

Vrtložnost

Vježbe iz Dinamičke meteorologije II

Vrtložnost

- **definicija:** rotacija vektora brzine
- relativna vrtložnost

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}$$

- vertikalna komponenta vrtložnosti \rightarrow najveći član

$$\zeta = \vec{k} \cdot \vec{\omega} = \vec{k} \cdot \nabla \times \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

- relativna vrtložnost u PKS:

$$\zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n}$$

- do vrtložnosti dolazi zbog zakrivljenosti strujanja i/ili smicanja vjetra
- ciklonalna ($\zeta > 0$) i anticiklonalna vrtložnost ($\zeta < 0$)

Vrtložnost

- veza cirkulacije i vrtložnosti → vrtložnost je mikro mjera rotacije fluida

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_A \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\zeta = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{C}{A}$$

- apsolutna vrtložnost → vidi se iz inercijalnog koordinatnog sustava

$$\vec{\omega}_a = \nabla \times \vec{V}_a = \nabla \times (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r})$$

- vertikalna komponenta apsolutne vrtložnosti → zbroj relativne vrtložnosti i planetarne vrtložnosti (zbog rotacije Zemlje)

$$\vec{k} \cdot \vec{\omega}_a = \eta = \zeta + f = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f$$

Vrtložnost

- skalarni oblik jednadžbe apsolutne vrtložnosti

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = \underbrace{-(\zeta + f)\nabla_H \cdot \vec{V}}_I - \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{II} + \frac{1}{\rho^2} \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y}\right)}_{III}$$

I → horizontalna divergencija

II → tilting/twisting član

III → solenoidalni (baroklini) član

- kvazigeostrofička jednadžba apsolutne vrtložnosti

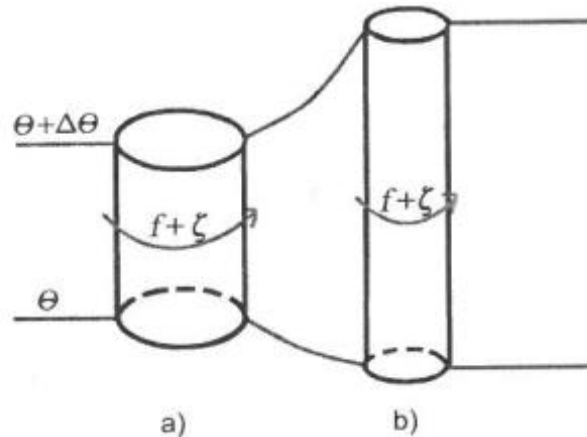
$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f)\nabla_H \cdot \vec{V}$$

- apsolutna vrtložnost je očuvana u barotropnom bezdivergentnom fluidu → $\nabla_H \cdot \vec{V} = 0$
- geostrofička jednadžba vrtložnosti

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0 \rightarrow \zeta + f = \text{const.}$$

Vrtložnost

- potencijalna vrtložnost → izvod iz kvazigeostrofičke jednačbe vrtložnosti uz pretpostavke plitkog fluida i $\rho = \text{const.}$
 - očuvana u kvazigeostrofičkim procesima
- $$\frac{\zeta + f}{H + h} = \text{const.}$$
- H – srednja visina/dubina fluida, h – odstupanje od srednje visine/dubine ($h \ll H$)



Slika 1.4. Ilustracija porasta vrtložnosti česti zraka (cilindar) zbog rastezanja; čest putuje od položaja a) do položaja b). U plitkoj vodi to je glavni mehanizam proizvodnje vrtložnosti; θ je potencijalna temperatura.

izvor: Šinik, N., & Grisogono, B. (2008.) Dinamička meteorologija – uvod u opću cirkulaciju atmosfere

