ulaganje skupa L_h. Cilj je uložiti $u = u_{h+1} \in U_k$ u vrh $v \in T_u^h$ tako da vrijedi (3.4). Neka je Y skup susjeda u koji još nisu uloženi. Pronaći ćemo vrh $v \in T_h \setminus f(L_h)$ koji zadovoljava $|N(v) \cap T_h| \geqslant \epsilon |T_y^h|$ za svaki $y \in Y$. Tada možemo uzeti $f(u) = v$ i završiti dokaz.

Neka je B_y skup vrhova u T_u^h koji su *loši* za $y \in Y$, tj.,

$$|N(v) \cap T_y^h| < \epsilon |T_y^h|.$$

Po pretpostavci indukcije, ako je $y \in U_\ell$, vrijedi $|T_y^h| \geqslant \epsilon^\Delta |V_\ell|$. Dakle, vrijedi $|B_y| < \frac{1}{2}\epsilon^\Delta \Delta^{-1}|V_k|$, jer bi u protivnom gustoća bridova između B_y i T_y^h bila manja od ϵ, što je u kontkradikciji s uvjetom (ii). Slijedi

$$\left| T_u^h \setminus \bigcup_{y \in Y} B_y \right| > \epsilon^\Delta |V_k| - \Delta \cdot \frac{1}{2} e^\Delta \Delta^{-1} |V_k| \geqslant t,$$

pri čemu smo za posljednju nejednakost koristili (i). Budući da smo uložili maksimalno $t-1$ vrhova, postoji zadovoljavajući vrh za $f(u)$. □

************************ 13. prosinca ************************

3.5. Dokaz leme o regularnosti

Definirat ćemo *potencijal* pojedine particije koji postiže vrijednosti u $[0, 1]$, i dokazati da dok god particija *nije* ϵ-regularna, možemo je profiniti u particiju većeg potencijala; naravno, potencijal se može povećati za iznos ϵ^5 konačno mnogo puta, pa slijedi da nakon određenog broja koraka dobivamo ϵ-regularnu particiju.

Neka je G graf na skupu $[n]$ (u cijelom odjeljku). Za $A, B \subset [n]$, definiramo

$$f(A, B) = \frac{|A||B|}{n^2} d^2(A, B) = \frac{e_G(A, B)^2}{n^2 |A||B|}.$$

Za particiju $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$, neka je

$$f(\mathcal{P}) = \sum_{i<j \in [k]} f(V_i, V_j),$$

i primijetimo da vrijedi

$$f(\mathcal{P}) \leqslant \sum_{i<j \in [k]} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} < \left(\sum_{i \in [k]} \frac{|V_i|}{n} \right)^2 \leqslant 1.$$

Dokazat ćemo da profinjenjem particije, njen potencijal se ne može smanjiti (kao i 'bipartitnu verziju' istog iskaza).

LEMA 3.12. *Neka je $\mathcal{P}' = \bigcup_i \mathcal{V}_i$ profinjenje particije $\mathcal{P}$. Tada vrijedi*

$$f(\mathcal{P}') \geqslant f(\mathcal{P}).$$

Nadalje, ako je $\mathcal{V}_i$ particija skupa V_i za $i = 1, 2$, vrijedi

$$f(V_1, V_2) \leqslant \sum_{A \in \mathcal{V}_1, B \in \mathcal{V}_2} f(A, B) \tag{3.5}$$

DOKAZ. Označimo $\mathcal{P}' = \bigcup_{i \in [k]} \mathcal{V}_i$, pri čemu je $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ i $\mathcal{V}_i$ je particija skupa V_i. Primijetimo da za $i \neq j$ vrijedi

$$d(V_i, V_j) = \frac{1}{|V_i||V_j|} \sum_{A \in \mathcal{V}_i, B \in \mathcal{V}_j} d(A, B)|A||B|.$$

Kvadrirajmo i primijenimo Cauchyevu nejednakost ($|x \cdot y|^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$ sa $x_i^2 = |A||B|$ i $y_i^2 = d(A, B)^2 |A||B|$), čime dobivamo

$$\begin{aligned} d(V_i, V_j)^2 &\leqslant \frac{1}{|V_i^2||V_j|^2} \left(\sum_{A \in \mathcal{V}_i, B \in \mathcal{V}_j} |A||B| \right) \sum_{A \in \mathcal{V}_i, B \in \mathcal{V}_j} |A||B| d(A, B)^2 \\ &= \frac{1}{|V_i||V_j|} \sum_{A \in \mathcal{V}_i, B \in \mathcal{V}_j} n^2 f(A, B). \end{aligned}$$

Dakle, za $i < j \in [k]$, vrijedi

$$\frac{|V_i||V_j|}{n^2} d^2(V_i, V_j) \leqslant \sum_{A \in \mathcal{V}_i, B \in \mathcal{V}_j} f(A, B), \tag{3.6}$$

čime smo dokazali (3.5). Sumiranjem po i, j dobivamo

$$f(\mathcal{P}) \leqslant \sum_{i<j \in [k]} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d^2(V_i, V_j) \leqslant \sum_{i<j \in [k]} \sum_{A \in \mathcal{V}_i, B \in \mathcal{V}_j} f(A, B) \leqslant f\left(\cup_{i \in [k]} \mathcal{V}_k\right), \tag{3.7}$$

što smo i htjeli dokazati. □

Sada ćemo dokazati da se potencijal dvodjelne particije koja nije ϵ-regularna može povećati za $\Omega(\epsilon^4)$.

LEMA 3.13. *Neka su $A, B \subset [n]$ disjunktni podskupovi koji ne čine ϵ-regularan par za dani $\epsilon > 0$. Postoji particija $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$ takva da vrijedi*

$$\sum_{i,j} f(A_i, B_j) \geqslant f(A, B) + \frac{\epsilon^4 |A||B|}{n^2}. \tag{3.8}$$

DOKAZ. Po definiciji ϵ-regularnosti, postoje podskupovi A_1, B_1 sa $|A_1| \geqslant \epsilon|A|$ i $|B_1| \geqslant \epsilon|B|$ takvi da vrijedi

$$|d(A_1, B_1) - \alpha| \geqslant \epsilon$$

. Neka je $A_2 = A \setminus A_1$ i $B_2 = B \setminus B_1$ i $d(A,B) = \alpha$. Imamo

$$\begin{aligned}\epsilon^4|A||B|/n^2 &\leqslant \sum_{i,j\in[2]} \frac{|A_i||B_j|}{n^2}(d(A_i,B_j)-\alpha)^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}|A_i||B_j|\left(d(A_i,B_j)^2 - 2\alpha d(A_i,B_j) + \alpha^2\right).\end{aligned}$$

Primijetimo da vrijedi $\sum_{i,j}|A_i||B_j|d(A_i,B_j) = e_G(A,B) = \alpha|A||B|$ (kao u prethodnom dokazu), i $\sum_{i,j}|A_i||B_j| = |A||B|$, pa slijedi

$$\epsilon^4|A||B|/n^2 \leqslant \sum_{i,j} f(A_i,B_j) - \alpha^2|A||B|/n^2.$$

□

Sada možemo izvesti glavni korak u našem dokazu.

Kako bismo mogli koristiti Lemu 3.12, promatrat ćemo *kontejner* kao trivijalnu particiju na točke. Dakle, za particiju $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \dots, V_k\}$, neka je $\mathcal{V}_0 = \{\{v\} : v \in V_0\}$ singleton-particija skupa V_0, i neka je

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{V}_0 \cup \{V_1, \dots, V_k\}.$$

Također, uvedimo 'bipartitnu' verziju potencijala f: za disjunktne skupove $A, B \subset [n]$ i njihove particije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, neka je

$$f(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sum_{X\in\mathcal{A}, Y\in\mathcal{B}} f(X,Y).$$

S ovakvom notacijom vrijedi, primjerice, za particiju $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$,

$$f(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) = f(\mathcal{A}) + f(\mathcal{A},\mathcal{B}) + f(\mathcal{B}).$$

Lema 3.14. *Neka je $\epsilon \in (0, 1/9)$. Neka je $\mathcal{P} = \{V_0, \dots, V_k\}$ particija skupa $V(G) = [n]$ sa svojstvom $|V_0| \leqslant \epsilon n$ i $|V_1| = \cdots = |V_k| = r$. Neka je*

$$I = \{(i,j) : 1 \leqslant i < j \leqslant k, (V_i, V_j) \textit{ nije } \epsilon\textit{-regularan par}\}.$$

Ako vrijedi $|I| \geqslant \epsilon\binom{k}{2}$, onda postoji particija $\gamma(\mathcal{P}) = \{V_0', V_1', \dots, V_\ell'\}$ koja zadovoljava

(i) $k < \ell \leqslant k \cdot 4^k$,
(ii) $|V_0'| \leqslant |V_0| + n \cdot 2^{-k}$,
(iii) $|V_1'| = \cdots = |V_\ell|'$,
(iv) $f(\gamma(\mathcal{P})^*) \geqslant f(\mathcal{P}^*) + \epsilon^5/4$.

Dokaz. Neka je I skup parova (i,j) (pri čemu je $i < j \in [k]$) takvih da par (V_i, V_j) *nije* ϵ-regularan. Definirajmo particije $\mathcal{V}_{ij}$ i $\mathcal{V}_{ji}$ skupova V_i i V_j (tim redom) na sljedeći način. Ako je par (V_i, V_j) ϵ-regularan, neka je $\mathcal{V}_{ij} = \{V_i\}$ i $\mathcal{V}_{ji} = \{V_j\}$. U protivnom, za $(i,j) \in I$ Lema 3.13 nam daje dvo-elementne particije $\mathcal{V}_{ij}$ i $\mathcal{V}_{ji}$ skupova V_i i V_j koje zadovoljavaju (3.8), tj. vrijedi

$$f(\mathcal{V}_{ij}, \mathcal{V}_{ji}) \geqslant f(V_i, V_j) + \epsilon^4.$$

Time smo svaki skup V_i particionirali najviše $k-1$ puta. Možemo definirati relaciju ekvivalencije na V_i u kojoj su dva elementa V_i ekvivalentna kada se nalaze u istom elementu particije $\mathcal{V}_{ij}$ za svaki $j \neq i$. Neka je $\mathcal{V}_i$ skup klasa ekvivalencije u toj relaciji, i primijetimo da vrijedi $|\mathcal{V}_i| \leqslant 2^{k-1}$. Definirajmo particiju

$$\mathcal{V} = \{V_0\} \cup \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k.$$

koja profinjuje $\mathcal{P}$. Vrijedi $|\mathcal{V}| \leqslant k \cdot 2^k$.

Koristeći Lemu 3.12, imamo $f(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) \geqslant f(V_i, V_j)$ za $i < j \in [k]$. Nadalje, budući da klasa $\mathcal{V}_i$ profinjuje dvodjelnu particiju $\mathcal{V}_{ij}$ za svaki j, imamo

$$f(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) \geqslant f(\mathcal{V}_{ij}, \mathcal{V}_{ji}) \geqslant f(V_i, V_j) + \frac{\epsilon^4 r^2}{n^2} \quad \text{za } (i,j) \in I.$$

Slijedi

$$\sum_{i<j\in[k]} f(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) \geqslant \sum_{i<j\in[k]} f(V_i, V_j) + \epsilon \binom{k}{2} \cdot \frac{\epsilon^4 r^2}{n^2} \geqslant \sum_{i<j\in[k]} f(V_i, V_j) + \frac{\epsilon^5}{4},$$

pri čemu smo koristili $kr \geqslant n(1-\epsilon)$.

