Osnove matematičke analize

1. domaća zadaća

1. Odredite infimum skupa $S = \left\{\frac{2mn+n-2}{2mn-2m-n+1} : m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\}$.
2. Odredite infimum skupa $S = \left\{(-1)^n \frac{2n^2-1}{n^2+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
3. Odredite supremum skupa $S = \left\{\frac{2m+2n-3}{2mn-2m-n+1} : m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\}$.
4. Odredite supremum skupa $S = \left\{(-1)^{n+1} \frac{2n^2-1}{n^2+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
5. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:
   a) Svaki niz u intervalu $\langle 0, 1\rangle$ ima podniz koji konvergira k nekom broju iz $\langle 0, 1\rangle$.
   b) Svaki niz u segmentu $[0, 1]$ ima podniz koji konvergira k nekom broju iz $[0, 1]$.
   c) Ako niz realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k 5, onda izvan intervala $\langle 3, 6\rangle$ postoji beskonačno mnogo elemenata niza.
   d) Ako je $A \subseteq B$, onda je $\sup A \leq \inf B$.
6. Ako podnizovi $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ i $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiraju k istom limesu, onda i niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k tom istom limesu. Dokažite tu tvrdnju.
7. Dokažite po definiciji da je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$
8. Izračunajte sljedeće limese (ako postoje):
   a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+3n+1}{n^3+2}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n^2+n)^3}{n^8+3n^6-1}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(\frac{1}{n})^4+3}{(\frac{1}{n})^3+2n}$$