

NAPREDNI FIZIČKI PRAKTIKUM 2
SMJER: ISTRAŽIVAČKI SMJER

SKIN EFEKT

ZADACI

- a) Diskutirajte *LCR* krug koji se koristi u ovoj vježbi i izvedite uvjet rezonancije.
- b) Izmjerite ekvivalentnu debljinu skina kod bakra i mjedi za frekvencije u području 1.5 kHz do 15 kHz.
- c) Diskutirajte ovisnost debljine skina o frekvenciji.
- d) Diskutirajte izraz (10) i članove koji su zanemareni dobivanjem te formule iz (9).

Napomena: vodite računa da pri mjerenju frekvencija uvijek bude konstanta.

SKIN EFEKT

1.1 Uvod

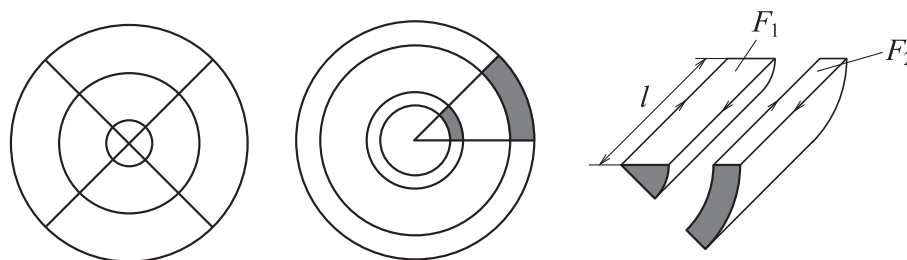
Kod razmatranja bilo kojeg problema u vezi s transportom naboja ili strujom kroz neki homogeni vodič, nikad se posebno ne naglašava naizgled trivijalna činjenica da je gustoća struje na svakom mjestu presjeka tog vodiča jednaka. Međutim, to je strogo ispunjeno samo onda kad kroz vodič teče istosmjerna struja. Doduše, teče li njime izmjenična, ali niskofrekventna struja, ne opaža se kod tanjih vodiča ni tad neko narušavanje ove zakonitosti. Tek kad frekvencija dostigne relativno visoke vrijednosti, ili vodič ima relativno veliku debljinu, počinju se opažati pojave koje korigiraju našu predstavu o jednolikosti gustoće struje po presjeku vodiča.

Opazilo se, naime, da električni otpor vodiča ovisi o frekvenciji struje koja njime prolazi. Kao što znamo, otpor vodiča duljine l i presjeka S dan je formulom:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (1)$$

u kojoj je ρ specifična otpornost materijala od kojeg je vodič načinjen. Budući da specifična otpornost, kao jedna od osnovnih konstanti materijala, ne može ovisiti o frekvenciji, za promjenu otpora mora biti odgovorna neka promjena u geometriji vodiča. Dakako, ne u pravoj, već u njegovoj efektivnoj geometriji. Teško bi bilo zamisliti da se pritom mijenja duljina vodiča. Za to ne bi našli valjani razlog. Presjek se, međutim, može promijeniti. Mjerenja pokazuju da se otpor vodiča povećava s frekvencijom, što daje do znanja da se njegov efektivni presjek smanjuje. Smanjivanje presjeka je, očito, samo jednostavnije izražena činjenica da gustoća struje u vodiča nije više jednolika. Pokazalo se da ona s porastom frekvencije pada oko centra vodiča i da se istovremeno povećava uz njegovu površinu. Pri vrlo visokim frekvencijama nejednolikost gustoće struje je tako velika da ona gotovo iščezava u unutrašnjosti vodiča i koncentrira se samo u površinskim slojevima. Ovaj efekt zato je i nazvan *skin efektom* (*skin* - koža, kora, ljuska).

Sasvim formalno, efekt se može protumačiti na slijedeći način. Zamislimo da je cilindrični vodič nizom koncentričnih krugova i snopom radijusa podijeljen na velik broj elementarnih vodiča jednakog presjeka Q (sl.1). Tada svaki elementarni vodič ima kod istosmjerne struje otpor dan formulom (1), tj. $\rho l/Q$. Pri prolazu



Slika 1. Podjela cilindra na elementarne vodiče.

