MATEMATIKA

Indirektni dokazi

Mladen Vuković, Zagreb

> *Reductio ad absurdum*, koji je Euklid toliko volio, predstavlja jedno od najfinijih oružja matematičara. To je mnogo finiji gambit od ikojeg šahovskog: šahista može ponuditi žrtvu pješaka ili cijele figure, ali matematičar nudi partiju.
>
> *G.H. Hardy* (1877–1947)
> *engleski matematičar*

Uvod

Što je dokaz u matematici? Intuitivno rečeno to je postupak pomoću kojeg iz aksioma logičkim zaključivanjem u konačno mnogo koraka dobivamo traženu tvrdnju. Aksiomi su neke osnovne tvrdnje za koje smo se dogovorili da ih smatramo istinitim. No, ne počinju svi dokazi od aksioma, već koristeći ono što smo dokazali, polazimo od dokazanih teorema. Važne tvrdnje u matematici se nazivaju teoremi. (Riječ teorem je grčkog porijekla i znači ono sto se gleda; pravilo). Najvažniji posao matematičara je da pronalazi i dokazuje nove teoreme.

Dokazi su također i objekti matematičkih istraživanja. Čitava jedna grana matematičke logike, koja se i naziva teorija dokaza, bavi se njima. No, svrha ovog članka nije kako proučavati te tzv. formalne dokaze. Cilj nam je ukazati na jednu vrstu dokaza koja se primjenjuje i u nastavi srednjoškolske matematike. To su tzv. *indirektni dokazi*. Sa pojmom indirektnog dokaza mogu se učenici upoznati već u završnim razredima osnovne škole, i to pri proučavanju međusobnih položaja ravnine i pravca.

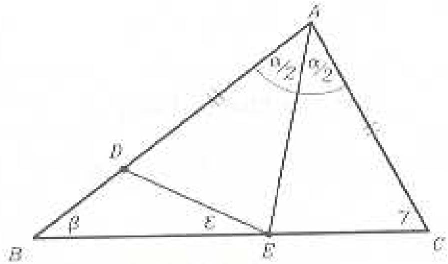
Kao što im i sam naziv govori, pomoću njih, za razliku od direktnih dokaza, put dokaza od pretpostavke do tražene tvrdnje je "zaobilazan".

Promotrimo prvo dva primjera.

Primjer 1

Vrijedi:
U trokutu nasuprot većoj stranici leži veći kut.

Dokažimo ovu tvrdnju. U tu svrhu skicirajmo trokut ABC. Pretpostavimo da je $|AB| > |AC|$. Neka je sa E označen presjek simetrale kuta α i stranice BC.



Neka je D točka na stranici AB tako da je $|AD| = |AC|$. (Primijetite da takva točka postoji.) Po teoremu SKS o sukladnosti trokuta (SKS je kratica za "dvije stranice i kut među njima") zaključujemo da su trokuti ECA i EDA sukladni.

Zbog toga je kut EDA jednak kutu γ. Pošto je γ vanjski kut u trokutu BDE, tada je $\gamma = \beta + \varepsilon$. (Sa ε smo označili kut DEB). Dakle, kut γ je veći od kuta β, što smo i trebali dokazati.

Primjer 2

Vrijedi:
Ako je x prirodan broj i x^2 neparan, tada je i x neparan broj.

Dokažimo ovu tvrdnju. Pretpostavimo da je x paran broj. Tada postoji $y \in \mathbf{N}$ (sa $\mathbf{N}$ smo označili skup prirodnih brojeva) tako da je $x = 2y$. No, onda je

$$x^2 = (2y)^2 = 4y^2 = 2(2y^2),$$

što smo znači da je x^2 paran broj.

Radi lakšeg i preciznijeg izlaganja za tvrdnje oblika kao u prethodna dva primjera reći ćemo da su oblika

"ako A onda B", tj. $A \to B$.

Negaciju neke tvrdnje A označavamo sa $\rceil A$.

Označimo sa A tvrdnju "stranica c trokuta veća je od stranice b", a sa B označimo tvrdnju "kut γ veći je od kuta β". Tada je tvrdnja iz Primjera 1 oblika $A \to B$ i njezin dokaz je **direktan**.