Dakle,

$$\begin{aligned} f(\mathcal{V}^*) &= \sum_{0\leqslant i\leqslant k} f(\mathcal{V}_i) + \sum_{0\leqslant i<j\leqslant k} f(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) \\ &\geqslant f(\mathcal{V}_0) + \sum_{1\leqslant i\leqslant k} f(\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_i) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} f(V_i, V_j) + \frac{\epsilon^5}{4} \\ &\geqslant f(\mathcal{V}_0) + \sum_{1\leqslant i\leqslant k} f(\mathcal{V}_0, \{V_i\}) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} f(V_i, V_j) + \frac{\epsilon^5}{4} = f(\mathcal{P}^*) + \frac{\epsilon^5}{4} \end{aligned}$$

Preostaje dodatno profiniti $\mathcal{V}$ kako bismo dobili skupove jednake veličine.

Definirajmo $r' = \lfloor |V_1| \cdot 4^{-k} \rfloor$, i neka je $\{V_1', \dots, V_\ell'\}$ maksimalna kolekcija disjunktnih podskupova veličine r' koji su sadržani u nekom elementu A particije $\mathcal{V}_j$, za $j \geqslant 1$. Nadalje, neka je 'ostatak' $V_0' = [n] \setminus \cup_{i=1}^{\ell} V_i'$, te neka je $\gamma(\mathcal{P})$ nova particija. Primijetimo da vrijedi $\ell \leqslant k \cdot 4^k$ (k originalnih dijelova V_i, svaki sadrži najviše 4^k novih skupova jer je njihova veličina $|V_i|/4^k$). Nadalje,

$$|V_0'| \leqslant |V_0| + r'|\mathcal{V}| \leqslant |V_0| + \frac{|V_1|}{4^k} \cdot k2^k \leqslant |V_0| + \frac{n}{2^k}.$$

Budući da $\gamma(\mathcal{P})^*$ profinjuje $\mathcal{P}^*$, imamo

$$f(\gamma(\mathcal{P})^*) \geqslant f(\mathcal{V}^*) \geqslant f(\mathcal{P}^*) + \frac{\epsilon^5}{4}.$$

□

Sada možemo dokazati Lemu o regularnosti.

Dokaz Teorema 3.5. Neka su m i $\epsilon \in (0, 1/9)$ dani parametri, i možemo pretpostaviti $2^m \leqslant \epsilon/4$. Neka je G dani graf na skupu $[n]$. Neka je $\mathcal{P}_0 = \{V_0, V_1, \dots, V_m\}$ proizvoljna particija skupa $[n]$ sa $|V_1| = \dots = V_m = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ (pa vrijedi $|V_0| \leqslant m \leqslant \epsilon n/2$).

Iterirajmo Lemu 3.14: za $i \geqslant 0$, ukoliko $\mathcal{P}_i$ sadrži barem $\epsilon\binom{|\mathcal{P}_i|-1}{2}$ ne-ϵ-regularnih parova, neka je $\mathcal{P}_{i+1} = \gamma(\mathcal{P}_i)$. Neka je $\ell = |\mathcal{P}_i| - 1$. Primijetimo da vrijedi $|\mathcal{P}_{i+1}| \leqslant \ell \cdot 4^\ell + 1$. Pretpostavimo da iteracija traje barem $k = \frac{4}{\epsilon^5} + 1$ koraka. Dobivamo

$$f(\mathcal{P}_k^*) \geqslant f(\mathcal{P}_0^*) + k \cdot \frac{\epsilon^5}{4} > 1,$$

kontradikcija. Dakle, iteracija prestaje nakon $k_0 \leqslant k$ koraka, i dobivena particija $\mathcal{P}_{k_0}$ je ϵ-regularna. 'Kontejner' particije $\mathcal{P}_{k_0}$ sadrži najviše

$$\frac{\epsilon n}{2} + \frac{n}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) < \epsilon n$$

vrhova, što smo i htjeli dokazati. □

************************** 20. prosinca **********************************

3.6. Skica dokaza Erdos – Stonea

Počinjemo s podsjetnikom.

THEOREM (Turán). *Neka je G graf sa $e(G) \leqslant (1-\alpha)\,\frac{n^2}{2}$, pri čemu je $n = |V(G)|$. Tada G sadrži kliku veličine $1/2\alpha$.*

THEOREM (Erdős, Stone). *Za dani graf F i $\epsilon > 0$, postoji n takav da ako je G graf na barem n vrhova koji ne sadrži kopiju grafa F, onda vrijedi*

$$e(G) \leqslant \left(1 - \frac{1}{\chi(F)-1} + \epsilon\right)\frac{n^2}{2}.$$

LEMA (Lema o ulaganju 3.11). *Dan je graf H sa t vrhova, maksimalnog stupnja Δ i $\chi(H) \leqslant r$. Neka je G graf, i neka su $V_1, \dots, V_r$ disjunktni podskupovi skupa $V(G)$. Za danu pozitivnu konstantu ϵ, pretpostavimo da vrijedi*

(i) za svaki $i \in [r]$, $|V_i| \geqslant 2\epsilon^{-\Delta} t$, te

(ii) za svaki $i \neq j \in [r]$, $d(V_i, V_j) \geqslant 2\epsilon$, i par (V_i, V_j) je $\frac{1}{2}\epsilon^\Delta\Delta^{-1}$-regularan.

G sadrži kopiju grafa H.

POGLAVLJE 4

Ramseyevi brojevi rijetkih grafova

Tema ovog poglavlja su Ramseyevi grafovi 'rijetkih grafova'. Prisjetimo se da je **Ramseyev broj** $r(H, J)$ minimalan prirodni broj n sa svojstvom da svako crveno-plavo bojenje grafa K_n sadrži crvenu kopiju grafa H ili plavu kopiju grafa J. Dokazali smo da Ramseyev broj klike K_t raste eksponencijalno sa t. Međutim, kada kliku zamijenimo određenim *rijetkim* grafom H, Ramseyevi brojevi rastu linearno sa $|V(H)|$, u nekim slučajevima možemo dobiti puno preciznije ocjene za $r(H)$.

Za stabla *vs.* klike možemo točno izračunati Ramseyev broj.

Teorem 4.1 (Chvátal, 1977. [Chv77]). *Neka je T stablo sa t vrhova. Vrijedi*

$$r(T, K_s) = (s-1)(t-1).$$

Dokaz. Za donju ogradu $r(T, K_s) > n := (s-1)(t-1)$, podijelimo skup $[n]$ na crvene klike $R_1, \dots, R_{s-1}$ veličine $t-1$, i obojimo sve bridove između različitih R_i i R_j plavo. Crveni graf ne sadrži T, jer sve povezane komponente imaju $s-1$ vrhova. Svaka plava klika P zadovoljava $|P \cap R_i| \leqslant 1$, dakle $|P| \leqslant s-1$.

Za gornju ogradu, promatrajmo crveno-plavo bojenje grafa K_n sa $n = (s-1)(t-1)+1$ Neka je G graf crvene boje. Imamo dva slučaja. Prvo, pretpostavimo da postoji podgraf $G' \subset G$ u kojemu svaki vrh ima stupanj barem $t-1$. Tada možemo jednostavno uložiti stablo T u graf G' vrh po vrh.

Znači, svaki podgraf grafa G ima vrh stupnja do $t-2$. Iterativno primijenjujući to svojstvo, dobivamo niz vrhova $v_1, v_2, \dots v_n$ takav da vrijedi

$$|N_G(v_i) \cap \{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n\}| \leqslant t-2.$$

Uz pomoć *pohlepnog algoritma*, sada možemo naći dobro bojenje grafa sa $t-1$ boja, tj. nezavisan skup veličine barem s. Taj nezavisan skup odgovara crvenoj kliki K_s. $\square$

4.0.1. Grafovi ograničenog stupnja. Vrlo široka klasa grafova čiji Ramseyev broj raste linearno s brojem vrhova su *grafovi ograničenog stupnja*. Sljedeći teorem odgovara na pitanje Erdősa i Burra iz 1975., i jedna je od najranijih primjena Leme o regularnosti.

Postoji nekoliko alternativnih dokaza sa boljom ovisnošću konstante c o Δ (recimo $c = e^{O(\Delta \log \Delta)}$).

Teorem 4.2 (Chvátal, Rödl, Szemerédi, Trotter, 1983. [CRST83]). *Neka je H graf maksimalnog stupnja Δ. Postoji $c = c(\Delta)$ takav da vrijedi*

$$r(H) \leqslant c|V(H)|.$$

DOKAZ. Neka je $t = |V(H)|$ i $\epsilon' = 2^{-3\Delta}\Delta^{-1}$. Primijetimo i da vrijedi $(2\epsilon')^{-1} > r(\Delta + 1)$. Neka je $M(\epsilon')$ konstanta iz Teorema 3.5, te neka je $n = ct$ dovoljno velik za primjenu Teorema 3.5, i neka vrijedi

$$\frac{ct}{M} \geqslant 2^{3\Delta+1}t. \tag{4.1}$$

Za danu particiju grafa $K_n = G \cup \bar{G}$, dokazat ćemo da G ili $\bar{G}$ sadrži kopiju grafa H. Primijenimo Lemu o regularnosti na graf G sa konstantom ϵ', te neka je dobivena particija $V_0, V_1, \ldots, V_k$, sa $|V_0| \leqslant \epsilon' n$. Primijetimo da je par (V_i, V_j) ϵ'-regularan u G ako i samo ako je ϵ'-regularan u $\bar{G}$, i da vrijedi $d_G(A, B) + d_{\bar{G}}(A, B) = 1$ (*).

Konstruirajmo *pomoćni* obojeni graf K na $\{V_i : i \in [k]\}$: brid V_iV_j je crveni (odnosno plavi), ukoliko je (V_i, V_j) ϵ'-regularan par u G i $d_G(V_i, V_j) > \frac{1}{2}$ (odnosno $d_G(V_i, V_j) \leqslant \frac{1}{2}$). Nadalje, brid V_iV_j dobiva zelenu boju ako (V_i, V_j) *nije* ϵ'-regularan par.

Primjenom Turánovog Teorema na graf K, i koristeći činjenicu da je broj crvenih i plavih bridova barem $\epsilon'\binom{k}{2}$, dobivamo kliku veličine $1/(2\epsilon') > r(\Delta + 1)$ u kojoj nema zelenih bridova. Primjenom Ramseyevog teorema, dobivamo crvenu ili plavu $(\Delta + 1)$-kliku u K. Radi (*), bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da dijelovi $V_1, V_2, \ldots V_{\Delta+1}$ čine regularnu kliku u crvenoj boji.

Sada možemo primijeniti Lemu 3.11 (tzv. *Lemu o ulaganju*) na dijelove $V_1, \ldots V_{\Delta+1}$, s konstantom $\epsilon = 1/4$. Izbor konstante ϵ' osigurava uvjet (ii) Leme 3.11. Konstanta c osigurava uvjet (i). Slijedi da G sadrži kopiju grafa H, kao što smo htjeli dokazati. □

2014. je Choongbum Lee dokazao generalizaciju prethodnog teorema, koja je bila vrlo poznata hipoteza, i članak je objavljen u Annals of Mathematics.[11] Ova generalizacija povlači, primjerice, da za planarne grafove H vrijedi $r(H) = O(|V(H)|)$.