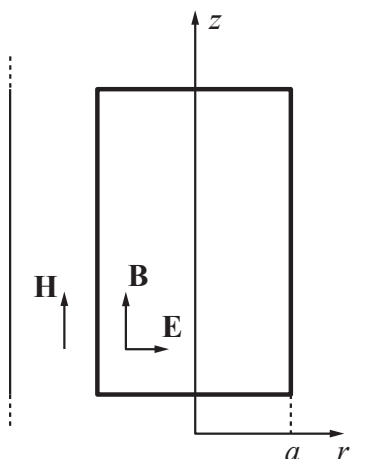
izmjenične struje stvara se oko svakog vodiča i unutar njega magnetsko polje, odnosno magnetska indukcija B , čije silnice možemo prikazati kao koncentrične krugove. Očigledno će površina F elementarnog vodiča na koju upadaju silnice magnetske indukcije biti veća ako se on nalazi bliže centru vodiča. To slijedi iz zahtjeva jednakosti presjeka Q . Ako je, dakle, površina F_1 veća od F_2 , veći je i tok magnetske indukcije BF_1 od toka BF_2 . Kroz elementarne vodiče u blizini centra i uz površinu prolazit će različit broj silnica magnetske indukcije.

Budući da vodičem teče izmjenična struja, magnetska indukcija se mijenja u vremenu, što će u elementarnim vodičima (u opsegu plohe F) izazvati stvaranje elektromotorne sile $\mathcal{E} = FdB/dt$. Ponovno imamo $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$. Polaritet stvorene elektromotorne sile je po *Le Chatelierovom* principu takav da se ona protivi uzrocima koji su je izazvali. Drugim riječima, u elementarnim vodičima inducira se struja suprotnog smjera od one koja prolazi vodičem i koja je izazvala stvaranje magnetske indukcije. Postaje tako razumljivim da je zbog veće protuelektromotorne sile u blizini centra vodiča i efektivna struja na tom mjestu manja od one u površinskim slojevima. Idući od površine vodiča prema njegovom centru, gustoća struje se smanjuje. Slikovito efekt možemo zamisliti tako da svi elementarni vodiči na koje je cilindar bio podijeljen nemaju više jednak otpor $\rho l/Q$ kao kod istosmjerne struje, već im otpor raste što se više približavamo centru cilindra. Jasno je zato da je i ukupni otpor cilindra – njegov efektivni otpor – veći nego u slučaju kad njime prolazi istosmjerna struja.

1.2 Tumačenje skin efekta na osnovu Maxwellovih jednažbi

Iako je kvalitativnim objašnjenjem iz prethodnog poglavlja skin efekt postao razumljiv, time se ipak ne možemo zadovoljiti jer su nam mnoge stvari ostale skrivene. U prvom redu ne znamo još kakva je raspodjela gustoće struje duž radijusa vodiča, tj. kakav je strujni profil. Znamo međutim, da postojanje skin efekta i njegove zakonitosti moraju proizići i kao posljedica osnovnih jednažbi za širenje elektromagnetskih valova u prostoru, tj. iz *Maxwellovih* jednažbi.

Zamislimo da se masivni metalni vodič radijusa a nalazi unutar zavojnice kroz koju prolazi izmjenična struja frekvencije f . Ona će stvarati izmjenično magnetsko polje H paralelno osi z (sl.2), što znači da ćemo unutar vodiča imati magnetsku indukciju B istog smjera. Vremenske promjene magnetskog polja iza-



Slika 2. Metalni cilindar unutar zavojnice.

zivaju vrtloge električnog polja E , čije silnice su koncentrične kružnice s centrom u $r = 0$. Znajući prethodna objašnjena skin efekta, već sada možemo reći da jakost električnog polja unutar vodiča neće biti posvuda ista, već će biti neka funkcija od r , tj. $E = E(r)$. Uzmimo dogovorno da je za $r = a$ električno polje $E(r = a) = E_0$.