Označimo sa C tvrdnju "x^2 je neparan broj", a sa D tvrdnju "x je neparan broj". Tada je tvrdnja iz Primjera 2 oblika $C \to D$, a njezin dokaz je **indirektan**, tj. tvrdnju $C \to D$ dokazujemo tako da dokažemo $\rceil D \to \rceil C$. Takav dokaz nazivamo **dokaz po kontrapoziciji**, što je samo jedan od oblika indirektnog dokaza.

U daljnjem izlaganju želimo objasniti zašto je dokaz po kontrapoziciji, a i drugi oblici indirektnog dokaza, ispravno zaključivanje. U tu svrhu moramo uvesti neke osnovne pojmove matematičke logike.

Osnove logike sudova

Logika sudova je dio matematičke logike kojom je opisan jedan vrlo mali dio svakodnevnog logičkog zaključivanja, ali je ipak dovoljan za objašnjenje indirektnih dokaza. Pod pojmom *sud* podrazumijevamo izjavnu rečenicu koja u pogledu istinitosti mora imati samo jedno od slijedeća dva svojstva:

istinita je i nije lažna; lažna je i nije istinita.

Pokušat ćemo objasniti pojam suda pomoću nekoliko primjera.

(1) Rečenica "Dva plus dva jednako četiri" jeste sud i to istinit.

(2) Rečenica "Dva plus dva je pet" je također sud, ali lažan.

(3) "L. N. Tolstoj je napisao roman Zločin i kazna" je sud, ali lažan, jer je spomenuti roman napisao F. M. Dostojevski.

(4) Rečenica "Broj 0,0001 je mali broj" nije sud, jer nismo precizirali što je to mali broj, pa ne možemo reći da je gornja izjava istinita ili pak lažna.

(5) Izjava "$x + 2 = 8$" nije sud, jer za ovu izjavu ne možemo reći da li je istinita ili lažna, dok nismo rekli koliki je x.

(6) Izjava "Ja sada lažem" nije sud, jer pretpostavimo li da je ta izjava istinita, onda sam zaista lagao, pa je ono što sam rekao neistina. Obrnuto, pretpostavimo li da je ta izjava lažna onda nisam lagao, pa je ono što sam rekao istina. Dakle, ova izjava nije ni istinita ni lažna.

(7) Rečenica "Koliko je sati?" nije sud, jer nije izjavna rečenica.

Sudovi (1), (2) i (3) su jednostavnog oblika. Pomoću veznika, *i, ili, ako ... onda* i *nije* možemo iz jednostavnih sudova graditi složene. Na primjer:"Vanja ima tri godine i zna brojati do pet" je složen sud, jer je nastao pomoću veznika *i* iz jednostavnih sudova. Naravno, u našem prirodnom jeziku postoje i drugi veznici, osim gore spomenutih, pomoću kojih gradimo rečenice, ali ih u logici sudova ne promatramo.

Dana definicija suda nije stroga matematička definicija, već samo opisna. Pojam jednostavnog suda niti se ne definira u matematičkoj logici, jer su to osnovni objekti teorije. Slično kao što se u geometriji ne definiraju točke, pravci i ravnine, već se samo promatraju relacije među tim objektima, tako se i u logici sudova kreće od beskonačnog prebrojivog skupa

$$\mathrm{Var} = \{P, Q, R, P_1, P_2, \ldots\}\,,$$

čije elemente nazivamo *propozicionalne varijable*. (Sudovi se ponekad nazivaju i *propozicije*, pa odatle naziv propozicionalne varijable).

Sa V označimo skup $\{\&, \vee, \rightarrow, \rceil, \leftrightarrow\}$ čije elemente nazivamo logički veznici, a te veznike redom nazivamo

& je konjukcija ili kratko "i";

$\vee$ je disjunkcija ili kratko "ili";

$\rightarrow$ je implikacija;

$\rceil$ je negacija, te

$\leftrightarrow$ je ekvivalencija.

Sada možemo definirati sud induktivno na ovaj način:

a) svaka propozicionalna varijabla je sud

b) ako su A i B sudovi, tada su i $\rceil A$, $A\&B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ i $A \leftrightarrow B$ također sudovi.

c) sudovi su samo oni izrazi koji su oblika kao što je opisano u a) i b).