TEOREM 4.3 (C. Lee, 2017. [**Lee17**]). *Neka je H graf koji ima poredak vrhova $v_1, \ldots, v_t$ takav da svaki vrh v_i ima najviše d susjeda v_j sa $j > i$. Postoji konstanta $c = c(d)$ takva da vrijedi*

$$r(H) \leqslant c|V(H)|.$$

(Primijetimo i da za $d = 1$ dobijemo stabla.)

4.1. Ramseyevi bridni brojevi

Beck je dokazao da postoji graf G sa $900n$ vrhova takav da vrijedi $G \to P_n$.

DEFINICIJA 4.4. *Ramseyev bridni broj* $\widehat{r}(H)$ je najmanji prirodni broj m takav da postoji graf G sa m bridova sa svojstvom $G \to H$.

Naglasimo da za dobivanje gornje ograde $\widehat{r}(H) \leqslant m$, moramo konstruirati graf G sa željenim svojstvom i s m bridova. Primjerice, vrijedi

$$\widehat{r}(H) \leqslant \binom{r(H)}{2}.$$

[11] Zanimljivo je da je Choongbum Lee tada već bio izvan akademije (u algoritamskom tradingu), i ovo mu je jedan od posljednjih članaka.

S druge strane, za donju ogradu moramo za svaki graf s danim brojem bridova pronaći bojenje koje ne sadrži jednoboju kopiju H.

Sljedeći teorem iskazuje da za kliku $H = K_t$, optimalan Ramsey graf je potpuni graf $K_{r(K_t)}$.

TEOREM 4.5 (Chvátal). *Za* $t \geqslant 3$ *vrijedi*

$$\widehat{r}(K_t) \geqslant \binom{r(K_t)}{2}.$$

DOKAZ. Neka je $\varphi : E(K_{r(t)-1}) \to \{0, 1\}$ bojenje grafa $K_{r(t)-1}$ koje ne sadrži jednobojnu K_t. Neka je G graf koji zadovoljava

$$G \to H.$$

Dokazat ćemo da vrijedi $e(G) \geqslant \binom{r(K_t)}{2}$.

Pretpostavimo da postoji particija $\pi : V(G) \to [r(t) - 1]$ vrhova grafa G takva da za svaki brid $uv \in E(G)$ vrijedi $\pi(u) \neq \pi(v)$ (tj., kromatski broj grafa G je najviše $r(t) - 1$). Tada možemo obojiti bridova grafa G tako da

$$uv \mapsto \varphi(\pi(u), \pi(v)).$$

Takvo bojenje ne sadrži jednobojnu K_t po definiciji φ.

Dakle, ne postoji spomenuta particija π. Promatrajmo dobru particiju vrhova $V(G)$ na minimalni broj skupova, označenu sa $\chi \geqslant r(K_t)$. Između svaka dva elementa particije postoji brid grafa G, jer bismo u protivnom mogli spojiti dva elementa. Dakle, vrijedi

$$e(G) \geqslant \binom{\chi}{2} \geqslant \binom{r(K_t)}{2},$$

kao što smo htjeli dokazati. □

Slijede dvije vježbe za 'probavljanje' definicije Ramseyevih bridnih brojeva.

ZADATAK 6. Neka je $K_{1,n}$ *zvijezda* sa n listova. Dokažite da vrijedi $\widehat{r}(K_{1,n}) = 2n - 1$.

ZADATAK 7. Neka je S_n 'dupla zvijezda', graf sa dva povezana vrha, svaki sa $n/2$ susjeda listova. Dokažite da vrijedi $\widehat{r}(S_n) \geqslant n^2/100$.

Kao i kod klasičnih Ramseyevih brojeva, za rijetke grafove H imamo vrlo različite ograde i metode nego za klike K_t. Primijetimo da Teorem 4.2 već daje ogradu $\widehat{r}(H) = O(|V(H)|)^2$ za grafove H ograničenog stupnja.

Beck je dokazao da za put P_n vrijedi $\widehat{r}(P_n) = O(P_n)$. Friedman i Pippenger su poopćili Beckov rezultat na stabla ograničenog stupnja: za dani Δ postoji konstanta $C = C(\Delta)$ takva da za stabla T maksimalnog stupnja Δ vrijedi

$$\widehat{r}(T) \leqslant C|V(T)|.$$

Postavlja se pitanje, vrijedi li slična ograda za proizvoljne grafove H? Rödl i Szemerédi su vrlo elegantnim argumentom dokazali da postoje 3-regularni grafovi H na n vrhova za koje $\widehat{r}(H) \geqslant n \log^{1/60} n$.

Ovo motivira daljnje istraživanje u dva smjera:

(1) pod kojim dodatnim pretpostavkama na H vrijedi $\widehat{r}(H) = O(|V(H)|)$, i

(2) koje ograde možemo dobiti za grafove *ograničenog stupnja*?

U oba smjera postoji mnogo daljnjih rezultata. Kao što ćemo vidjeti u sljedećem rezultatu, pitanje (1) je usko vezano uz svojstva tzv. *linearnih ekspandera*, koji igraju bitnu ulogu u teoriji brojeva i teorijskom računarstvu. S druge strane, za (2) se koriste svojstva slučajnih grafova i metoda regularnosti za rijetke grafove. Možda ćemo dokazati Beckov teorem.

TEOREM 4.6 (Beck, 1983.). *Za $C = 80000$ i dovoljno veliki t, postoji graf G sa Ct bridova takav da svaki podgraf $G' \subset G$ sa $e(G') \geqslant \frac{e(G)}{2}$ sadrži put P_t (put sa t vrhova). Slijedi*

$$G \to P_t \quad i \quad \widehat{r}(P_t) \leqslant Ct.$$

PITANJE 4.7. Neka je R_n rešetka $n \times n$. Vrijedi li

$$\widehat{r}(R_n) = O(n^2)?$$

****************************** 10. siječnja 2023. ******************************

Sada ćemo dokazati Teorem 4.6. U dokazu ključnu ulogu igratzv. *svojstvo ekspanzije.*

TEMA ZA SEMINAR 6. Ekspandirajući grafovi, i njihove primjene u teorijskom računarstvu [**HLW06**] i/ili teoriji brojeva [**Lub12**] i/ili Ramseyevoj teoriji [**FP87, KLWY21**].

Neka je G graf na n vrhova. Prisjetimo se da je $e_G(X, Y)$ broj bridova $xy \in E(G)$ sa $x \in X, y \in Y$ (bridovi u $X \cap Y$ se broje samo jednom). Graf G na n vrhova nazivamo **(β, α)-ekspanderom** ako za sve skupove $X \subset Y \subset V(G)$ sa $|X| \leqslant \alpha n$ i $|Y| \leqslant 3|X|$ vrijedi

$$e_G(X, Y) < \frac{2\beta e(G)}{n} \cdot |X| = \beta d(G)|X|.$$

LEMA 4.8. *Ako je G (β, α)-ekspander, onda svaki podgraf grafa G s barem $2\beta e(G)$ bridova sadrži put sa barem αn vrhova.*

Prije dokaza, trebamo sljedeću činjenicu o ekspanziji.

LEMA 4.9. *Neka je G graf sa svojstvom da za svaki skup $U \subset V(G)$, $|U| \leqslant u$ vrijedi*

$$|U \cup N_G(U)| \geqslant 3|U|.$$

Tada G sadrži put P sa $|V(P)| > u$.

DOKAZ. Neka je $P = x_0x_1 \dots x_h$ najdulji put u G. *Elementarna transformacija* P' puta P je bilo koji put oblika

$$P' = x_0x_1 \dots x_{i-1}x_hx_{h-1} \dots x_i.$$

Primijetimo da je jedini brid koji je prekinut ovom elementarnom transformacijom brid $x_{i-1}x_i$.

Transformacija puta P je bilo koji put dobiven nizom elementarnih transformacija. Neka je U skup svih završnih točaka transformacija puta P, i neka je $U^{\pm}$ skup njihovih *susjednih* vrhova na P, tj.

$$U^{\pm} = \{x_i : 1 \leqslant i \leqslant h-1, \{x_{i-1}, x_{i+1}\} \cap U \neq \emptyset\}.$$

Primijetimo da vrijedi $|U^{\pm}| \leqslant 2|U| - 1$. Sljedeća tvrdnja je poznata kao Pósina Lema, i često se koristi u konstrukciji *dugih* puteva u grafovima.

TVRDNJA 4.10. *Vrijedi* $N_G(U) \subset U \cup U^{\pm}$.

DOKAZ. . Neka je $x \in U$, $y \in V(P)$ i $xy \in E(G)$. Za početak, $y \in V(P)$ jer u protivnom P nije najdulji put. Dokazat ćemo da je $y \in U \cup U^{\pm}$. Pretpostavimo suprotno. Neka su y^- i y^+ susjedi vrha y na P (nb $y \neq x_h$). Znači da na svim transformacijama puta P, y ima susjede y^+ i y^-.

Neka je P_x transformacija puta P sa završnom točkom x. Elementarnom transformacijom koristeći brid xy, dobivamo y^- ili $y^+ \in U$, kontradikcija.

□

Slijedi $|U \cup N_G(U)| \leqslant 3|U| - 1$. Po pretpostavci o grafu G, vrijedi $|U| > u$, dakle $|V(P)| > u$. □

ZADATAK 8. Dokažite Diracov teorem: svaki graf G minimalnog stupnja $|V(G)|/2$ sadrži Hamiltonov put (put sa svih n vrhova).

DOKAZ LEME 4.8. Neka je G' podgraf grafa G sa $e(G') \geqslant 2\beta e(G)$ (i time $d(G') \geqslant 2\beta d(G)$).

Dokazat ćemo da G' sadrži podgraf H koji zadovoljava uvjete Leme 4.9. Konkretnije, vrijedi sljedeća tvrdnja.

TVRDNJA 4.11. *Postoji neprazan podgraf H grafa G' takav da za svaki skup $X \subset V(H)$ vrijedi*

$$e_H(X, V(H)) \geqslant \frac{1}{2} d(G')|X|.$$

Da bismo dokazali Tvrdnju, neka je $W \subset V$ minimalan neprazni podskup skupa $V(G)$ koji zadovoljava $e_{G'}(W) \geqslant \frac{1}{2}d(G')|W|$, i neka je H podgraf G' *induciran na skupu* W, tj.

$$H = e_{G'}(W) \cap \binom{W}{2}.$$

Neka je $X \subset W$ neprazan skup, i $Y = W \setminus X \neq \emptyset$. Vrijedi

$$e_H(X, W) = e_{G'}(W) - e_{G'}(Y) > \frac{1}{2} d_{G'}|W| - \frac{1}{2} d(G')|Y|,$$

po izboru skupa W. Dakle $d_H(X, W) \geqslant \frac{1}{2}d(G')|X|$, pa H zadovoljava zaključak Tvrdnje.

Neka je $U \subset W = V(H)$ sa $|U| \leqslant \alpha n$. Tvrdimo da

$$|U \cup N_H(U)| \geqslant 3|U|;$$

u protivnom, za $Y = U \cup N_H(U)$ vrijedi $e_H(U, Y) \leqslant e_G(U, Y) < \beta d(G)|U|$. S druge strane, po definiciji Y i po izboru skupa W vrijedi

$$e_H(U, Y) = e_H(U, W) \geqslant \frac{1}{2} d(G')|U| \geqslant \beta d(G)|U|,$$

što dovodi do kontradikcije. Dakle, graf H zadovoljava uvjet Leme 4.9 sa $u = \lfloor \alpha n \rfloor$, pa H sadrži put duljine barem αn. □

LEMA 4.12. *Neka je $p = \frac{50}{n}$. Za dovoljno veliki n, s vjerojatnošću barem $3/4$, slučajni graf $G_{n,p}$ je $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{1600}\right)$-ekspander, i zadovoljava $\left|e(G_{n,p}) - \frac{pn^2}{2}\right| \leqslant 0.01pn^2$.*

DOKAZ. Drugi dio tvrdnje vrijedi jer je broj bridova u $G_{n,p}$ binomna slučajna varijabla očekivane vrijednosti $p\binom{n}{2}$.