Pokušajmo sada riješiti problem uz pomoć Maxwellovih jednažbi. One za

slučaj kad nema prostornog naboja glase

$$\nabla \mathbf{E} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5)$$

S ε je označena apsolutna dielektrična konstanta vodiča. Budući da gustoću struje i električno polje povezuje Ohmov zakon

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (6)$$

u kojem je σ specifična električna vodljivost vodiča, možemo četvrtu Maxwellovu jednadžbu odmah preobraziti:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7)$$

Primijenivši nadalje operator rotacije na drugu jednadžbu dobijamo relaciju

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} \quad (8)$$

u kojoj μ označava apsolutnu permeabilnost vodiča. Kombiniranjem prethodnih dviju relacija nastaje diferencijalna jednadžba

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

za vremensku i prostornu ovisnost električnog polja unutar vodiča (sličan izraz mogao bi se izvesti i za magnetsko polje). Jednadžba koju smo dobili naziva se telegrafskom jednadžbom. Ona za $\sigma = 0$ tj. za izolatorska sredstva, prelazi u dobro poznatu valnu jednadžbu.

Za harmonijsku pobudu, tj. kada imamo elektromagnetsku pojavu neke frekvencije ω , sve veličine – pa i električno polje \mathbf{E} u jednadžbi (9) – su proporcionalne izrazu $\exp(-i\omega t)$. Uvrštavanjem $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)$ i zanemarivanjem 'malih' članova, dobivamo:

$$\Delta \mathbf{E} + i\mu\sigma\omega \mathbf{E} = 0. \quad (10)$$

Naš problem ima cilindarsku simetriju, s obzirom da se radi o dugačkoj ravnoj žici. Stoga možemo u operatoru Δ izostaviti derivacije po z i φ , te dobivamo običnu diferencijalnu jednadžbu za električno polje:

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} + i\mu\sigma\omega E = 0. \quad (11)$$

Rješenja ove jednadžbe se mogu prikazati pomoću specijalnih funkcija, ali za naše potrebe ćemo preuzeti približni izraz (za dovoljno visoke frekvencije):

$$E(r, t) = E_0 \exp\left(-\frac{a-r}{\delta}\right) \exp\left[i\left(\frac{a-r}{\delta} - 2\pi ft\right)\right] \quad (12)$$

U njemu je korištena kratica

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi\mu\sigma f}}. \quad (13)$$

Tumačenje pojedinih članova u relaciji (12) nije komplicirano. Drugi eksponencijalni član označava vremensku promjenu električnog polja i njegove fazne odnose, što u našem razmatranju skin efekta nije interesantno. Preostala dva člana predstavljaju, ustvari, amplitudu tog polja i govore nam kako se ona mijenja s koordinatom r , tj. s udaljenošću od površine vodiča. Kao što je bilo i dogovoreno, na samoj površini, tj. za $r = a$, električno polje ima vrijednost E_0 . Veličina δ dana formulom (13), naziva se dubinom prodiranja električnog polja u vodič. Često se ona naziva i debljinom skina. Stavimo li $a - r = \delta$, dobivamo $E = E_0/e$, što znači da je δ ona udaljenost od površine vodiča na kojoj električno polje padne na dio $1/e$ svoje početne vrijednosti.

Uz pomoć Ohmovog zakona (6) i relacije (12), dobivamo amplitudu gustoće struje:

$$j = j_0 \exp\left(-\frac{a-r}{\delta}\right) \quad (14)$$

Vidimo da ona pada eksponencijalno s udaljenošću od površine vodiča i da je brzina tog pada ovisna o debljini vodiča, o veličini δ , tj. o vrsti materijala od kojeg je načinjen vodič i o frekvenciji struje koja teče zavojnicom. Uvedemo li umjesto vodljivosti σ specifičnu otpornost ρ , dobivamo