Najvažnije pitanje u vezi sudova je da li je određeni sud istinit ili lažan. Da bi o istinitosti sudova mogli uopće govoriti, moramo svakoj propozicionalnoj varijabli pridružiti istinitosnu vrijednost, tj. istinu ili laž. U tu svrhu definiramo: svaku funkciju

$$i : \{P, Q, R, \ldots\} \rightarrow \{0, 1\}$$

nazivamo interpretacija propozicionalnih varijabli. Ako je $i(P) = 1$, reći ćemo da je propozicionalna varijabla P istinita za interpretaciju i, odnosno ako je $i(P) = 0$, reći ćemo da je P lažna za i. Sada možemo definirati kada je sud istinit, odnosno lažan za danu interpretaciju. U tu svrhu moramo definirati vrijednost logičkih veznika iz skupa V na $\{0, 1\}$. Te definicije se najčešće daju u obliku tzv. **tablica istinitosti.**

P	$\rceil P$	P	Q	$P\&Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
		1	0	0	1	0	0
		1	1	1	1	1	1

Kako čitamo gornju tablicu? Na primjer, ako je $i(P) = 1$ i $i(Q) = 0$ tada je $i(\rceil P) = 0$, $i(P\&Q) = 0$, $i(P \vee Q) = 1$, $i(P \rightarrow Q) = 0$, te $i(P \leftrightarrow Q) = 0$.

Primjer 3

Neka je sud A jednak $(\rceil P \vee Q)\&(R \leftrightarrow \rceil(R \rightarrow \rceil Q))$ i neka je interpretacija i zadana na propozicionalnim varijablama sa $i(P) = 1$, $i(Q) = 0$ i $i(R) = 1$. Vrijednost interpretacije i na sudu A, tj. $i(A)$, možemo odrediti pomoću ove male tablice istinitosti:

P	Q	R	$\rceil P$	$\rceil P \vee Q$	R	$\rceil Q$	$R \rightarrow \rceil Q$	$\rceil(R \rightarrow \rceil Q)$	R	$R \leftrightarrow \rceil(R \rightarrow \rceil Q)$	A
1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0

Dakle, $i(A) = 0$, tj. sud A je lažan za interpretaciju i.

Sudovi koji su istiniti za svaku interpretaciju propozicionalnih varijabli nazivaju se **tautologije**, a sudovi koji su lažni za svaku interpretaciju nazivaju se **antitautologije**.

Primjer 4

Pokažimo da je sud oblika $(\rceil B \to \rceil A) \to (A \to B)$ tautologija. U tu svrhu promotrimo tablicu istinitosti za svaki izbor interpretacije A i B.

A	B	$\rceil B$	$\rceil A$	$\rceil B \to \rceil A$	$A \to B$	$(\rceil B \to \rceil A) \to (A \to B)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Dakle, za svaki izbor interpretacije sudova A i B sud $(\rceil B \to \rceil A) \to (A \to B)$ poprima vrijednost 1, tj. on je tautologija.

Zadaci

1. Pomoću tablica istinitosti provjerite da su sljedeći sudovi tautologije:

   a) $((A \to B) \to A) \to A$ (*Pierceova* tautologija)

   b) $((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$

2. Odredite bar jedan sud U tako da formula

$$((A \to (B \to (U \& C))) \to (U \to (A \vee C))) \vee (A \& B \& \rceil C)$$

   bude tautologija.

3. Neka je A sud koji ne sadrži drugih veznika osim $\leftrightarrow$ i $\rceil$. Dokažite:

   sud A je tautologija ako i samo ako svaka propozicionalna varijabla i znak negacije dolaze paran broj puta u A.

Na kraju članka dat ćemo još jedan način određivanja da li je dani sud tautologija (to će biti još jedan primjer indirektnog dokaza).

Sjetimo se; naš cilj je pokazati da je zaključivanje po kontrapoziciji logičko zaključivanje (prije svega; kasnije ćemo komentirati i druga logička zaključivanja). Do tog cilja preostaje nam još jedan korak: definirati što je to logičko zaključivanje. Kažemo da sud A **logički slijedi** iz (konačnog) skupa sudova $\{B_1, \ldots, B_n\}$ ako za svaku interpretaciju i propozicionalnih varijabli, za koju vrijedi

$$i(B_1) = i(B_2) = \cdots = i(B_n) = 1\,,$$

slijedi $i(A) = 1$.