Za dokazati ekspanziju, neka je Z_s slučajna varijabla koja broji parove skupova (X, Y) sa $|X| = s \leqslant \frac{n}{1600}$, $X \subset Y$, $|Y| \leqslant 3|X|$ i $e_{G_{n,p}}(X, Y) \geqslant \frac{pn}{5}|X| = 10|X|$. Neka je $d = \frac{pn}{5} = 10$. Za dani par (X, Y), broj bridova $e(X, Y)$ je binomna varijabla s vjerojatnošću p i $\binom{s}{2} + s^2$ mogućih bridova. . Dakle,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[Z_s\right] &\leqslant \binom{n}{s}\binom{n}{2s}\binom{5s^2/2}{ds}p^{ds} \\
&\leqslant \left(\frac{en}{s}\right)^{s+2s} \cdot 2^{-2s}\left(\frac{5es^2}{2ds} \cdot \frac{5d}{n}\right)^{ds} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{4}\left(\frac{en}{s}\right)^3\left(\frac{25es}{2n}\right)^d\right)^s = \left(\frac{1}{4}\left(\frac{s}{n}\right)^{d-3}\left(\frac{25e}{2}\right)^d e^3\right)^s \\
&\leqslant \left(\frac{1}{4}\left(\frac{s}{n}\right)^{d-3}\left(\frac{25e}{2}\right)^{d+3}\right)^s
\end{aligned}
$$

Iz uvjeta $s \leqslant n$ dobivamo $\frac{s}{n} \leqslant \left(\frac{2}{25e}\right)^2$, dakle

$$
\mathbf{E}\left[Z_s\right] \leqslant \left(\frac{25e}{2}\right)^{(-2d+6+d+3)s} < 20^{-s}.
$$

Slijedi da za $Z = \sum_{s \leqslant n/1600} Z_s$ vrijedi $\mathbf{E}[Z] < 1/10$, pa s vjerojatnošću barem $9/10$ imamo $Z = 0$. Neka je G graf u kojem vrijedi $Z = 0$ i $e(G) \geqslant 1.1pn^2/2$. Tada za svaki promatrani par skupova (X, Y) vrijedi

$$
e_G(X, Y) \leqslant \frac{pn}{5}|X| \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{2e(G)}{4n}|X|,
$$

pa je G $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{1600}\right)$-ekspander po definiciji. □

Sada ćemo dokazati Beckov teorem, točnije $\widehat{r}(P_t) \leqslant 1600 \cdot 50t$ za dovoljno veliki t.

DOKAZ. Neka je n dovoljno velik da postoji graf G koji zadovoljava Lemu 4.12, i neka je $t = \frac{n}{1600}$. Tvrdimo da vrijedi

$$
G \to P_t.
$$

Naime, za dano bojenje grafa G, neka je G' graf koji čini 'većinska boja'. Lema 4.9 sa $\beta = 1/4$ povlači da G sadrži put duljine t. Budući da je

$$
e(G) \leqslant 1.01pn^2/2 \leqslant 50pn \leqslant 50 \cdot 1600t,
$$

tvrdnja je dokazana. □

TEMA ZA SEMINAR 7. (i) Ramseyeva svojstva slučajnih grafova (Nenadov–Steger i citirani članci.)
(ii) Donja ograda na Ramseyev bridni broj 3-regularnih grafova (Tikhomirov 2022.)

(iii) Daljni grafovi sa linearnim Ramseyevim bridnim brojem, i robusna svojstva grafova ekspandera (Friedman–Pippenger 1987., Kamčev et al. 2019.)

(iv) Nova gornja ograda na Ramseyev bridni broj rešetke, i metoda regularnosti za rijetke grafove (Conlon et al. 2022.)

POGLAVLJE 5

Van der Waerdenov teorem

************************** 17.siječnja ******************************

Tema ovog poglavlja je van der Waerdenov teorem (Teorem 1.2). Prisjetimo se, taj teorem tvrdi da za dani $k, r \in \mathbf{N}$ i dovoljno veliki $[n]$, svako r-bojenje skupa $[n]$ sadrži jednobojni aritmetički niz duljine k (k-AP). Odgovarajuća hipoteza potječe od Schura [**Sch11**].

Usredotočit ćemo se na topološki dokaz. Na predavanju ćemo pokazati kombinatorni argument za $k = 3$ i $r \in \{2, 3\}$. Kasnije ćemo pokazati kombinatorni dokaz Hales–Jewett teorema, koji je apstraktno poopćenje van der Waerdenovog teorema.

Prirodno je pitati se vrijede li slične izjave za *beskonačne* aritmetičke nizove.

Zadatak 9. (i) Pronađite 2-bojenje prirodnih brojeva bez jednobojnog beskonačnog AP-a.
(ii) Postoji li crveno-plavo bojenje prirodnih brojeva koje ne sadrži crveni 3-AP niti beskonačni plavi AP?

Zadatak 10. Vrijedi li tvrdnja:
(i) za svako 100-bojenje *realnih brojeva*, postoji jednobojno rješenje jednadžbe $x - y = 1$,
(ii) za svako 100-bojenje *realnih brojeva*, postoji jednobojno rješenje jednadžbe $x - 2y + z = 1$.

Zadatak 11. Dokažite Schurov teorem: Za svaki r postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da svako r-bojenje skupa $[n]$ sadrži jednobojnu Schurovu trojku,
(i) uz pomoć Ramseyevog teorema,
(ii) uz pomoć van der Waerdenovog teorema.

5.0.1. Zagrijavanje: Schurov teorem uz pomoć Ramseya.

Teorem 5.1 (Schur, 1911.). *Za svaki r postoji $n \in \mathbf{N}$ takav da svako r-bojenje skupa $[n]$ sadrži jednobojnu Schurovu trojku.*

Dokaz. (Na predavanju.) Neka n zadovoljava

$$K_n \xrightarrow{r} K_3.$$

Neka je dano bojenje $f : [n] \to [r]$. Definirajmo bojenje grafa

$$g : E(K_n) \to [r], \quad g(i, j) = f(|i - j|).$$

Neka $i < j < k$ čine jednobojni trokut, tj. $g(i, j) = g(j, k) = g(i, k)$. Primijetimo da brojevi $j - i$, $k - j$ i $k - i$ čine Schurovu trojku, i $f(j - i) = f(k - j) = f(k - i)$. Time je dokazana tvrdnja. □

5.1. Motivacija iz teorije brojeva

Postoji li k uzastopnih kvadratnih ostataka modulo p, za dani k i veliki prosti broj p?

Zanimljivo je promotriti prvo $k = 2, 3$. Za $k = 2$, Gauss je dokazao da je broj uzastopnih parova kvadratnih ostataka

$$\begin{cases} \frac{p-5}{4}, p \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{p-3}{4}, p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Broj uzastopnih trojki (tj. $k = 3$) ovisi o sljedećem parametru: neka je $a \in Z$ jedinstveno rješenje jednadžbe $p = a^2 + b^2$ koje zadovoljava $a \equiv 1 \pmod 4$ (rješenje postoji prema Fermatovom teoremu o dva kvadrata, i naglašavamo da može biti negativno). Primjerice

$$5 = 1^2 + 2^2$$
$$13 = (-3)^2 + 2^2$$
$$29 = 5^2 + 2^2.$$

Gauss je dokazao da je broj uzastopnih trojki kvadratnih ostataka $\frac{p-2a-15}{8}$ ili $\frac{p+2a-7}{8}$, ovisno o p modulo 8. Primjerice za $p = 29, odgovor = (29 + 10 - 7)/8 = 4$, a trojke kvadratnih ostataka su sadržane u $4, 5, 6, 7$ i $22, 23, 24, 25$.

Početkom 20. stoljeća, znalo se za postojanje uzastopnih k-torki kvadratnih ostataka za $k \leqslant 5$. Za proizvoljni k, postojanje je dokazao Brauer [**GRS13**] uz pomoć ojačanja Van der Waerdenovog Teorema. Davenport je 1939. pokazao da je asimptotski broj uzastopnih k-torki kvadratnih ostataka $2^{-k}p$ $(p \to \infty)$.

Pokazat ćemo Brauerov dokaz.

Lema 5.2 (Schur). *Za dane prirodne brojeve k, r postoji n takav da za svako r-bojenje skupa $[n]$, postoje x i d za koje su brojevi*

$$d, x, x + d, \ldots, x + (k - 1)d$$

jednobojni.

Dokaz. Indukcija po r: $r = 1$ je očit, pa pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $r - 1$, i neka je n_* dovoljno velik za $r - 1$.

Neka je dano bojenje $f : [n] \to [r]$ za dovoljno veliki n. Primijenimo van der Waerdenov teorem za nizove duljine $(k - 1)n_* + 1$ i r boja (i neka je n dovoljno velik za tu primjenu). Dakle, postoji jednobojni niz, $y, y + d, \ldots, y + kn_*d$, i bsomp $f(y) = \ldots = f(kn_*d) = r$.

Promotrimo skup $D = \{d, 2d, \ldots, n_*d\}$. Ako je neki element $sd \in D$ u boji r, tada imamo željenu strukturu: $y, y + sd, \ldots, y + (k - 1)sd$. U protivnom, D je obojen u $r - 1$ boja, pa možemo primijeniti induktivnu hipotezu (!uz izomorfizam!) i zaključiti da D sadrži željenu jednobojnu strukturu. □

Usput, primijetimo da vrijedi i sljedeća tvrdnja.

ZADATAK 12. Dokažite sljedeću tvrdnju. Za dane $r \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{Q}$, postoji n takav da za svako r-bojenje skupa $[n]$, postoje x i d za koje su brojevi

$$d, x, x + bd$$

jednobojni.

ZADATAK 13. Dokažite da za dovoljno veliki prosti broj p, postoji k uzastopnih kvadratnih ostataka mod p.

5.2. Princip kompaktnosti

Sljedeća, naizgled slabija izjava, povlači Teorem 1.2.

TEOREM 5.3. *Za dane prirodne brojeve k i r, svako r-bojenje skupa $\mathbf{Z}$ sadrži k-AP.*

Zašto je ipak bitno imati 'konačnu' verziju? Prvo, originalni van der Waerdenov induktivni dokaz neizbježno koristi konačnu izjavu za $r-1$. Drugo, iz sljedećeg dokaza ne dobivamo nikakvu gornju ogradu na traženi broj n.

DOKAZ DA 1.2 SLIJEDI IZ TEOREMA 5.3. Dokazat ćemo iskaz za bojenja $\mathbf{N}$; $\mathbf{Z}$ je vježba. Pretpostavimo da za svaki j, postoji bojenje $\varphi_j : [j] \to r$ bez jednobojnog aritmetičkog niza. Induktivno možemo konstruirati bojenja $f_n : [n] \to [r]$ takvo da

(i) za $n' \leqslant n$, $f_n \restriction_{[n']} = f_{n'}$,
(ii) postoji beskonačni niz bojenja $(\varphi_i)_i$ koja se slažu s f_n na skupu $[n]$,
(iii) bojenje f_n ne sadrži jednobojni k-AP u $[n]$.