Primjeri i zadatci

1. Koliko se prostorno mora mijenjati geostrofička brzina vjetra svakih 100 km udaljenosti u smjeru okomitom na tok da bi strujanje bilo irotaciono unatoč anticiklonalnoj zakrivljenosti čiji je radijus 1800 km?
2. Nađite vrtložnost polja na zakrivljenoj strujnici čiji ciklonalni radijus zakrivljenosti iznosi 500 km, a brzina vjetra na strujnici i susjednoj strujnici 11 m s^{-1} .
3. Odredite vrtložnost polja vjetra na kružnoj strujnici ako je anticiklonalni radijus zakrivljenosti 2000 km. Brzina vjetra na strujnici je 7 m s^{-1} . Brzina opada linearno u smjeru središta anticiklone.
4. Nađite vrtložnost polja vjetra ako su strujnice pravci, a brzina se mijenja za 3 m s^{-1} svakih 600 km u smjeru okomitom na strujnice.
5. Koliki je gradijent brzine vjetra u smjeru okomitom na strujanje u cikloni na strujnici čiji je radijus zakrivljenosti 800 km, ako je strujanje irotaciono unatoč ciklonalnoj zakrivljenosti, a brzina vjetra iznosi 10 m s^{-1} ?

6. Nađite iznos prosječne vrtložnosti u koncentričnom prostoru unutrašnjeg radijusa $r_1 = 200$ km i vanjskog $r_2 = 400$ km u slučaju kad je tangencijalna brzina $v = \frac{10^6}{r} \text{ m s}^{-1}$, gdje je r zadan u metrima. Kolika je prosječna vrtložnost kruga radijusa 200 km?

7. Čest zraka na 30° N giba se prema sjeveru tako da joj je sačuvana apsolutna vrtložnost. Ako je početna relativna vrtložnost česti $5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, kolika je relativna vrtložnost česti kada dođe do 90° N?

8. Stupac zraka proteže se do tropopauze koja se nalazi na 11 km visine. Stupac se u početku nalazi na 15° N. Ako se stupac giba prema planini visine 3 km koja se nalazi na 45° N, kolika će biti relativna vrtložnost stupca zraka u trenutku prelaska preko planine?

Rješenja

1. Koliko se prostorno mora mijenjati geostrofička brzina vjetra svakih 100 km udaljenosti u smjeru okomitom na tok da bi strujanje bilo irotaciono unatoč anticiklonoj zakrivljenosti čiji je radijus 1800 km?

Rješenje:

$$R_s = -1800 \text{ km}$$

$$\Delta n = 100 \text{ km}$$

Irotaciono strujanje $\rightarrow \zeta = 0$

Relativna vrtložnost u PKS-u

$$\zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$\zeta = 0 \rightarrow \frac{V}{R_s} = \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta n}{R_s} = -\frac{100 \text{ km}}{1800 \text{ km}}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -5.6\%$$

2. Nađite vrtložnost polja na zakrivljenoj strujnici čiji je ciklonalni radijus zakrivljenosti 500 km, a brzina vjetra na strujnici i susjednoj strujnici je 11 m s^{-1} .

Rješenje:

$$R_s = 500 \text{ km}$$

$$V = 11 \text{ m s}^{-1}$$

Relativna vrtložnost u PKS-u

$$\zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta n} = 0 \rightarrow \zeta = \frac{V}{R_s} = \frac{11 \text{ m s}^{-1}}{500 \cdot 10^3 \text{ m}} = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

3. Odredite vrtložnost polja vjetra na kružnoj strujnici ako je anticiklonalni radijus zakrivljenosti 2000 km. Brzina vjetra na strujnici je 7 m s^{-1} . Brzina opada linearno u smjeru središta anticiklone.

