LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 30. siječnja 2026.

1. (10 bodova) Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $x \in \mathbb{R}$ neka je

$$A_n(x) = \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & x \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & x & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & x & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ n & x & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Postoji li $x \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ matrica $A_n(x)$ regularna?

(b) Odredite $\det A_n(x)$.

(c) Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ takve da je $A_n(x) \sim A_n(1)$.

Rješenje:

(a) Uočimo, ako je $x = k$, za neki $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tada su stupci S_1 i S_{n-k+1} od $A_n(x)$ linearno zavisni, pa $A_n(x)$ nije regularna. Stoga vidimo da za $x \in \mathbb{N}$ matrica $A_{x+1}(x)$ nije regularna, pa takav $x \in \mathbb{N}$ ne postoji.

(b) Oduzimanjem zadnjeg retka od svih ostalih redaka dobivamo:

$$\det A_n(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & x-(n-1) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Zamjenom S_1 i S_n, S_2 i S_{n-1}, S_3 i S_{n-2}, itd. do $S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ dobivamo:

$$(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-(n-1) & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix}$$

Zaključujemo da je

$$\det A_n(x) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n \prod_{k=1}^{n-1} (x-k).$$

(c) Primjenom istih elementarnih transformacija kao za determinantu, te poništavanjem zadnjeg retka zadnjim stupcem, zaključujemo

$$A_n(x) \sim \operatorname{diag}(x-1, x-2, \dots, x-(n-1), 1).$$

Dakle,

$$r(A_n(x)) = \begin{cases} n-1, & x \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ n, & \text{inače.} \end{cases}$$

Budući da je $r(A_n(1)) = n-1$, vidimo da je $A_n(x) \sim A_n(1)$ ako i samo ako je $x \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

2. (10 bodova) U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustav:

$$\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ \lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Rješenje:

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & : & 2 \\ 1 & -5 & \lambda & 1 & : & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & : & -2 \\ \lambda & 2 & 2 & 1 & : & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & : & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-2 & 0 & : & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 2+\lambda & 2-2\lambda & 1-\lambda & : & 1+2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & : & -4 \\ 0 & -4 & \lambda-2 & 0 & : & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 4\lambda-1 & 0 & 0 & : & 4\lambda-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & : & -4 \\ 0 & 1 & \frac{2-\lambda}{4} & 0 & : & -\frac{3}{4} \\ 0 & 3 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 4\lambda-1 & 0 & 0 & : & 4\lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-\lambda & 0 & : & -7 \\ 0 & 1 & \frac{2-\lambda}{4} & 0 & : & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3\lambda+2}{4} & 1 & : & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 & \frac{(2-\lambda)(1-4\lambda)}{4} & 0 & : & 7\lambda - \frac{7}{4} \end{bmatrix}.$$

Jedini preostali pivot je $\frac{(2-\lambda)(1-4\lambda)}{4}$, pa razlikujemo slučajeve:

(1) $\frac{(2-\lambda)(1-4\lambda)}{4} = 0$, tj. $\lambda = 2$ ili $\lambda = \frac{1}{4}$.

(a) Ako je $\lambda = 2$, onda je $7\lambda - \frac{7}{4} \neq 0$, pa taj slučaj nema rješenja.

(b) Ako je $\lambda = \frac{1}{4}$, tada je $7\lambda - \frac{7}{4} = 0$, pa sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Označimo $t = x_3$.
Slijedi da je $x_4 = \frac{17}{4} - \frac{3\lambda+2}{4}t$, $x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{2-\lambda}{4}t$, $x_1 = -7 + (\lambda-2)t$, tj.

$$x = \begin{bmatrix} -7 \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{17}{4} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} \\ \frac{-7}{16} \\ 1 \\ \frac{-11}{16} \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(2) Ako je $\frac{(2-\lambda)(1-4\lambda)}{4} \neq 0$, sustav ima jedinstveno rješenje: $x_3 = \frac{7}{\lambda-2}$, $x_4 = \frac{\lambda+12}{2-\lambda}$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$, tj.