Definirajmo bojenje $f : \mathbf{N} \to [r]$ kao $f(n) = f_n(n)$. Ako f sadrži jednobojni aritmetički niz $x < y < z$, tada i f_z sadrži jednobojni aritmetički niz, što dovodi do kontradikcije. □

Implicitno smo dokazali i koristili činjenicu da je prostor r-bojenja skupa $\mathbf{N}$ s produktnom topologijom (tj. topologijom koju inducira metrika $d(\varphi, \psi) = 1/\min\{n : \varphi(n) \neq \psi(n)\}$) kompaktan. Dakle, svaki niz ima konvergentan podniz.

5.3. Topološki dokaz van der Waerdenovog teorema

Izvor ovog dokaza su predavanja Mathiasa Schachta [Sch11] i Christiana Reihera, ili knjiga [GRS13]. Potrebna podloga iz analize može se naći u bilješkama [Sch11]. Konkretno, trebat ćemo Baireov teorem o kategorijama.

TEOREM 5.4 (Baireov teorem o kategorijama). *Neka su $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ otvoreni gusti podskupovi kompaktnog metričkog prostroa (X, ρ). Onda je i presjek $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n$ gust.*

ZADATAK 14. Neka je $f : (0, \infty)$ neprekidna funkcija takva da vrijedi $\lim_n f(nx) = 0$ za svaki $x > 0$. Dokažite da vrijedi $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Koristit ćemo i Zornovu Lemu, koja je logički ekvivalentna Aksiomu izbora i često se koristi u Ramseyevoj teoriji.

TEOREM 5.5 (Zornova lema). *Neka je $(P; \leqslant)$ poset (???)sa svojstvom da svaki lanac ima gornju ogradu. Onda P ima maksimalni element (tj. element p^* za koji ne postoji $p > p^*$ u P).*

Dinamički sustav $\mathcal{S} = (X, T_1, \ldots, T_k)$ se sastoji od kompaktnog metričkog prostora X i međusobno komutativnih homeomorfizama T_i na X. Metriku na X označavamo sa ρ.

Sustav je **minimalan** ako ne postoji podskup $A \subset S$ sa svojstvom $T_i[A] = A$ za $i \in [k]$.

ZADATAK 15. Neka je $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $\alpha \in X$ i $T(x) = x + \alpha$. Za koje vrijednosti je sustav (X, T) minimalan?

Sljedeći teorem možemo promatrati kao *topološku verziju* van der Waerdenovog teorema.

TEOREM 5.6. *Neka je $(X, T_1, \ldots, T_k)$ dinamički sustav.*
(i) Za svaki $\epsilon > 0$, postoje $x \in X$ i $m \in \mathbf{N}$ sa svojstvom

$$(\forall i \in [k]) \quad \rho(x, T_i^m x) < \epsilon.$$

(ii)Postoji $x \in X$ takav da je za svaki $\epsilon > 0$, skup

$$\{m \in \mathbf{N} : (\forall i \in [k]) \quad \rho(x, T_i^m x) < \epsilon\}$$

beskonačan.

*************************** 24 siječnja (otprilike)************************

Pokažimo prvo kako slijedi van der Waerdenov teorem za cijele brojeve.

DOKAZ TEOREMA 5.3. Neka je $W = [r]^{\mathbf{Z}}$ prostor r-bojenja skupa $\mathbf{Z}$, i neka je ρ metrika definirana s

$$\rho(x, y) = (\min\{|i| : x(i) \neq y(i)\} + 1)^{-1}$$

za $x \neq y$. Prostor W je kompaktan jer svaki niz ima konvergentan podniz (vidi 'princip kompaktnosti').[12] Definirajmo *shift operator* T putem

$$(Tx)(i) = x(i + 1),$$

dakle bojenje Tx je 'lijevi shift' bojenja x. T je neprekidna bijekcija, dakle homeomorfizam. Definirajmo za $x \in W$

$$\bar{x} = cl\{T^s x : s \in \mathbf{Z}\}.$$

Zbog neprekidnosti imamo $T[\overline{A}] \subset \overline{T[A]}$ za svaki $A \subset W$, a iz kompaktnosti slijedi i $T[\overline{A}] \supset \overline{T[A]}$ ($T[\overline{A}]$ je zatvoreni skup koji sadrži $T[A]$). Nadalje $T\{T^s x : x \in Z\} = \{T^s x : x \in Z\}$, pa slijedi

$$T[\bar{x}] = \bar{x}.$$

Sada možemo primijeniti Teorem 5.6 na dinamički sustav $(\bar{x}, T, T^1, \ldots, T^k)$ (T^i i T^j očito komutiraju). Dakle, postoji $y \in \bar{x}$ i $m > 0$ sa svojstvom

$$\rho(y, T^{im} y) < 1, \text{ tj. } y(0) = y(m) = \ldots = y(km).$$

[12] Kompaktnost slijedi i iz Tihonovljevog teorema.

Budući da je $y \in \bar{x}$, postoji $y' = T^s x$ sa $\rho(y, T^s x) < (km+1)^{-1}$, tj. y i $T^s x$ se poklapaju na $[-km, km]$, pa vrijedi

$$x(s) = x(s+n) = \cdots = x(s+km),$$

čime smo pronašli jednobojni k-AP. □

Primijetimo da smo koristili samo $(\forall\epsilon)(\exists x)\dots$, ali je jača izjava možda zanimljiva sama po sebi.

Zadatak 16. (i) Dokažite ekstenziju teorema o 'pravom kutu': u svakom r-bojenju skupa $\mathbf{Z}^k$ postoji jednobojni skup točaka

$$x, x+de_1, \dots, x+de_k,$$

pri čemu je e_i i-ti vektor 'kanonske baze' $\mathbf{Z}^k$ i $d \neq 0$.

Hint: $X = [r]^{\mathbf{Z}^k}$ sa odgovarajućom metrikom, T_i je 'shift za $-e_i$'.

(ii)* Dokažite da je gornja tvrdnja ekvivalentna Teoremu 5.6 (i).

(ii)** Dokažite da su gornje tvrdnje ekvivalentne tzv. Galai–Witt Teoremu (koji garantira jednobojne homotetične kopije danog skupa S u bojenjima $\mathbf{Z}^n$.)

Ostatak poglavlja je dokaz Teorema 5.6. Prvo ćemo dokazati da je dovoljno promatrati minimalne sustave.

Lema 5.7. *Svaki dinamički sustav $(X, T_1, \dots, X_k)$ ima minimalni podsustav, tj. zatvoreni podskup $S \subset X$ takav da je $(S, T_1, \dots, T_k)$ minimalni dinamički sustav.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ je zatvoren}, A \neq \emptyset, (\forall i \in [k])\ T_i[A] = A\}$. Ako je $(A_j)_{j\in J}$ lanac u $\mathcal{A}$ s obzirom na uređaj '$\subset$', onda je skup $A = \bigcap_{j\in J} A_j$ također u $\mathcal{A}$; naime, A je neprazan zatvoreni skup (koristeći kompaktnost), i za svaki $i \in [k]$ vrijedi

$$T_i[A] = \bigcap_{j\in J} T_i[A_j] = \bigcap_j A_j = A,$$

pri čemu smo za prvu jednakost koristili bijektivnost. Zornova Lema povlači da $\mathcal{A}$ ima minimalni element A. Sustav $(A, T_1, \dots, T_n)$ je minimalan po definiciji. □

Lema 5.8. *Neka je (X, T) minimalan dinamički sustav, i neka je B zatvoreni skup sa $T[B] \subset B$. Tada je $B = \emptyset$ ili $B = X$.*

Dokaz. Promatrajmo skup

$$C = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} T^k[B].$$

C je zatvoreni skup, i tvrdimo da vrijedi $T[C] = C$. Naime,

$$T[C] = \cap_{k\in\mathbf{N}} T^{k+1}[B] = C,$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz $B \supset T[B] \supset T^2[B] \dots$.

Po minimalnosti je $C \in \{X, \emptyset\}$. Dakle, $B \in \{X, \emptyset\}$, koristeći kompaktnost prostora X. □

Sada već možemo dokazati Teorem 5.6 za $k = 1$. Primijetimo da kada je T shift, sljedeća propozicija govori da bojenje x u nekom minimalnom podustavu $([r]^{\mathbf{Z}}, T)$ sadrži svaki konačni niz boja.

LEMA 5.9. *Za svaki dinamički sustav (X, T) postoji točka $x \in X$ takva da je za svaki $\epsilon > 0$ skup*

$$\{m \in \mathbf{N} : \rho(x, T^m x) < \epsilon\}$$

beskonačan.

DOKAZ. BSOMP X je minimalan. Za proizvoljni $x \in X$ i $n \in \mathbf{N}$, dokazat ćemo da je skup

$$Y = \{T^m x : m \geqslant n\}$$

gust (tj. $\bar{Y} = X$). Radi $T[Y] \subset Y$ vrijedi

$$T[\bar{Y}] \subset \overline{T[Y]} \subset \bar{Y},$$

pa slijedi $\bar{Y} = X$. □

Za dinamički sustav (X, T_i), neka je Γ grupa koju generiraju homeomorfizmi $T_1, \ldots, T_k$. .

LEMA 5.10. *Neka je $S = (X, T_1, \ldots, T_k)$ minimalan dinamički sustav i neka je $U \subset X$ neprazan otvoreni skup. Postoji konačni skup $\Gamma' \subset \Gamma$ takav da vrijedi*

$$\bigcup_{S \in \Gamma'} S[U] = X.$$

DOKAZ. Neka je $A = \bigcup_{S \in \Gamma} S[U]$. A je otvoreni skup sa $T_i[A] = A$. Iz minimalnosti sustava S slijedi $A \in \{X, \emptyset\}$, no $A \neq \emptyset$, dakle $\bigcup_{S \in \Gamma S[U]} = X$. Sada možemo dobiti Γ' koristeći kompaknost skupa X. □

LEMA 5.11. *Neka je $(X, T_1, \ldots, T_k)$ minimalni dinamički sustav. Za svaki $\epsilon > 0$ postoji konačan skup $\Gamma' \subset \Gamma$ takav da za svaki $x, x' \in X$ postoji $S \in \Gamma'$ takav da je $\rho(x, Sx') < \epsilon$.*

DOKAZ. Radi kompaktnosti, postoje točke $x_1, \ldots, x_n \in X$ sa svojstvom

$$\bigcup_{j \in [n]} B(x_j, \epsilon/2) = X.$$

Za dani x, x', tražimo j i S takve da su $x, Sx' \in B(x_j, \epsilon/2)$.

Po prethodnoj Lemi, za svaki $j \in [n]$ postoji konačan skup Γ_j takav da je $X = \bigcup_{S \in \Gamma_j} S^{-1}[B(x_j, \epsilon/2)]$. Sada za dane x, x' možemo odabrati $j \in [n]$ i $S \in \Gamma_j$ sa svojstvom $x \in B(x_j, \epsilon/2)$ i $x' \in S^{-1}B(x_j, \epsilon/2)$. Dakle, skup $\bigcup_{j \in [n]} \Gamma_j$ zadovoljava tvrdnju. □

Sada možemo dokazati glavni 'teorem o višestrukoj povratnosti'.

ZADATAK 17. Zašto je dovoljno dokazati da je skup iz Teorema 5.6 neprazan?

