5. a) Tvrdnja nije istinita. Npr. niz $a_n = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

je u intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ i $\lim_n a_n = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0$.

$(a_{p_n})_n$ podniz od $(a_n)_n \Rightarrow \lim_n a_{p_n} = 0 \notin \langle 0, 1 \rangle$

5. b) $(a_n)_n$ niz u $[0,1]$. $(a_n)_n$ je ograničen pa ima konvergentan podniz $(a_{p_n})_n$. Vrijedi $0 \leq a_{p_n} \leq 1$

Stavimo li $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$,

$c_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ imamo $b_{p_n} \leq a_{p_n} \leq c_{p_n} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Po teoremu s predavanja vrijedi $\lim_n b_{p_n} \leq \lim_n a_{p_n} \leq \lim_n c_{p_n}$

$\Rightarrow 0 \leq \lim_n a_{p_n} \leq 1$

$\Rightarrow \lim_n a_{p_n} \in [0, 1]$

Tvrdnja je točna.

5. c) $\lim_n a_n = 5 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})$ t.d.

$(n > n_\varepsilon) \Rightarrow |a_n - 5| < \varepsilon$, tj. $a_n \in \langle 5-\varepsilon, 5+\varepsilon \rangle$

Posebno, za $\varepsilon = 1$ $\langle 5-1, 5+1 \rangle = \langle 4, 6 \rangle$ sadrži gotovo sve članove niza, odnosno, izvan tog intervala ima samo konačno mnogo članova niza $\Rightarrow$ izvan intervala $\langle 3, 6 \rangle$ ima samo konačno mnogo članova niza.

Dakle, tvrdnja je pogrešna.

5. d) Stavimo $A=\{1\}$, $B=\{0,1\}$ $A\subseteq B$

$$\sup A=1, \quad \inf B=0$$

$$\sup A>\inf B$$

Dakle, tvrdnja je pogrešna.

6. $\lim_n a_{2n}=a=\lim_n a_{2n-1}$

$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_\varepsilon'\in\mathbb{N})\ (k>n_\varepsilon')\Rightarrow |a_{2k}-a|<\varepsilon$

$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists n_\varepsilon''\in\mathbb{N})\ (k>n_\varepsilon'')\Rightarrow |a_{2k-1}-a|<\varepsilon$

$n_\varepsilon:=\max\{2n_\varepsilon', 2n_\varepsilon''-1\}$

Za $n>n_\varepsilon$ je $n>2n_\varepsilon'$ i $n>2n_\varepsilon''-1$. Imamo dvije mogućnosti:

1. n je paran, $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n>2n_\varepsilon'\Rightarrow 2k>2n_\varepsilon'\Rightarrow k>n_\varepsilon'$

$\Rightarrow |a_{2k}-a|<\varepsilon$, tj. $|a_n-a|<\varepsilon$

2. n je neparan, $n=2k-1$, za neki $k\in\mathbb{N}$

$n>2n_\varepsilon''-1\Rightarrow 2k-1>2n_\varepsilon''-1\Rightarrow k>n_\varepsilon''$

$\Rightarrow |a_{2k-1}-a|<\varepsilon\Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$

Dakle, za $n>n_\varepsilon$ je $|a_n-a|<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim_n a_n=a$

7. Treba dokazati da $(\forall \varepsilon>0)\ (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})$ t.d.

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n^2}-0\right| < \varepsilon, \text{ tj. } \frac{1}{n^2} < \varepsilon, \text{ tj. } n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Za $\varepsilon>0$ primijenimo Arhimedov aksiom na 1 i $\sqrt{\varepsilon}$.

Tada $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.d. $1 < n_\varepsilon \cdot \sqrt{\varepsilon}$.

Za $n > n_\varepsilon \Rightarrow n\cdot\sqrt{\varepsilon} > n_\varepsilon \cdot \sqrt{\varepsilon} > 1 \Rightarrow \sqrt{\varepsilon} > \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n^2}-0\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{1}{n^2} = 0.$$