

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij – 22. travnja 2023.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta.

Zadatak 1. (7 bodova) Definirajte kompleksnu eksponencijalnu funkciju te kompleksne funkcije sinus i kosinus. Pretpostavljajući poznatim derivaciju eksponencijalne funkcije, izračunajte derivacije sinusa i kosinusa.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij – 22. travnja 2023.

Zadatak 2. (7 bodova) Iskažite Goursat-Pringsheim-ov teorem te Cauchy-ev teorem za zvjezdast skup. Skicirajte dokaz drugog teorema pretpostavljajući sve prethodne teoreme poznatima.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij – 22. travnja 2023.

Zadatak 3. (7 bodova)

- (a) U skupu kompleksnih brojeva rješite jednadžbu

$$\cos^2 z = \sin z + \cos 2z.$$

- (b) Zadane su funkcije $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ i $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \ln(2f(z)) + i$. Nadalje, zadan je skup

$$A = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < x \leq \ln 2, 0 \leq y \leq \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Skicirajte skupove A , $f(A)$ te $g(A)$.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij – 22. travnja 2023.

Zadatak 4. (7 bodova)

- (a) Odredite sve holomorfne funkcije $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ takve da im je realni dio zadan formulom

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + e^x \cos y.$$

te ih zapišite kao funkcije u varijbli $z = x + iy$.

- (b) Je li funkcija $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = z^2 + \bar{z}$ holomorfna? Svoj odgovor detaljno obrazložite.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij – 22. travnja 2023.

Zadatak 5. (7 bodova)

(a) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n \ln 2 + i\pi e^{2024}}.$$

(b) Neka je Γ pozitivno orijentirana kružnica polumjera 1 sa središtem u ishodištu kompleksne ravnine. Odredite integral

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z \sin \pi z + e^{2z} \cos 3\pi z}{z^2 + 2z} dz.$$