DOKAZ. Dokaz je indukcija po k, pri čemu je baza već dokazana.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k - 1$. Neka je X minimalan dinamički sustav.

Korak indukcije ćemo dokazati putem niza tvrdnji sa 'sve jačim kvantifikatorima'.

Tvrdnja 1. $(\forall \epsilon > 0)(\exists x, y \in X)(\exists m \in \mathbf{N})(\forall i \in [k]):\ \rho(x, T_i^m y) < \epsilon.$

Dokaz. Primijenimo pretpostavku indukcije na sustav

$$(X, T_1 T_k^{-1}, \ldots, T_{k-1} T_k^{-1}),$$

kako bismo dobili $x \in X$ i m sa svojstvom $\rho(x, T_i^m T_k^{-m} x) < \epsilon$ za $i \in [k-1]$. Sada možemo uzeti $y = T_k^{-m} x$, jer vrijedi $\rho(x, T_k^m y) = 0$. □

Tvrdnja 2. $(\forall \epsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists y \in X)(\exists m \in \mathbf{N})(\forall i \in [k]):\ \rho(x, T_i^m y) < \epsilon.$

Dokaz. Lema 5.11 nam daje konačan skup $\Gamma' \subset \Gamma$ takav da

$$(\forall z, z' \in X)(\exists S \in \Gamma')\rho(z, Sz') < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.1}$$

Po kompaktnosti, funkcije $T_i \in \Gamma'$ su uniformno neprekidne, i uzevši minimalni 'dobar' δ dobivamo $\delta > 0$ takav da $\rho(z, z') < \delta$ povlači $\rho(Sz, Sz') < \frac{\epsilon}{2}$ za svaki $S \in \Gamma'$.

Po prethodnoj Tvrdnji, postoje u, u' i m takvi da vrijedi $\rho(u, T_i^m u') < \delta_1$ za svaki $i \in [k]$.

Neka je $S \in \Gamma'$ takav da vrijedi $\rho(x, Su) < \frac{\epsilon}{2}$. Za svaki i vrijedi

$$\rho(x, T_i^m S u') \leqslant \rho(x, Su) + \rho(Su, S(T_i^m u')) \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2},$$

pa možemo uzeti $y = Su'$. □

Tvrdnja 3. $(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in X)(\exists m \in \mathbf{N})(\forall i \in [k]):\ \rho(x, T_i^m x) < \epsilon.$

Dokaz. Rekurzivno definirajmo nizove $(x_j)_{j \in N}$ i $(m_j)_{j \in N}$. Neka je $m_0 = 1$ i $x_0 \in X$ proizvoljan, i pretpostavimo da su x_j i m_j definirani. Označimo $M_j = m_0 + \cdots + m_j$ za svaki j. Neka je $\epsilon_{j+1} < \epsilon \cdot 2^{-j-2}$ takav da za svaki $m \leqslant M_j$ i $i \in [k]$ vrijedi

$$\rho(y, y') < \epsilon_{j+1} \Rightarrow \rho(T_i^m y, T_i^m y') < \frac{\epsilon}{2^{j+2}}.$$

Po Tvrdnji 2, postoje $x_{j+1} \in X$ i $m_{j+1} \in \mathbf{N}$ takvi da za $i \in [k]$,

$$\rho(x_j, T_i^{m_{j+1}} x_{j+1}) < \epsilon_{j+1}.$$

Dakle, za $m \leqslant M_j$ i savki $i \in [k]$,

$$\rho(T_i^m x_j, T_i^{m+m_{j+1}} x_{j+1}) < \epsilon \cdot 2^{-j-2}.$$

Po Dirichletovom principu, postoje $s < t \in \mathbf{N}_0$ sa $\rho(x_s, x_t) < \epsilon/2$. Sada za svaki i vrijedi

$$\begin{aligned}\rho(x_s, T_i^{m_{s+1}+\cdots+m_t} x_t) &\leqslant \rho(x_s, T_i^{m_{s+1}} x_{s+1}) + \rho(T_i^{m_{s+1}} x_{s+1}, T_i^{m_{s+2}+m_{s+1}} x_{s+2}) + \ldots \\ &+ \rho(T_i^{m_{t-1}+\cdots+m_s} x_{t-1}, T_i^{m_t+\cdots+m_s} x_t) \\ &< \epsilon \sum_{j \geqslant s} 2^{-s-2} < \epsilon/2.\end{aligned}$$

Dakle, $\rho(x_t, T_i^{M_t - M_s} x_t) < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon$, pa x_t zadovoljava tvrdnju sa $m = M_t - M_s$. □

Dokazali smo da je skup

$$A_\epsilon = \{x \in X : (\exists m \in N)(\forall i \in [k])\ \rho(x, T_i^m x) < \epsilon\}$$

neprazan za svaki $\epsilon > 0$. Sada ćemo pokazati da je skup A_ϵ gust.

Neka je $\delta > 0$ i $y \in X$. Lema 5.11 nam daje $\Gamma' \subset \Gamma$ (konačan) takav da

$$(\forall z, z' \in X)(\exists S \in \Gamma') : \ \rho(z, Sz') < \delta \tag{5.2}$$

Odaberimo η takav da za $S \in \Gamma'$, $\rho(u, u') < \eta$ povlači $\rho(Su, Su') < \epsilon$. Postoje $x \in A_\eta$ i $m \in \mathbf{N}$ takvi da za $i \in [k]$,

$$\rho(x, T_i^m x) < \eta \tag{5.3}$$

Radi (5.2), postoji $S \in \Gamma'$ sa $\rho(y, Sx) < \delta$. Sada, 'primijenimo' neprekidnost i izbor η na (5.3), i zaključimo

$$\rho(Sx, T_i^m Sx) < \epsilon.$$

dakle, Sx je točka u A_ϵ 'blizu' y, pa $\overline{A_\epsilon} = X$.

Skupovi A_ϵ su gusti otvoreni skupovi, jer vrijedi

$$A_\epsilon = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} \cap_{i \in [k]} \{x \in X : \rho(x, T_i^m x) < \epsilon\}.$$

Po Baireovom teoremu o kategorijama je $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_{1/k} \neq \emptyset$, pa postoji $x \in \bigcap_{k \in \mathbf{N}} A_{1/k}$. Taj x zadovoljava tvrdnju. $\square$

Tema za seminar 8. Dokazi Ramseyevog, van der Waerdenovog i Hindmanovog teorema uz pomoć ultrafiltera.

Tema za seminar 9. Minimalni broj rješenja odredjenih jednadžbi u bojenjima $\mathbf{Z}_n$ (aritmetičkih nizova, Schurovih trojki, ...).

Tema za seminar 10. Shelin dokaz Hales–Jewett teorema i Conlonov dokaz da je van der Waerdenov broj $W(k, 3) \leqslant 2^{2^k}$ (2021).

Tema za seminar 11. Elementarni dokazi density Hales–Jewett Teorema, e.g. Polymath ili Dodos, Kanellopoulos, Tyros.

POGLAVLJE 6

Daljnje jednadžbe i aritmetičke strukture

ZADATAK 18. Vrijedi li tvrdnja:
(i) za svako 100-bojenje *prirodnih brojeva*, postoji jednobojno rješenje jednadžbe $x - 2y = 0$,
(ii) za svako 100-bojenje *prirodnih brojeva*, postoji jednobojno rješenje jednadžbe $x - 3y + z = 0$.

ZADATAK 19. Vrijedi li tvrdnja:
(i) za svako 100-bojenje *realnih brojeva*, postoji jednobojno rješenje jednadžbe $x - y = 1$,
(ii) za svako 100-bojenje *realnih brojeva*, postoji jednobojno rješenje jednadžbe $x - 2y + z = 1$.
(iii) za svako 100-bojenje ravnine $\mathbf{R}^2$, postoji jednobojno rješenje jednadžbe $|x - y| = 1$.

6.1. Radov teorem

Neka je A $m \times n$ matrica s racionalnim koeficijentima. A je *particijski regularna* (PR) (nad $\mathbf{N}$) ako svako konačno bojenje skupa $\mathbf{N}$ sadrži jednobojno rješenje $x \in \mathbf{N}^n$ jednadžbe $Ax = 0$. U tom slučaju nazivamo i sustav $Ax = 0$ particijski regularnim.

Primjeri: k-AP, Schurove trojke.

TEOREM 6.1 (Rado, 1933. – slučaj jedne jednadžbe[13]). *Jednadžba* $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ *(s* $a_i \neq 0$*) je particijski regularna ako i samo ako postoji neprazan skup koeficijenata čija je suma nula.*

Dakle, možemo provjeriti PR svojstvo u konačnom vremenu.

DOKAZ. "$\Rightarrow$": Pretpostavimo da su a_i cijeli brojevi različiti od 0 za $i \in [n]$. Neka je p prost broj veći od $\sum_{i\in[n]} |a_i|$. Za $x \in \mathbf{N}$, neka je $d_p(x)$ posljednja znamenka u prikazu x u bazi p koja nije jednaka nuli, tj. ako je $x = ap^\ell$, i $a \neq 0 \pmod p$ onda je

$$d_p(x) = a \mod p \ \text{ i } L(x_i) = \ell.$$

Bojenje $d_p : \mathbf{N} \to [p-1]$ mora sadržavati jednobojno rješenje, i neka je to rješenje $(x_1, \dots x_n)$, sa $d_p(x_i) = d$.

Neka je $L = \min\{L(x_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, i neka je $I = \{i \in [n] : L(x_i) = L\}$. Promatrajući $p^{-L} \sum_{i\in[n]} a_i$ modulo p, dobivamo da

$$p \mid d \sum_{i\in I} a_i.$$

Međutim, po odabiru p, dobivamo $\sum_{i\in I} a_i = 0$.

[13] Glavne reference za ovo poglavlje su bilješke Christiana Reihera i Imrea Leadera.

Sada dokažimo pozitivni smjer. "$\Leftarrow$": Prisjetimo se da je po zadatku 12 jednadžba

$$x - y + bz = 0$$

particijski regularna. BSOMP $a_1 = 1 \in I$. Pronaći ćemo rješenje jednadžbe $\sum_{i\in[n]} a_i x_i = 0$, sa $x_1 = x$, $x_i = y$ za $i \in I \setminus \{1\}$, i $x_i = z$ za $i \notin I$. Dakle, jednadžba se svodi na

$$x + (\sum_{i\in I\setminus\{1\}} a_i)y + (\sum_{i\notin I} a_i)z = 0.$$

Ova jednadžba ima jednobojno rješenje, čime je dokaz završen. *Napomena* Za $\Rightarrow$ smo mogli promatrati bojenja modulo p za svaki prosti p: beskonačno mnogo tih bojenja ima isti skup $I = I(p)$ sa $\sum_{i\in I} a_i = 0 \pmod p$. $\square$

Kažemo da matrica A s kolonama $c(1), \ldots, c(r)$ ima *column property* ako postoji particija $B_0, B_1, \ldots, B_r$ skupa $[n]$ takva da vrijedi
(i) $\sum_{i\in B_0} c(i) = 0$,
(ii) $\sum_{i\in B_s} c(i)$ je linearna kombinacija (nad $\mathbf{Q}$) vektora $\{c_i : i \in B_1 \cup B_2 \cup \ldots B_{s-1}\}$, za $s \geqslant 1$.
Primjer: aritmetički nizovi zajedno s njihovom razlikom.

