

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi rok - 30. siječnja 2026.

1. (20 bodova) Neka je $L \leq M_3(\mathbb{R})$ prostor antisimetričnih matrica reda 3 te neka je dan skup

$$K = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : a_{11} = a_{22} = 1, a_{33} = 0\}.$$

- (a) Odredite jednu bazu za linearnu ljusku skupa K .
(b) Provjerite je li L potprostor od $[K]$. Ako jest, odredite mu jedan direktni komplement u $[K]$.

Rješenje:

- (a) Proizvoljna matrica $A \in K$ je oblika:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} = a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{21}E_{21} + a_{23}E_{23} + a_{31}E_{31} + a_{32}E_{32} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slijedi da je jedna baza za linearnu ljusku $[K]$

$$\{E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{11} + E_{22}\}.$$

- (b) Proizvoljna antisimetrična matrica je oblika

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} &= a_{12}(E_{12} - E_{21}) + a_{13}(E_{13} - E_{31}) + a_{23}(E_{23} - E_{32}) \\ &= a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} - a_{12}E_{21} + a_{23}E_{23} - a_{13}E_{31} - a_{23}E_{32}, \end{aligned}$$

pa vidimo da je $A \in [K]$, tj. $L \leq [K]$.

Također, baza prostora L je

$$\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}.$$

Dopunimo tu bazu do baze za $[K]$:

$$\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}, E_{12}, E_{13}, E_{23}, E_{11} + E_{22}\}.$$

Dakle, jedan direktan komplement od L u $[K]$ je $M = \{E_{12}, E_{13}, E_{23}, E_{11} + E_{22}\}$

2. (20 bodova) U prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3 zadan je podskup

$$M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(0) = p(2)\}.$$

- (a) Dokažite da je M potprostor od $\mathcal{P}_3$, odredite mu neku bazu te dimenziju.
- (b) Za $N = [\{t, t^3\}]$, odredite bazu i dimenziju presjeka $M \cap N$.
- (c) Odredite neki potprostor L od $\mathcal{P}_3$ takav da je $L \neq N$ i $M + L = M + N$.

Rješenje:

- (a) Neka su $p, q \in M$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Tada je

$$(\alpha p + \beta q)(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = \alpha p(2) + \beta q(2) = (\alpha p + \beta q)(2),$$

pa zaključujemo da je $\alpha p + \beta q \in M$. Dakle, $M \leq \mathcal{P}_3$.

Neka je $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \in M$. Kako je $p(0) = d$, a $p(2) = 8a + 4b + 2c + d$, vidimo da je uvjet $p(0) = p(2)$ ekvivalentan

$$d = 8a + 4b + 2c + d,$$

odnosno $c = -4a - 2b$. Sada vidimo da je

$$p(t) = at^3 + bt^2 + (-4a - 2b)t + d = a(t^3 - 4t) + b(t^2 - 2t) + d,$$

pa je skup $\{1, t^2 - 2t, t^3 - 4t\}$ sustav izvodnica za M . Taj skup je linearno nezavisan jer su svi polinomi različitog stupnja, pa je to baza za M . Dimenzija od M je 3.

- (b) Skup

$$\{1, t^2 - 2t, t^3 - 4t, t, t^3\}$$

reduciramo do baze za $M + N$. Izbacujemo elemente koji se mogu napisati kao linearna kombinacija prethodnika. Prvi (i jedini) takav element je t^3 . Pritom vidimo da je

$$t^3 - 4t \in M \cap N.$$

Dakle, dimenzija od $M + N$ jednaka je 4, a dimenzija presjeka $M \cap N$ je

$$\dim M + \dim N - \dim(M + N) = 3 + 2 - 4 = 1,$$

pa je $\{t^3 - 4t\}$ baza za $M \cap N$.

- (c) Vidimo da je $\dim(M + N) = 4 = \dim \mathcal{P}_3$, pa je $M + N = \mathcal{P}_3$. Stoga tražimo $L \neq N$ takav da je $M + L = \mathcal{P}_3$. Možemo uzeti primjerice $L = [\{t\}]$ ili $L = \mathcal{P}_3$.