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{7}{\lambda-2} \\ \frac{\lambda+12}{2-\lambda} \end{bmatrix}.$$

3. (10 bodova) Odredite LU faktorizaciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & \mu & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

te odredite rang matrice A u ovisnosti o parametru μ.

Rješenje: Svodimo A na gornjotrokutasti oblik te usput zapisujemo elementarne transformacije koje vršimo preko odgovorajućih elementarnih matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & \mu & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}^{-1} \\ F_{31}^{1} \\ F_{41}^{-1}}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & \mu & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{F_{32}^{1} \\ F_{42}^{-1}}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu+1 & 1 \\ 0 & 0 & -(\mu+1) & 3 \end{bmatrix} \underset{F_{43}^{1}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Iz ovoga čitamo da je LU faktorizacija matrice A dana s

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

te da je posebno

$$r(A) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} 3, & \mu = -1, \\ 4, & \text{inače} \end{cases}$$

4. (10 bodova) Dana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odredite A^{-1} te matricu A napišite kao produkt elementarnih matrica.

Rješenje: Računamo inverz od A standardnim putem, usput zapisujući transformacije koje vršimo pomoću odgovarajućih elementarnih matrica:

$$\big[A : I\big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{F_{21}^{1}\, F_{31}^{-2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & : & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{F_{13}^{-1}\, F_{2}^{1/2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odavde vidimo da je $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F_2^{1/2} F_{13}^{-1} F_{31}^{-2} F_{21}^{1}$, pa se A može zapisati kao

$$A = (A^{-1})^{-1} = (F_2^{1/2} F_{13}^{-1} F_{31}^{-2} F_{21}^{1})^{-1} = F_{21}^{-1} F_{31}^{2} F_{13}^{1} F_2^{2}.$$

5. (10 bodova) Pretpostavimo da su $C_1 = [1\ 1\ 1\ \ldots\ 1\ 2]^T$ i $C_2 = [2\ 1\ 1\ \ldots\ 1\ 1]^T$ dva rješenja sustava $AX = B$, pri čemu je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ matrica ranga $n-1$.

(a) Dokažite da je $B \neq 0$, te odredite sva rješenja sustava $AX = B$. (Obavezno obrazložiti da ste odredili **sva** rješenja sustava.)

(b) Dokažite da je prvi stupac matrice A jednak njenom posljednjem stupcu.

Rješenje: Neka je Ω prostor rješenja pripadnog homogenog sustava $AX = 0$. Tada je

$$\dim \Omega = n - r(A) = n - (n-1) = 1.$$

(a) Pretpostavimo da je $B = 0$. Tada $C_1, C_2 \in \Omega$, što je nemoguće, jer je $\{C_1, C_2\}$ linearno nezavisan skup, a Ω jednodimenzionalan prostor. Time smo dokazali da je $B \neq 0$.

Iz $AC_1 = B$ i $AC_2 = B$ slijedi $A(C_1 - C_2) = 0$, pa je $C_1 - C_2 \in \Omega$. Kako je $C_1 - C_2 \neq 0$ i $\dim \Omega = 1$, slijedi

$$\Omega = [\{C_1 - C_2\}] = \{\lambda\ [1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\ -1]^T : \lambda \in \mathbb{F}\}.$$

Tada je skup svih rješenja nehomogenog sustava

$$\{C_1 + \lambda(C_1 - C_2) : \lambda \in \mathbb{F}\}$$

(za partikularno rješenje uzeli smo C_1, a mogli smo bilo koje rješenje sustava $AX = B$).

(b) Iz $A(C_1 - C_2) = 0$ i

$$A(C_1 - C_2) = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_{n-1} & S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot S_1 + 0 \cdot S_2 + \ldots + 0 \cdot S_{n-1} + 1 \cdot S_n = S_1 - S_n$$

slijedi $S_1 = S_n$.