TEOREM 6.2 (Rado, 1933.). *Matrica je particijski regularna ako i samo ako ima CP.*

Primijetimo da je u gornjem dokazu PR $\Rightarrow$ CP korišteno $p \geqslant \sum_i |a_i|$ boja. Možemo li imati broj boja koji ovisi samo o dimenzijama matrice?

PITANJE 6.3. Za dane m i n postoji $r = r(m,n)$ takav da vrijedi ako je sustav $Ax = 0$ regularan za r-bojenja, onda je regularan za svako konačno bojenje.

TEMA ZA SEMINAR 12. Fox i Kleitman su 2006. dali potvrdnji odgovor za $n = 3$, i $r = 24$ boje.

ZADATAK 20. U svakom konačnom bojenju prirodnih brojeva, jedna boja sadrži rješenja svih PR sustava jednadžbi.

ZADATAK 21. (i) Dokažite vdw teorem uz pomoć Radovog. (Primijetite da tražimo *nekonstantne* aritmetičke nizove).
(ii) Dokažite da svako r-bojenje $\mathbf{N}$ sadrži $x_1, \ldots, x_k$ (recimo $k = 4$) čije su konačne sume jednobojne.

PITANJE 6.4. Koji su sustavi jednadžbni regularni za dvije boje? Konkretno, pronađite sustav $m = 2$ koji nema CP i regularan je za dvije boje.

TEMA ZA SEMINAR 13. Euklidska Ramseyeva teorija[14]. Primjerice, kromatski broj ravnine možda ovisi o aksiomima teorije skupova koje koristimo (ZFC ili ZF+LM).

*********************** 7. veljače 2023.**********************

[14] http://www.csun.edu/ ctoth/Handbook/chap11.pdf

POGLAVLJE 7

Minimalni broj rješenja linearnih jednadžbi u bojenjima cijelih brojeva

U ovom poglavlju bavit ćemo se minimizacijom broja jednobojnih rješenja određenih jednadžbi u 2-bojenjima $[n]$ ili u 2-bojenjima neke Abelove grupe. Glavna literatura su članci [**Gow15**, **SW17**, **FPZ**, **KLM21**]

Zadatak 22. (i) Neka je $R \cup R^c$ bojenje grupe $\mathbf{Z}_n$, pri čemu je $|R| = \frac{n}{2}$. Koji je asimptotski broj jednobojnih Schurovih trojki u $R \cup R^c$? Koji je broj 3-AP-a?
(ii) Neka je $R \cup R^c$ bojenje grupe $\mathbf{Z}_n$. Može li broj jednobojnih Schurovih trojki biti *značajno* manji od $\frac{1}{4}n^2$?
(iii) Neka je $R \cup R^c$ bojenje skupa $[n]$. Može li broj jednobojnih Schurovih trojki biti značajno manji od od $\frac{1}{4}n^2$?

Pitanje (iii) je odgovoreno u tri neovisna članka [**Dat03**, **RZ98**, **Sch99**]. Primijetimo da je $\frac{1}{4}$ također asimptotski broj rješenja u slučajnom bojenju.

Od sada će nas zanimati konfiguracije (tj. rješenja sustava jednadžbi) u $\mathbf{F}_p^n$, a koeficijenti jendadžbi će biti u $\mathbf{F}_p$. Pritom je p fiksni neparni prosti broj, a $\mathbf{F}_p^n$ je vektorski prostor čija dimenzija n teži u beskonačno, i svi asimptotski rezultati su izraženi s obzirom na n. Prostor $\mathbf{F}_p^n$ se često naziva *modelom konačnih polja*, i koristi se u aritmetičkoj kombinatorici jer mnogi problemi postaju čišći i jednostavniji, a zadržavaju svoju glavnu poantu. Primjerice, u [**Wol21**] možete naći dokaz Rothovog teorema u $\mathbf{F}_p^n$, koji je pojednostavljena verzija onog u $\mathbf{Z}_n$.

Pitanje: koliko ima rješenja jednadžbe $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0$ u $\mathbf{F}_p^n$, pri čemu su $a_i \in \mathbf{F}_p$? U slučajnom bojenju $\mathbf{F}_p^n$, koji je očekivani broj rješenja?
(Oprez: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ je sada vektor koji se sastoji od vektora, tj. matrica sa n redaka i k stupaca.)

Definicija 7.1. Za danu linearnu formu $L(x) = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$ sa $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{F}_p$, kažemo da je forma L (ili jednadžba $L(x) = 0$) **banalna** (eng. *common*) ako je u svakom 2-bojenju prostora $\mathbf{F}_p^n$ broj jednobojnih rješenja $(x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbf{F}_p^n)^k$ jednadžbe $L(x) = 0$ barem $2^{1-k}p^{n(k-1)}$.

Motivacija dolazi iz odgovarajućeg problema za grafove, i poznatih hipoteza Erdős–Burr–Rosta, i Sidorenka. Također, iz činjenice da je kontraprimjere, tj. skupove s malim brojem rješenja prilično teško konstruirati, i oni su obično vrlo blizu slučajnom. Jedan od problema je da ako neki skup R ima mali broj rješenja, njegov komplement će imati *previše* rješenja i kompenzirati manjak. I naravno, činjenica da postoji elegantna karakterizacija ukazuje na prirodnost problema.

ZADATAK 23. (i) Jesu li jednadžbe $x = 2y$ (??) i $x = 3y$ u $\mathbf{F}_{13}$ banalne? A u $\mathbf{F}_p$?[15]
(ii) Jedna lijepa ideja za kasnije: neka je $f : \mathbf{F}_{13} \to \{\pm 1\}$ slučajno bojenje. Dokažite da f s pozitivnom vjerojatnošću ima negativan broj rješenja.

Primijetimo da je za dokazivanje ne-banalnosti dovoljno naći jedan primjer, recimo u $\mathbf{F}_p^d$.
Banalne jedadžbe su sada karakterizirane.

TEOREM 7.2 ([**CCS07**, **SW17**, **FPZ**]). *Za neparni k, jednadžba $L(x) = 0$ je banalna. Za parni k, jednadžba je banalna ako i samo ako možemo upariti koeficijente u parove suprotnih elemenata (s obzirom na zbrajanje).*

Versteegen je proširio ovu karakterizaciju na konačne Abelove grupe.

Prvi korak dokaza je standardna redukcija problema sa podskupova $R \subset \mathbf{F}_p^n$ na funkcije $f : \mathbf{F}_p^n \to [-1, 1]$. Za funkciju f, definiramo *gustoću* rješenja L u f kao

$$\Lambda_L(f) = p^{-n(k-1)} \sum_{\mathbf{x} \in (\mathbf{F}_p^n)^k : L(\mathbf{x}) = 0} f(x_1) \ldots f(x_k).$$

Primjerice, kada je $f = I_R$ indikatorska funkcija skupa R, onda je $\Lambda_L(I_R) p^{n(k-1)}$ točno broj rješenja u R.

LEMA 7.3. *Jednadžba L je banalna akko za svaku funkciju $f : \mathbf{F}_p^n \to [0, 1]$ vrijedi*

$$\Lambda_L(f) + \Lambda_L(1 - f) \geqslant 2^{1-k}. \tag{7.1}$$

DOKAZ. Ako postoji bojenje $R \cup R^c$ koje pokazuje da L nije banalna jednadžba, onda vrijedi $\Lambda_L(I_R) + \Lambda_L(1 - I_R) < 2^{1-k}$.

Za suprotni smjer, pretpostavimo da za neki n postoji $f : \mathbf{F}_p^n \to [0, 1]$ koja ne zadovoljava (7.1). Neka je $f : \mathbf{F}_p^{n+n'} \to [0, 1]$ funkcija koja 'zaboravlja' posljednjih n' koordinata funkcije f. Promatrajmo slučajni podskup $R \subset \mathbf{F}_p^{n+n'} \to [0, 1]$ koji uključuje svaki element x s vjerojatnošću $f(x)$ neovisno o ostalim elementima. Vrijedi

$$\mathbf{E}[\Lambda_L(I_R)] = \Lambda_L(f) + O(p^{-n'}),$$

pri čemu greška $O(p^{-n'})$ uključuje rješenja koja nemaju svih k različitih koordinata. Ista jednakost vrijedi za $1 - I_R$. Dakle,

$$\mathbf{E}[\Lambda_L(I_R) + \Lambda_L(1 - I_R)] = \Lambda_L(f) + \Lambda_L(1 - f) + O(p^{-n'}) = 2^{1-k} - \epsilon + O(p^{-n'}).$$

Dakle, postoji skup R koji zadovoljava $\Lambda_L(I_R) + \Lambda_L(1 - I_R)$, pa jednadžba L nije banalna. $\square$

Naglasimo još jednom da je gornji dokaz standardna procedura.

Slijedi podloga iz diskretne Fourierove analize. Za $f : \mathbf{F}_p^n \to \mathbf{C}$, i $r \in \mathbf{F}_p^n$, definirajmo Fourierov koeficijent

$$\widehat{f}(r) = p^{-n} \sum_{x \in \mathbf{F}_p^n} f(x) \omega^{-r \cdot x},$$

pri čemu je $\omega = \omega_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$

[15] Napomena: 2 je primitivni korijen mod 13, $3^3 = 1 \mod 13$

Time smo dobili korespondenciju između f i njene Fourierove transformacije $\widehat{f} : \mathbf{F}_p^n \to \mathbf{C}$. (Primijetimo i da je preslikavanje $f \to \widehat{f}$ linearno). Nadalje, FT ima inverz

$$f(x) = \sum_{r \in \mathbf{F}_p^n} \widehat{f}(r)\omega^{r \cdot x}. \tag{7.2}$$

(Strogo gledano, $r \in \widehat{\mathbf{F}_p^n}$ živi u grupi karaktera $\mathbf{F}_p^n$, ali $\widehat{\mathbf{F}_p^n}$ i $\mathbf{F}_p^n$ su izomorfne grupe, pa ćemo taj element ignorirati.) Primijetimo i da budući da f poprima realne vrijednosti ako i samo ako vrijedi

$$\widehat{f}(r) = \overline{\widehat{f}(-r)} \text{ za svaki } r.$$

Vrijedi $\widehat{f}(0) = q^{-n} \sum_x f(x) = \mu_f$, što je srednja vrijednost funkcije f.

Primjeri: $\widehat{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$. Kada je $f_c \equiv c$ konstantna funkcija, imamo $\widehat{f_c}(0) = c$ i $\widehat{f_c}(r) = 0$ u ostalim točkama. Ova funkcija je analogon slučajnog skupa koji sadrži svaki element s vjerojatnošću $c \in [0, 1]$. Za općenitu funkciju f i konstantu c, imamo $\widehat{f+c}(0) = \widehat{f}(0) + c$ i $\widehat{f+c}(r) = \widehat{f}(r)$ za $r \neq 0$.