3. (20 bodova) U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustav:

$$\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ \lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} A_p &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & : & 2 \\ 1 & -5 & \lambda & 1 & : & 1 \\ \textcircled{1} & -1 & 2 & 1 & : & -2 \\ \lambda & 2 & 2 & 1 & : & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & : & -2 \\ 0 & -4 & \lambda - 2 & 0 & : & 3 \\ 0 & 3 & 2 & \textcircled{1} & : & 2 \\ 0 & 2 + \lambda & 2 - 2\lambda & 1 - \lambda & : & 1 + 2\lambda \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & : & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 2 & 0 & : & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 4\lambda - 1 & 0 & 0 & : & 4\lambda - 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & : & -4 \\ 0 & 1 & \frac{2-\lambda}{4} & 0 & : & -\frac{3}{4} \\ 0 & 3 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 4\lambda - 1 & 0 & 0 & : & 4\lambda - 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 - \lambda & 0 & : & -7 \\ 0 & 1 & \frac{2-\lambda}{4} & 0 & : & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3\lambda+2}{4} & 1 & : & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & \frac{(2-\lambda)(1-4\lambda)}{4} & 0 & : & 7\lambda - \frac{7}{4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jedini preostali pivot je $\frac{(2-\lambda)(1-4\lambda)}{4}$, pa razlikujemo slučajeve:

(1) $\frac{(2-\lambda)(1-4\lambda)}{4} = 0$, tj. $\lambda = 2$ ili $\lambda = \frac{1}{4}$.

(a) Ako je $\lambda = 2$, onda je $7\lambda - \frac{7}{4} \neq 0$, pa taj slučaj nema rješenja.

(b) Ako je $\lambda = \frac{1}{4}$, tada je $7\lambda - \frac{7}{4} = 0$, pa sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Označimo $t = x_3$.

Slijedi da je $x_4 = \frac{17}{4} - \frac{3\lambda+2}{4}t$, $x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{2-\lambda}{4}t$, $x_1 = -7 + (\lambda - 2)t$, tj.

$$x = \begin{bmatrix} -7 \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{17}{4} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} \\ -\frac{7}{16} \\ 1 \\ -\frac{11}{16} \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(2) Ako je $\frac{(2-\lambda)(1-4\lambda)}{4} \neq 0$, sustav ima jedinstveno rješenje: $x_3 = \frac{7}{\lambda-2}$, $x_4 = \frac{\lambda+12}{2-\lambda}$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$, tj.

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{7}{\lambda-2} \\ \frac{\lambda+12}{2-\lambda} \end{bmatrix}.$$

4. (20 bodova) Dana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odredite A^{-1} te matricu A napišite kao produkt elementarnih matrica.

Rješenje: Računamo inverz od A standardnim putem, usput zapisujući transformacije koje vršimo pomoću odgovarajućih elementarnih matrica:

$$\begin{aligned} [A : I] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{21}^1 F_{31}^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{F_{13}^{-1} F_2^{1/2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odavde vidimo da je $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F_2^{1/2} F_{13}^{-1} F_{31}^{-2} F_{21}^1$, pa se A može zapisati kao

$$A = (F_2^{1/2} F_{13}^{-1} F_{31}^{-2} F_{21}^1)^{-1} = F_{21}^{-1} F_{31}^2 F_{13}^1 F_2^2.$$

5. (20 bodova) Pretpostavimo da su $C_1 = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 2]^T$ i $C_2 = [2 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1]^T$ dva rješenja sustava $AX = B$, pri čemu je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ matrica ranga $n - 1$.

(a) Dokažite da je $B \neq 0$, te odredite sva rješenja sustava $AX = B$.

(b) Dokažite da je prvi stupac matrice A jednak njenom posljednjem stupcu.

Rješenje: Neka je Ω prostor rješenja pripadnog homogenog sustava $AX = 0$. Tada je

$$\dim \Omega = n - r(A) = n - (n - 1) = 1.$$

(a) Pretpostavimo da je $B = 0$. Tada $C_1, C_2 \in \Omega$, što je nemoguće, jer je $\{C_1, C_2\}$ linearno nezavisan skup, a Ω jednodimenzionalan prostor. Time smo dokazali da je $B \neq 0$.

Iz $AC_1 = B$ i $AC_2 = B$ slijedi $A(C_1 - C_2) = 0$, pa je $C_1 - C_2 \in \Omega$. Kako je $C_1 - C_2 \neq 0$ i $\dim \Omega = 1$, slijedi

$$\Omega = [\{C_1 - C_2\}] = \{\lambda [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ -1]^T : \lambda \in \mathbb{F}\}.$$

Tada je skup svih rješenja nehomogenog sustava

$$\{C_1 + \lambda(C_1 - C_2) : \lambda \in \mathbb{F}\}$$

(za partikularno rješenje uzeli smo C_1 , a mogli smo bilo koje rješenje sustava $AX = B$).

(b) Iz $A(C_1 - C_2) = 0$ i

$$A(C_1 - C_2) = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot S_1 + 0 \cdot S_2 + \dots + 0 \cdot S_{n-1} + 1 \cdot S_n = S_1 - S_n$$

slijedi $S_1 = S_n$.