Odabrane primjene linearne algebre (2024./2025.)
(primjer 1. kolokvija)

1. Odredite sva rješenja sljedećeg sustava jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcl} x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 6 \\ x^2 & - & y^2 & + & 2z^2 & = & 2 \\ 2x^2 & + & y^2 & - & z^2 & = & 3 \\ 4x^2 & - & y^2 & + & 3z^2 & = & 7 \end{array}$$

2. Jednadžba ravnine u prostoru ima oblik $Ax + By + Cz + D = 0$, gdje su $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Odredite jednadžbu ravnine kroz tri nekolinearne točke u determinantnom obliku. Postupak detaljno obrazložite.

3. Pet žarulja postavljene su u niz jedna do druge. Ispod svake žarulje nalazi se prekidač. Prva četiri prekidača mijenjaju stanje (uključeno $\leftrightarrow$ isključeno) žarulje neposredno iznad tog prekidača i stanja susjednih žarulja. Posljednji prekidač je pokvaren. Na početku su sve žarulje pogašene.

   (a) Opišite skup svih stanja koja se mogu postići?

   (b) Ako popravimo pokvareni prekidač, možemo li ga namjestiti tako da, koristeći svih 5 prekidača, možemo postići sve moguće kombinacije? Ako da, kako?

4. Neka su x_1, x_2, x_3, x_4 različiti realni brojevi. Odredite polinome $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}_3$ koji imaju svojstvo

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{ako } j = i \\ 0, & \text{ako } j \neq i \end{cases}$$

   za sve $i = 1, 2, 3, 4$. Dokažite da se svaki polinom $p \in \mathcal{P}_3$ može prikazati kao linearna kombinacija polinoma p_1, p_2, p_3, p_4.

5. Dokažite da je matrica $A \in M_n(\mathbb{Z}_p)$ regularna u $M_n(\mathbb{Z}_p)$ ako i samo ako su p i $\det A$ relativno prosti brojevi.

6. Hillovom šifrom dešifrirajte šifrat PSDAPSFA pomoću ključa ATOM.

Ljiljana Arambašić