Rješenje:

$$R_s = -2000 \text{ km}$$

$$V = 7 \text{ m s}^{-1}$$

Relativna vrtložnost u PKS-u

$$\zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n}$$

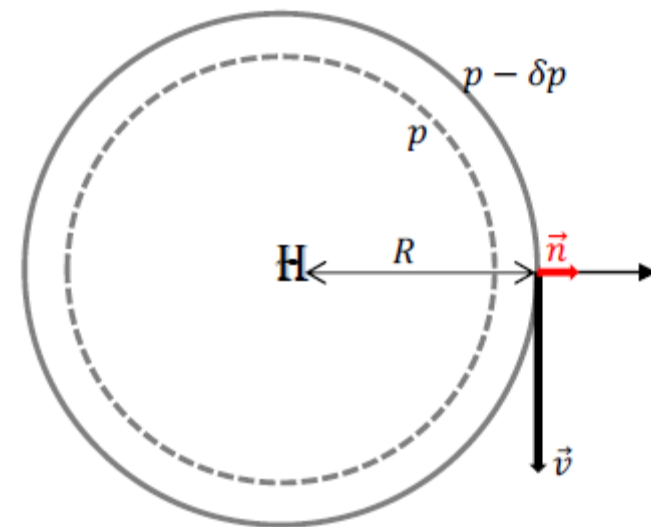
$$\frac{\partial V}{\partial n} = \text{const.} = c \rightarrow \partial V = c \partial n, \quad \partial n = -\partial R_s$$

$$\partial V = -c \partial R_s, \quad / \int_0^{R_s}$$

$$V(R_s) - V(0) = -c R_s \rightarrow V(0) = 0 \rightarrow c = -\frac{V(R_s)}{R_s}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = c = -\frac{V(R_s)}{R_s}$$

$$\zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{R_s} + \frac{V}{R_s} = 2 \frac{V}{R_s} = -\frac{2 \cdot 7 \text{ m s}^{-1}}{2 \cdot 10^6 \text{ m}} = -7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$



4. Nađite vrtložnost polja vjetra ako su strujnice pravci, a brzina se mijenja za 3 m s^{-1} svakih 600 km u smjeru okomitom na strujnice.

Rješenje:

$$\Delta n = 600 \text{ km}$$

$$\Delta v = 3 \text{ m s}^{-1}$$

Relativna vrtložnost u PKS:

$$\zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n} \rightarrow R_s = \infty \rightarrow \frac{V}{R_s} = 0$$

$$\zeta = -\frac{\partial V}{\partial n} \rightarrow \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| = \frac{3 \text{ m s}^{-1}}{600 \cdot 10^3 \text{ m}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

(a) Ako je $\frac{\partial V}{\partial n} > 0 \rightarrow \zeta < 0$ anticiklonalna vrtložnost

(b) Ako je $\frac{\partial V}{\partial n} < 0 \rightarrow \zeta > 0$ ciklonalna vrtložnost

5. Koliki je gradijent brzine vjetra u smjeru okomitom na strujanje u cikloni na strujnici čiji je radijus zakrivljenosti 800 km, ako je strujanje irotaciono unatoč ciklonalnoj zakrivljenosti, a brzina vjetra iznosi 10 m s^{-1} ?

Rješenje:

$$R_s = 800 \text{ km}$$

$$V = 10 \text{ m s}^{-1}$$

Irotaciono strujanje $\rightarrow \zeta = 0$

Relativna vrtložnost u PKS-u

$$\zeta = \frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$\zeta = 0 \rightarrow \frac{V}{R_s} = \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{R_s} = \frac{10 \text{ m s}^{-1}}{800 \cdot 10^3 \text{ m}} = 1.25 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} = \frac{1.25 \text{ m s}^{-1}}{100 \text{ km}}$$

6. Nađite iznos prosječne vrtložnosti u koncentričnom prostoru unutrašnjeg radijusa $r_1 = 200$ km i vanjskog $r_2 = 400$ km u slučaju kad je tangencijalna brzina $v = \frac{10^6}{r} \text{ m s}^{-1}$, gdje je r zadan u metrima. Kolika je prosječna vrtložnost kruga radijusa 200 km?