U tom slučaju sudove $B_1, \ldots, B_n$ nazivamo pretpostavke, a sud A nazivamo zaključak i označavamo

$$B_1, \ldots, B_n \models A .$$

Primjer 5

Za proizvoljne sudove A, B i C vrijedi

$$A \to B\,, \quad A\&C \models B\&C\,.$$

Dokaz:
Neka je i interpretacija tako da vrijedi

$$i(A \to B) = 1 \quad \text{i} \quad i(A\&C) = 1\,.$$

Iz definicije interpretacije logičkog veznika & slijedi $i(A) = i(C) = 1$, a onda iz $i(A \to B) = 1$ i $i(A) = 1$ po definiciji interpretacije logičkog veznika $\to$ slijedi $i(B) = 1$. Time smo pokazali da je $i(B) = 1$ i $i(C) = 1$, pa je i $i(B\&C) = 1$.

Zadaci

Dokažite da za proizvoljne sudove A, B i C vrijedi

a) $A\&B \models A$ (slaba & –eliminacija)

b) $A \models A \vee B$ ($\vee$–introdukcija)

c) $A, A \to B \models B$ (modus ponens)

d) $A \to B,\ B \to C \models A \to C$ (silogizam)

e) $A \to B,\ B \to A \models A \leftrightarrow B$ ($\leftrightarrow$ – introdukcija)

Lako je pokazati da vrijedi:
Za proizvoljne sudove A, B_1, ..., B_n je ispunjeno
$B_1, ..., B_n \models A$ ako i samo ako je sud $(B_1 \& \cdots \& B_n) \to A$ tautologija.
(Dokažite!)

U primjeru 4 smo pokazali da je sud $(\rceil B \to \rceil A) \to (A \to B)$ tautologija, a to po ovom prethodnom znači da vrijedi $\rceil B \to \rceil A \models A \to B$, tj. zaključivanje po kontrapoziciji je logičko zaključivanje. Isto tako je lako pokazati da je drugi osnovni oblik indirektnog dokaza tzv. **reductio ad absurdum** (svođenje na apsurd ili svođenje na kontradikciju)

$$(A\&\rceil B) \to (C\&\rceil C) \models A \to B$$

također pravilno zaključivanje. Reductio ad absurdum pokazuje neispravnost pretpostavke time što iz nje izvodi nešto neistinito.

Primjeri indirektnog dokaza:

Primjer 6

Ne postoje prirodni brojevi x, y, z i n tako da je $n \geq z$ i $x^n + y^n = z^n$.

(Primjetimo da ako izostavimo uvjet $n \geq z$ dobivamo tvrdnju koja se naziva Veliki Fermatov teorem, koji, iako je formuliran još u 17. stoljeću, do danas nije dokazan, a niti opovrgnut).

Dokaz (reductio ad absurdum):
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje prirodni brojevi x, y, z i n sa traženim svojstvom. Tada je očito $x < z$ i $y < z$. Primjetimo da mora biti $x \neq y$, jer inače je $2x^n = z^n$, pa je $\sqrt[n]{2}\,x = z$, tj. $\sqrt[n]{2}$ je racionalan broj, što za $n \geq 2$ nije istina. (Ako bi bilo $n = 1$, tada je $z = 1$ i $x + y = 1$ što nije moguće jer su $x, y \geq 1$. Stoga mora biti $n \geq 2$.)

Radi simetričnosti možemo pretpostaviti $x < y$.

Tada je

$$x^n = z^n - y^n = (z-y)(z^{n-1} + z^{n-2} \cdot y + \cdot + y^{n-1}) \geq$$
$$\geq 1 \cdot n \cdot x^{n-1} > x^n .$$

Dakle, dobili smo $x^n > x^n$ što je nemoguće.

Primjer 7

Sedam točaka postavljeno je u krug jediničnog radijusa tako da je udaljenost svakih dviju barem 1. Dokazati da je jedna točka u središtu kruga.

