KOMPLEKSNA ANALIZA

1. Zapišite u trigonometrijskom obliku sljedeće kompleksne brojeve:

   a) $z_1 = -\sqrt{2}$,

   b) $z_2 = -1 + 2i$,

   c) $z_3 = \cos\alpha - i\sin\alpha$, $\left(\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Izračunajte:

   a) $(2+2i)^7$,

   b) $\left(1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$.

3. Izračunajte:

   a) $\sqrt{(1-i\sqrt{3})^7}$,

   b) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$.

4. * Neka su $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ svi n-ti korijeni jedinice. Dokažite da vrijedi:

$$(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1}) = 1 + z + \cdots + z^{n-1},$$

Pomoću ovog identiteta izvedite relaciju

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

5. * Ako je $|a| = |b| = |c| = r$ $(a, b, c \in \mathbb{C})$, dokažite da vrijedi:

$$\left|\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right| = r.$$

6. * Ako je $|z| = 1$, pokažite da se broj z može prikazati u obliku $z = \frac{t+i}{t-i}$, gdje je t realan broj.