Rješenje:

Prosječna vrtložnost $\bar{\zeta} = \frac{C}{A}$

Definicija cirkulacije:

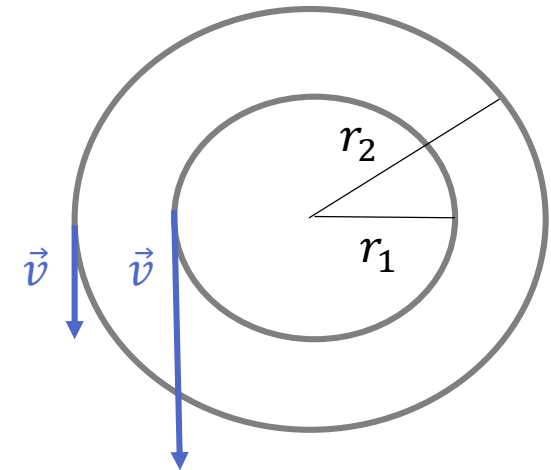
$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint v_{\text{tang}} r d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{10^6}{r} r d\phi = 2\pi \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Veza između cirkulacije i vrtložnosti:

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_A \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$C = \overline{\nabla \times \vec{v}} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} r dr d\phi = \frac{\bar{\zeta}(r_2^2 - r_1^2)2\pi}{2}$$

$$\bar{\zeta} = \frac{C}{(r_2^2 - r_1^2)\pi} = 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$



6. Nađite iznos prosječne vrtložnosti u koncentričnom prostoru unutrašnjeg radijusa $r_1 = 200$ km i vanjskog $r_2 = 400$ km u slučaju kad je tangencijalna brzina $v = \frac{10^6}{r} \text{ m s}^{-1}$, gdje je r zadan u metrima. Kolika je prosječna vrtložnost kruga radijusa 200 km?

Prosječna vrtložnost za krug radijusa $r_1 = 200$ km:

$$C = \overline{\nabla \times \vec{v}} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} r dr d\phi = \frac{\bar{\zeta} r_1^2 \cdot 2\pi}{2} = \bar{\zeta} r_1^2 \pi$$

$$\bar{\zeta} = \frac{C}{r_1^2 \pi} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

7. Čest zraka na 30° N giba se prema sjeveru tako da joj je sačuvana apsolutna vrtložnost. Ako je početna relativna vrtložnost česti $5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, kolika je relativna vrtložnost česti kada dođe do 90° N?

Rješenje:

$$\zeta_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$\phi_1 = 30^\circ \text{ N}, \phi_2 = 90^\circ \text{ N}$$

Apsolutna vrtložnost je sačuvana:

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0$$

Slijedi da je: $\zeta + f = \text{const.}$

$$\zeta_1 + f_1 = \zeta_2 + f_2 \quad \rightarrow \quad \zeta_2 = \zeta_1 + f_1 - f_2$$

$$\zeta_2 = \zeta_1 + 2\Omega(\sin \phi_1 - \sin \phi_2) = -2.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

8. Stupac zraka proteže se do tropopauze koja se nalazi na 11 km visine. Stupac se u početku nalazi na 15° N. Ako se stupac giba prema planini visine 3 km koja se nalazi na 45° N, kolika će biti relativna vrtložnost stupca zraka u trenutku prelaska preko planine?

Rješenje:

$$\varphi_1 = 15^\circ \text{ N}, \varphi_2 = 45^\circ \text{ N}$$

$$h = 3 \text{ km}, \quad \Delta h_1 = 11 \text{ km}$$

Očuvanje potencijalne vrtložnosti (Rossby):

$$\frac{\zeta + f}{\Delta h} = \text{const.}$$

$$\frac{\zeta_1 + f_1}{\Delta h_1} = \frac{\zeta_2 + f_2}{\Delta h_2} \rightarrow \zeta_2 = \frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} (\zeta_1 + f_1) - f_2$$

$$\zeta_1 = 0, \quad \Delta h_2 = \Delta h_1 - h_{\text{planina}} = 8 \text{ km}$$

$$\zeta_2 = \frac{\Delta h_1 - h_{\text{planina}}}{\Delta h_1} \cdot 2\Omega \sin \varphi_1 - 2\Omega \sin \varphi_2$$

$$\zeta_2 = -7.66 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad \text{anticiklonalna vrtložnost}$$