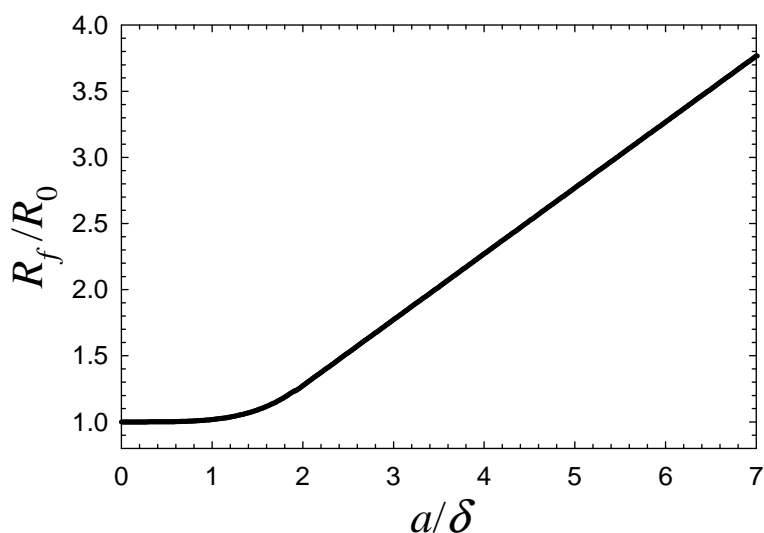
$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi\mu f}}. \quad (15)$$

Vidimo da je dubina prodiranja to manja što je frekvencija viša i što je otpor vodiča manji. Vidimo također da će skin efekt biti jače izražen kod feromagnetskih tvari koje imaju veliku magnetsku permeabilnost μ .

Vrlo često se veličina i jakost skin efekta procjenjuje prema omjeru

$$\xi = \frac{R_f}{R_0}, \quad (16)$$

gdje je R_f otpor vodiča kad njime protiče izmjenična struja frekvencije f , a R_0 kod istosmjerne struje. Taj omjer je očito neka funkcije debljine vodiča i dubine prodiranja (13) ili (15), pa se uobičajilo promatrati funkcijsku vezu $\xi = \xi(a/\delta)$, tj. vezu $\xi = \xi(a\sqrt{\pi\mu f/\rho})$. Grafički je ta funkcija prikazana na sl.3. Pomoću nje možemo se npr. uvjeriti daje za bakreni vodič specifičnog otpora



Slika 3. Omjer R_f/R_0 kao funkcija a/δ .

$1.72 \times 10^{-6} \Omega\text{cm}$ i promjera 2 cm, omjer kod 400 Hz jednak približno 1.7. Odatle se vidi da skin efekt kod debljih vodiča može biti znatan i pri relativno vrlo niskim frekvencijama. Kod 50 Hz može se utjecaj skin efekta opaziti u bakrenim ili aluminijskim vodičima tek ako su oni deblji od 1 – 2 cm. Ako je vodič od željeza, s efektom se mora računati i kod daleko manjih promjera. U radiotehnici ili kod televizijskih uređaja (npr. antene) koriste se redovito vodiči načinjeni od cijevi, jer je zbog skin efekta upotreba punih vodiča nepotrebna. Kod smanjivanja ovi vodiči su najčešće pozlaćeni.

1.3 Mjerenje dubine prodiranja

Skin efekt može se demonstrirati ili izmjeriti na različite načine. Može se npr. propuštati kroz vodič visokofrekventna izmjenična struja, te mjeriti njegov efektivni otpor u ovisnosti o frekvenciji. Dubina prodiranja dobiva se tada uz pomoć relacije (16) i funkcijske veze $\xi = \xi(a/\delta)$ prikazane na sl.3.

Druga mogućnost je da se vodič stavlja u magnetsko polje zavojnice kroz koju protiče izmjenična struja (kao na sl.2). Kod toga se opaža da skin efekt u vodiču uzrokuje promjenu u koeficijentu samoindukcije zavojnice. Ta promjena može se mjeriti i povezati na neki način s dubinom prodiranja električnog polja u vodič. Ovu metodu koristit ćemo i u našoj vježbi, pa smo zato i naveli u prošlom poglavlju njenu teorijsku osnovu.