Možemo povezati $\Lambda_L(f)$ sa Fourierovom transformacijom f putem standardnog identiteta

$$\Lambda_L(f) = \sum_{r \in \widehat{\mathbf{F}_p^n}} \widehat{f}(a_1 r) \dots \widehat{f}(a_k r) = (\widehat{f}(0))^k + \sum_{r \in \widehat{\mathbf{F}_p^n} \setminus \{0\}} \widehat{f}(a_1 r) \dots \widehat{f}(a_k r). \tag{7.3}$$

Time smo pretvorili sumu $\sum_{\mathbf{x} \in (\mathbf{F}_p^n)^k : L(\mathbf{x})=0} f(x_1) \dots f(x_k)$ koju je možda teško vizualizirati u 'cikličnu' sumu produkata Fourieovih koeficijenata. Vidi se i da suma na desnoj strani mjeri *odstupanje od očekivanog broja rješenja.* Dakle, za 'bojenje' $f + (1 - f)$ vrijedi

$$\Lambda_L(f) + \Lambda_L(1 - f) = (\widehat{f}(0))^k + (1 - \widehat{f}(0))^k + (1 + (-1)^k) \sum_{r \in \widehat{\mathbf{F}_p^n} \setminus \{0\}} \widehat{f}(a_1 r) \dots \widehat{f}(a_k r). \tag{7.4}$$

DOKAZ TEOREMA 7.2. V. članak [FPZ]. □

ZADATAK 24. (i) Dokažite da je jednadžba $x+3y = z+3t$ banalna bez korištenja Fourierove analize. (Hint: Cauchy)
(ii) Dokažite da je sustav jednadžbi $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ i $x_1 - x_3 + 2(x_2 - x_5) = 0$ banalan.

PITANJE 7.4. Za neku ne-banalnu jednadžbu, možete li odrediti minimalnu gustoću rješenja u $\mathbf{F}_p^n$?

Potpuno analogno, možemo pokušati minimizirati broj rješenja dane jednadžbe u danom podskupu. Jednadžbu L nazivamo **Sidorenko** ako za svaku funkciju $f : \mathbf{F}_p^n \to [0, 1]$ srednje vrijednosti μ_f vrijedi

$$\Lambda_L(f) \geqslant \mu_f^k.$$

ZADATAK 25. (i) Dokažite da Sidorenko jednadžbe moraju biti banalne. (ii) Koje su jednadžbe Sidorenko? Konkretno, pronađite podskup $\mathbf{F}_p$ s 'premalo rješenja'.
(iii) Koji skup $A \subset [n]$ minimizira broj Schurovih trojki? (Nije teško pogoditi skup, a dokaz da je to uistinu minmum možete naći u članku Katherine Staden.)

Tema za seminar 14. Banalne i Sidorenko jednadžbe u konačnim Abelovim grupama (Versteegen).

Tema za seminar 15. Banalni i Sidorenko grafovi. Metoda entropije za dokazivanje Sidorenko svojstva. Do prije par mjeseci, za nijedan ne-banalan graf H se nije znao (asimptotski) minimalni broj kopija grafa H u bojenjima K_n. Fox i Wigderson su vrlo nedavno to uspjeli za određenu (vrlo specifičnu) klasu grafova H. Literatura: Gowers; Fox, Wigderson.

DODATAK A

Notacija i alati

A.1. Grafovi

Graf $G = (V, E)$ je određen skupom vrhova $V = V(G)$ i skupom bridova $E = E(G) \subset \binom{V}{2}$. Obično poistovjećujemo G sa skupom bridova $E = E(G)$. Put i ciklus na n vrhova se označavaju sa P_n i C_n respektivno.

Vrh v je susjed vrha u ukoliko je $uv \in E$. $N_G(v)$ je skup susjeda vrha v, a stupanj vrha v je

$$d(v) = d_G(v) = |N_G(v)|.$$

Usput, vrijedi jednakost $\sum_v d_G(v) = 2|E(G)|$, pa je prosječan stupanj grafa G

$$\bar{d}(G) = \frac{2|E(G)|}{n}.$$

Gustoća grafa G je $\frac{|E(G)|}{\binom{n}{2}}$.

Skup od t vrhova u G koji ne induciraju niti jedan brid naziva se t-nezavisnim skupom u G. Za skup vrhova $S \subset (G)$, *inducirani podgraf* G na S (koji označavamo sa $G[S]$) je graf na skupu S, sa

$$E(G[S]) = E(G) \cap \binom{S}{2}.$$

Za skupove $A, B \subset V(G)$, neka je $E(A, B)$ skup bridova uv sa $u \in A$, $v \in B$ (tj. bridova *između* A i B). Gustoća bridova između A i B je

$$d(A, B) = \frac{|E(A, B)|}{|A||B|}.$$

Često pišemo $e(G) = |E(G)|$ i $e(A, B) = |E(A, B)|$.

A.2. Asimptotska notacija

Koristimo asimptotsku notaciju konzistentnu primjerice sa [**AS16**]. Neka su f i g funkcije $f, g : \mathbf{N} \to (0, \infty)$. Pišemo $f = O(g)$ ako vrijedi

$$f(n) \leqslant Cg(n)$$

za neku konstantu $C > 0$ i svaki $n \in \mathbf{N}$. Napomenimo da implicitna konstanta u $O()$ može ovisiti o svim drugim parametrima problema.

Nadalje, $f = o(g)$ znači da $\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = 0$.

Oznakom $f \sim g$ označavat ćemo da je $\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = 1$ (ekvivalentni izraz je $f = g(1 + o(1))$).

Primijetimo da su sve tri spomenute relacije tranzitivne.

A.3. Korisne ocjene

Vrijede sljedeće nejednakosti.

Za svaki $x > 0$, $(1 - x) \leqslant e^{-x}$ za $x > 0$, i $1 - x \geqslant e^{-2x}$ za dovoljno mali x.

Za $n \in \mathbf{N}$, $n! \geqslant 2\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Slijedi da za $n, m \in N$,

$$\left(\frac{ne}{m}\right)^m \binom{n}{m} \leqslant \left(\frac{ne}{m}\right)^m.$$

Izvod ovih, i mnogih sličnih ograda, možete naći u [**Das14**].

Bibliografija

[AS16] Noga Alon i Joel H. Spencer: *The probabilistic method*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, fourth izdanje, 2016, ISBN 978-1-119-06195-3. 9, 10, 13, 16, 47

[CCS07] Peter Cameron, Javier Cilleruelo i Oriol Serra: *On monochromatic solutions of equations in groups*. Rev. Mat. Iberoam., 23(1):385–395, 2007. 44

[Chv77] V. Chvátal: *Tree-complete graph Ramsey numbers*. J. Graph Theory, 1(1):93, 1977, ISSN 0364-9024. https://doi.org/10.1002/jgt.3190010118. 25

[Con21a] David Conlon: *Extremal Graph Theory*, 2021. http://www.its.caltech.edu/~dconlon/Extremal-course.html. 18

[Con21b] David Conlon: *Graph Ramsey Theory*, 2021. http://www.its.caltech.edu/~dconlon/Ramsey-course.html. v, 5

[CRST83] C. Chvatál, V. Rödl, E. Szemerédi i W. T. Trotter, Jr.: *The Ramsey number of a graph with bounded maximum degree*. J. Combin. Theory Ser. B, 34(3):239–243, 1983, ISSN 0095-8956. https://doi.org/10.1016/0095-8956(83)90037-0. 2, 25

[Das14] Shagnik Das: *A brief note on estimating binomial coefficients*, 2014. http://page.mi.fu-berlin.de/shagnik/notes/binomials.pdf. 48

[Dat03] Boris A Datskovsky: *On the number of monochromatic Schur triples*. Adv. in Appl. Math., 31(1):193–198, 2003, ISSN 0196-8858. https://doi.org/10.1016/S0196-8858(03)00010-1. 43

[ES35] P. Erdös i G. Szekeres: *A combinatorial problem in geometry*. Compositio Math., 2:463–470, 1935, ISSN 0010-437X. http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__463_0. 1, 2, 5, 6, 8

[FP87] J. Friedman i N. Pippenger: *Expanding graphs contain all small trees*. Combinatorica, 7(1):71–76, 1987, ISSN 0209-9683. https://doi.org/10.1007/BF02579202. 28

[FPZ] Jacob Fox, Huy Tuan Pham i Yufei Zhao: *Common and Sidorenko Linear Equations*. Q. J. Math. To appear. 43, 44, 45

[Gow15] W T Gowers: *Entropy and Sidorenko's conjecture – after Szegedy*. https://gowers.wordpress.com, 2015. [Online; accessed 17-June-2021]. 43

[GRS13] Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild i Joel H. Spencer: *Ramsey theory*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2013, ISBN 978-1-118-79966-6. Paperback edition of the second (1990) edition [MR1044995]. v, 1, 34, 35

[HLW06] Shlomo Hoory, Nathan Linial i Avi Wigderson: *Expander graphs and their applications*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 43(4):439–561, 2006, ISSN 0273-0979. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-06-01126-8. 28

[Jun] Veselin Jungić: *Erdő-Szekeres Problem of Convex Polygons*. http://www.sfu.ca/~vjungic/RamseyNotes/sec_ES2.html. 8

[KLM21] Nina Kamčev, Anita Liebenau i Natasha Morrison: *On uncommon systems of equations*. arXiv:2106.08986, 2021. 43

[KLWY21] Nina Kamcev, Anita Liebenau, David R. Wood i Liana Yepremyan: *The size Ramsey number of graphs with bounded treewidth*. SIAM J. Discrete Math., 35(1):281–293, 2021, ISSN 0895-4801. https://doi.org/10.1137/20M1335790. 28

[Lea04] Imre Leader: *Ramsey Theory*, 2004. v

[Lee17] Choongbum Lee: *Ramsey numbers of degenerate graphs*. Ann. of Math. (2), 185(3):791–829, 2017, ISSN 0003-486X. https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.3.2. 26

[Lub12] Alexander Lubotzky: *Expander graphs in pure and applied mathematics*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 49(1):113–162, 2012, ISSN 0273-0979. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-2011-01359-3. 28

[MT10] Robin A Moser i Gábor Tardos: *A constructive proof of the general Lovász local lemma*. Journal of the ACM (JACM), 57(2):1–15, 2010. 11

[Rot53] K. F. Roth: *On certain sets of integers*. J. London Math. Soc., 28:104–109, 1953, ISSN 0024-6107. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-28.1.104. 2

[RZ98] Aaron Robertson i Doron Zeilberger: *A 2-coloring of* $[1, n]$ *can have* $(1/22)n^2 + O(n)$ *monochromatic Schur triples, but not less!* Electron. J. Combin., 5:Research Paper 19, 4, 1998. http://www.combinatorics.org/Volume_5/Abstracts/v5i1r19.html. 43

[Sch99] Tomasz Schoen: *The number of monochromatic Schur triples*. European J. Combin., 20(8):855–866, 1999, ISSN 0195-6698. https://doi.org/10.1006/eujc.1999.0297. 43

[Sch11] Mathias Schacht: *Ramsey Theory*, 2011. v, 1, 33, 35

[Suk17] Andrew Suk: *On the Erdős-Szekeres convex polygon problem*. J. Amer. Math. Soc., 30(4):1047–1053, 2017, ISSN 0894-0347. https://doi.org/10.1090/jams/869. 9

[SW17] A. Saad i J. Wolf: *Ramsey multiplicity of linear patterns in certain finite abelian groups*. Q. J. Math., 68(1):125–140, 2017. 43, 44

[Sze75] E. Szemerédi: *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*. U *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 2*, stranice 503–505. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975. 17

[Sze78] Endre Szemerédi: *Regular partitions of graphs*. U *Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976)*, svezak 260 iz *Colloq. Internat. CNRS*, stranice 399–401. CNRS, Paris, 1978. 17

[Wol21] Julia Wolff: *Finite field models in arithemetic combinatorics – ten years on*, 2021. http://www.juliawolf.org/research/preprints/ffsurveyweb.pdf. 43

[Yua] Qiaochu Yuan: *Lower bounds on off-diagonal Ramsey numbers*. https://qchu.wordpress.com/2011/01/30/lower-bounds-on-off-diagonal-ramsey-numbers/. 9