Dokaz (reductio ad absurdum):
Pretpostavimo suprotno, tj. da niti jedna točka nije u središtu O kruga. Neka je $O_1, O_2, \ldots O_7$ poredak tih točaka u smjeru obilaska kazaljke na satu. Zbroj veličina kutova

$$\sphericalangle O_1OO_2\,,\ \sphericalangle O_2OO_3\,,\ \ldots,\ \sphericalangle O_7OO_1$$

je 360° i stoga je barem jedan od njih manji od 60°. Neka je $\sphericalangle O_1OO_2 < 60^\circ$ i neka je $\sphericalangle O_2O_1O$ veći od preostala dva kuta trokuta OO_1O_2. Tada je

$$\sphericalangle O_2O_1O > 60^\circ > \sphericalangle O_1OO_2\,,$$

odakle slijedi $|O_1O_2| < |OO_2|$ (nasuprot većeg kuta u trokutu nalazi se veća stranica). No, O je središte jediničnog kruga, a O_2 je točka unutar kruga, pa je $|OO_2| \leq 1$.

Iz ovog posljednjeg i $|O_1O_2| < |OO_2|$ slijedi $|O_1O_2| < 1$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je udaljenost svakih dviju točaka barem 1.

Primjer 8

Dokazati da je sud F, koji je oblika

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to (A\&B \to C)),$$

tautologija.

Dokaz (reductio ad absurdum):
Pretpostavimo suprotno, tj. da sud F nije tautologija. Tada po definiciji tautologije postoji interpretacija i propozicionalnih varijabli, tako da je $i(F) = 0$. Tada je nužno $i(A \to C) = 1$ i $i((B \to C) \to (A\&B \to C)) = 0$, a onda $i(B \to C) = 1$, te $i(A\&B \to C) = 0$.

Iz ovog posljednjeg slijedi $i(A\&B) = 1$ i $i(C) = 0$.

Iz $i(C) = 0$ i $i(B \to C) = 1$ po definiciji interpretacije logičkog veznika $\to$ slijedi $i(B) = 0$, što je u kontradikciji sa već dobivenim $i(A\&B) = 1$.

Primjer 9

Dekadski logaritmi racionalnih brojeva, koji nisu cjelobrojne potencije broja 10, su iracionalni brojevi.

Dokaz (dokaz po kontrapoziciji):
Neka je r racionalan broj. Označimo sa A tvrdnju "$\log r$ je racionalan broj", a sa B tvrdnju "$r = 10^n$, za neki cijeli broj n". Tražena tvrdnja je oblika $\rceil B \to \rceil A$. No, tu tvrdnju nećemo dokazivati direktno, već ćemo dokazati $A \to B$. Dakle, neka je $\log r$ racionalan broj, tj.

$$\log r = \frac{p}{q},$$

za neki cijeli broj p i neki prirodan broj q. Po početnoj pretpostavci r je racionalan broj, pa iz ovog posljednjeg slijedi $10^{\frac{p}{q}} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti brojevi. Dakle,

$$10^p = \left(\frac{m}{n}\right)^q \qquad (*)$$

Razlikujemo ova tri slučaja:

1) $p = 0$; tada je $\log r = 0$ tj. $r = 1 = 10^0$.

2) $p > 0$; tada je 10^p cijeli broj, pa iz jednakosti (*) slijedi $n = 1$, tj. $10^p = m^q$. Pošto je $10^p = 2^p \cdot 5^p$, postoje prirodni brojevi a i b tako da je $m = 2^a \cdot 5^b$. Zato iz $10^p = m^q$ slijedi $10^p = 2^p \cdot 5^p = 2^{aq} \cdot 5^{bq}$, pa je $p = aq$ i $p = bq$. Dakle, $\frac{p}{q} = a = b$, pa je $r = 10^{\frac{p}{q}} = 10^a$.

3) $p < 0$; tada je $p = -p'$ $(p' > 0)$ i jednakost (*) prelazi u $10^{p'} = (\frac{n}{m})^q$. Slično, kao u slučaju 2), vidimo da mora biti $m = 1$ i $r = \frac{m}{n} = 10^{-a}$, gdje je a prirodan broj.

Dakle, u sva tri slučaja dobivamo da je r cjelobrojna potencija broja 10.