Prije samog opisa metode, potrebno je definirati jednu veličinu koja će nam znatno olakšati daljnja razmatranja. To je tzv. ekvivalentna debljina skina. Ona će postati shvatljivom ako se detaljnije promotri kako se zapravo mijenja eksponencijalni porast (14) gustoće struje s frekvencijom. Kao što smo već konstatali, povisuje li se frekvencija, gustoća struje oko centra vodiča pada. Kod visokih frekvencija ukupna struja I kroz vodič prolazi gotovo potpuno u tankom sloju tik uz površinu. U ostalim dijelovima presjeka struje gotovo da i nema. Ovakav profil struje sugerira nam da masivni cilindrični vodič shvatimo kao šuplji cilindar sa zidom debljine d kroz koji protiče ukupna struja I i to homogeno, s gustocom j_0 . Veličina d naziva se tada ekvivalentnom debljinom skina. Ideja je ilustrirana na sl.4. Na slici lijevo prikazana je prava, a desno zamišljena situacija. Dok iz lijevog dijela slike slijedi da je ukupna struja I , prema desnoj slici:

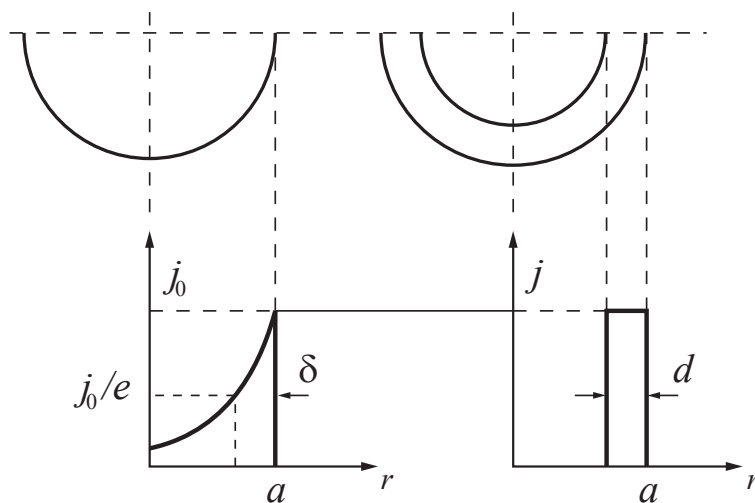
$$I = 2\pi \int_0^a r j(r) dr = (2ad - d^2)\pi j_0. \quad (17)$$

Ova formula bi već mogla poslužiti za definiciju ekvivalentne debljine skina d . No kod viših frekvencija i debljih vodiča vrijedi sigurno $d \ll a$, pa se ekvivalentna debljina skina reducira na jednostavniju definiciju:

$$I = 2\pi a j_0 d. \quad (18)$$

Budući da se rješavanjem integrala u izrazu (17) uz pomoć (14) za ukupnu struju dobiva relacija

$$I = 2\pi a j_0 \delta \left[1 - \frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{a} \exp\left(-\frac{\delta}{a}\right) \right]. \quad (19)$$



Slika 4. Definicija ekvivalentne debljine skina pomoću jednostavnije relacije.

Vidimo da je ekvivalentna debljina skina d povezana s dubinom prodiranja δ pomoću formule

$$d = \delta \left[1 - \frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{a} \exp\left(-\frac{\delta}{a}\right) \right]. \quad (20)$$

Ona se uz uvjet $\delta \ll a$ pojednostavljuje i daje $d \approx \delta$. Možemo, dakle, zaključiti da se ekvivalentna debljina skina ponaša jednako kao i dubina prodiranja i da se promatranjem te veličine mogu shvatiti sve osnovne zakonitosti skin efekta.

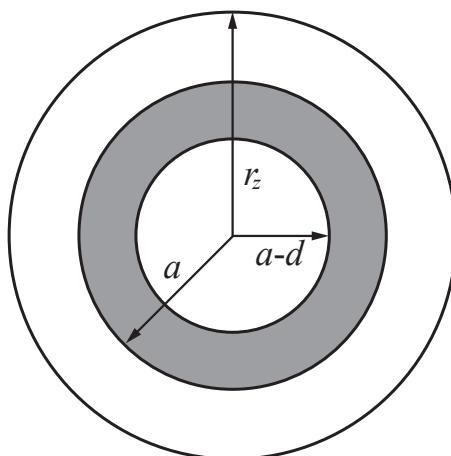
Pogledajmo sada kakav utjecaj vrši skin efekt u vodiču na koeficijent samoindukcije L zavojnice. Ako se radi o cilindričnoj jednoslojnoj zavojnici duljine x , polumjera r_z , presjeka q , od N navoja, njen koeficijent samoindukcije je dan izrazom:

$$L_1 = \frac{\pi \mu_0 N^2}{x} q \quad (21)$$

u kojoj je μ_0 magnetska permeabilnost vakuuma (zraka). U našem eksperimentu neće se mijenjati broj navoja i duljina zavojnice, pa možemo pisati

$$L_1 = C r_z^2 \quad (22)$$

gdje je C konstanta. Protječe li zavojnicom izmjenična struja, a u nju se stavi u cilindrični vodič polumjera a , primijetit će se smanjivanje koeficijenta samoindukcije zavojnice. Pojava je shvatljiva. Budući da je zbog skin efekta unutrašnjost vodiča postala nedostupna za magnetsko polje zavojnice, smanjio se njen efektivni presjek, što zbog (21) uzrokuje i smanjivanje koeficijenta L_1 . Iz sl.5 može



Slika 5. Efektivni presjek zavojnice.

se lako zaključiti da je novi koeficijent samoindukcije L_2 dan formulom

$$L_2 = C[r_z^2 - (a - d)^2] \quad (23)$$

Promjena koeficijenta samoindukcije dobiva se odbijanjem (23) od (22), što daje

$$\Delta L = C(a - d)^2 \quad (24)$$

odnosno

$$\sqrt{\Delta L} = C(a - d) \quad (25)$$

(ovdje smo redefinirali konstanu C). Mjeri li se sada na neki način ΔL , a u zavojnicu se stavljaju vodiči iz istog materijala, ali različitog promjera a , dobiva se ovisnost $\Delta L(a)$. Ekstrapolacijom u $\Delta L = 0$ se onda može odrediti ekvivalentna debljina skina.

1.4 Sklop za mjerenje - rezonantna frekvencija LCR -kruga

Kao što smo vidjeli u prethodnom poglavlju, debljinu skina na nekoj frekvenciji možemo odrediti pomoću promjene induktiviteta. Jedan od načina da izmjerimo induktivitet jest da mijenjanjem kapaciteta C u LCR krugu postignemo rezonanciju, tj. da postignemo da se imaginarne komponente ponište. Tada su napon pobude i struja koja teče krugom u fazi, a pojava se lako može opaziti na osciloskopu.

U svrhu opažanja tražene pojave, spojite u seriju zavojnicu, kondenzator, i otpornik (99.5Ω), te na zavojnicu priključite jedan izvod, a na otpornik drugi izvod izvora sinusoidalnog napona. S obzirom na širok raspon kapaciteta C koji nam trebaju, po potrebi paralelno kondenzatorskoj dekadi možete spajati dodatne kondenzatore.

Izvor sinusoidalnog signala postavite na oko $10 V_{pp}$ ili više, te ga spojite na X otklonski sklop osciloskopa. Pad napona sa otpornika dovedite na Y otklonski sklop osciloskopa. Kada je uvjet rezonancije $\omega^2 LC = 1$ zadovoljen, pad napona na otporniku je u fazi s izvorom napona, i iste je amplitude, te se stoga na osciloskopu dobiva pravac. Povećavajući osjetljivost na osciloskopu (minimalna osjetljivost na osciloskopu neka bude 100 mV ; u protivnom dolazi do izobličenja signala), uvjet rezonancije se može vrlo točno zadovoljiti. Iz poznate vrijednost za C , dobiva se induktivitet:

$$L = \frac{1}{\omega^2 C}. \quad (26)$$

Ako sa L_0 i C_0 označimo vrijednost dobivene sa zavojnicom bez bakrene ili mjedene šipke, tada je

$$\Delta L = L_0 - L = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{C_0} - \frac{1}{C} \right). \quad (27)$$

Na taj način možemo izmjeriti traženu ovisnost ΔL o polumjeru šipke a .

Pri mjerenju, obratite pažnju na frekvenciju koja mora biti konstantna do na sve četiri znamenke, te je po potrebi namještajte.