Zadaci

1. Dokažite (ili pogledajte dokaze u udžbenicima i uočite da su indirektni):

   a) Skup primbrojeva je beskonačan.

   b) $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

   c) Sljedeći realni brojevi su iracionalni:
   $\sqrt{3} + \sqrt{19}$;
   $\sqrt{m + \sqrt{m}}$, za svaki prirodan broj m;
   $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, za sve prirodne brojeve n.

   d) Skup relanih brojeva $\mathbf{R}$ je neprebrojiv, tj. ne postoji bijekcija između $\mathbf{N}$ i $\mathbf{R}$.

   e) Neka je A proizvoljan skup. Ne postoji bijekcija između skupova A i partitivnog skupa $P(A)$.

2. Dokažite da ne postoji podskup skupa prirodnih brojeva tako da se u tom skupu svaka od deset znamenaka pojavljuje točno jedanput, a suma brojeva skupa je 100. (Uputa: pretpostavimo da je $K = \{k_1, \ldots, k_n\}$ podskup skupa prirodnih brojeva sa traženim svojstvom. Primijetimo da je $1+2+3+\cdots+9 = 45$. Označimo sa k sumu znamenaka desetica brojeva skupa K. Tada vrijedi: $10k + (45 - k) = 100$).

3. Dokažite da jednadžba
$$x^x + y^y + z^z = t^t$$
nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

   (Uputa: pretpostavimo da su x, y, z i t rješenja dane jednadžbe. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \leq y \leq z$. Promotriti slučajeve: $z = 1$; $z = 2$ i $z \geq 3$).

4. Dokažite da ne postoji polinom $P(x)$ s realnim koeficijentima takav da je $P(\cos x) = \sin x$.

   (Uputa: pretpostavimo da je $P(x)$ traženi polinom. Iz danog uvjeta i supstitucije $t = \cos x$ slijedi $P^2(t) = 1 - t^2$. Tada mora biti $P(t) = at + b$, pa je
$$a^2t^2 + 2abt + b^2 = 1 - t^2\,,$$
tada je $a^2 = -1$).

5. Dokažite da se broj 101 010 ne može predstaviti u obliku razlike kvadrata dva broja.

   (Uputa: pretpostavimo da je $101\,010 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. Lijeva strana je djeljiva s dva, pa je i desna. Dakle, jedan od brojeva $x - y$ i $x + y$ je djeljiv s dva. No, $x + y$ je paran broj ako i samo ako je $x - y$ paran broj. Dakle, $(x-y)(x+y)$ je djeljivo sa 4, a onda i broj 101 010 djeljiv sa 4, što nije istina.)

6. Postoje i drugi oblici indirektnog dokaza, ali nisu toliko česti u praksi. Dokažite da su sljedeći oblici indirektnog dokaza također pravilna zaključivanja:

   a) $(P \to Q) \& \rceil Q \models P$ (modus tolens)

   b) $(P \vee Q \vee R) \& (\rceil P \& \rceil Q) \models R$ (proces eliminacije)

   c) $(P \& Q) \to R \models (P \& \rceil R) \to \rceil Q$ (proširena kontrapozicija)

Na kraju želimo istaći da se ovim člankom nije željelo opisati što iz matematičke logike treba učiti u srednjoj školi, već smo na primjeru indirektnih dokaza željeli potaknuti da se sličnim pojmovima iz matematičke logike pristupa s više pažnje, manje stihijski i ne pozivajući se pritom gotovo isključivo na logičku intuiciju.

Literatura:

V. Devidé, Matematička logika (prvi dio), Beograd 1972

Ž. M. Mijalković, Oblici metode matematičkog dokaza, MFL 106

G. Papić, D. Jovičić, Implikacija u nastavi, Matematika, 1977, br. 1

M. Polonijo, Beskonačnost skupa primbrojeva – Euklidov dokaz, MFL 160

V.N. Trostnikov, Što su konstruktivni procesi u matematici, Školska knjiga, Zagreb, 1983

* * *

PJOTR ILJIČ ČAJKOVSKI (1840–1893), ruski kompozitor

Rad je za mene najveće blago koje se ni sa čim ne da usporediti. Nadahnuće se rađa samo iz rada i za vrijeme rada.

NAPOLEON BONAPARTE (1769–1821), francuski car

Napretkom i usavršavanjem matematike uvjetovano je blagostanje države.