

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi rok - 13. veljače 2026.

1. (20 bodova) Neka je $S \subseteq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dan s

$$S = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0, p(0) = 2\}.$$

- (a) Dokažite da S nije potprostor od $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
- (a) Odredite bazu za $[S]$.
- (b) Odredite jedan direktni komplement potprostora $[S]$ u $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Rješenje:

- (a) Neka su $p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Tada je $(p + q)(0) = p(0) + q(0) = 2 + 2 = 4 \neq 2$, pa $p + q \notin \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Alternativno, možemo uočiti da S ne sadrži nulpolinom, pa nije vektorski prostor.
- (b) Općenito, $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ je oblika

$$p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3.$$

Iz $p(0) = 2$ slijedi $a = 2$, a iz $p(1) = 0$ slijedi $a + b + c + d = 2 + b + c + d = 0$. Dakle, $d = -2 - b - c$, pa je

$$p(t) = 2 + bt + ct^2 + (-2 - b - c)t^3 = (2 - 2t^3) + b(t - t^3) + c(t^2 - t^3).$$

Slijedi da je $[S] = [\{2 - 2t^3, t - t^3, t^2 - t^3\}]$.

- (c) Dopunimo bazu od $[S]$ do baze za $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

$$\{2 - 2t^3, t - t^3, t^2 - t^3, 1\}.$$

Dakle, jedan direktni komplement je $L = [\{1\}]$.

2. (20 bodova) Za $\lambda \in \mathbb{R}$ dani su potprostori $L, M_\lambda \leq \mathbb{R}^4$ s

$$L = [\{(1, 2, 0, 1), (-1, 1, -1, 1), (2, 1, 1, 0)\}] \quad \text{i} \quad M_\lambda = [\{(1, 0, 1, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 1, \lambda, 1)\}].$$

- (a) U ovisnosti o λ odredite $\dim M_\lambda$, $\dim(L + M_\lambda)$ i $\dim(L \cap M_\lambda)$.
 (b) Odredite po jednu bazu za $L + M_1$ i $L \cap M_1$.

Rješenje:

- (a) Odredimo prvo $\dim M_\lambda$. Ovo je najjednostavnije odrediti zapisom generatora matricno te računanjem ranga. Kako je

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

te su stupci ove matrice linearno nezavisni, zaključujemo da je rang ove matrice uvijek 3. Stoga je $\dim M_\lambda = 3$ za sve $\lambda \in \mathbb{R}$. Odredimo sada $\dim(L + M_\lambda)$. Iako nije nužno, nešto je kraći račun ako se već ovdje primijeti da je $(2, 1, 1, 0) = (1, 2, 0, 1) - (-1, 1, -1, 1)$, pa je $L = [\{(1, 2, 0, 1), (-1, 1, -1, 1)\}]$, te je $\dim L = 2$ (ovo je svakako potrebno za kasniji dio zadatka). Za pripadnu matricu generatora imamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \lambda \\ \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \lambda \\ \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \lambda + 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \lambda + 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Stoga vidimo da je

$$\dim(L + M_\lambda) = \begin{cases} 3, & \lambda = 1 \\ 4, & \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Konačno je

$$\dim(L \cap M_\lambda) = \dim L + \dim M_\lambda - \dim(L + M_\lambda) = \begin{cases} 2, & \lambda = 1 \\ 1, & \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

- (b) S obzirom da iz (a) dijela vidimo da je $\dim(L + M_1) = 3$, dovoljno je pronaći jedan vektor iz baze za M_1 koji nije u L ; takav je već prvi $(1, 0, 1, 0)$, pa zaključujemo da je jedna baza za $L + M_1$ dana s $\{(1, 2, 0, 1), (-1, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$. Za presjek preostaje prikazati vektore $(3, 2, 1, 0)$ i $(1, 1, 1, 1)$ u toj bazi; imamo

$$\begin{aligned} (3, 2, 1, 0) &= 2 \cdot (1, 2, 0, 1) - 2 \cdot (-1, 1, -1, 1) - (1, 0, 1, 0), \\ (1, 1, 1, 1) &= (-1, 1, -1, 1) + 2 \cdot (1, 0, 1, 0), \end{aligned}$$

pa je jedna baza za $L \cap M_1$ dana s $\{(4, 2, 2, 0), (-1, 1, -1, 1)\}$.

3. (20 bodova)

U ovisnosti o parametrima $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ riješite sustav:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = \mu \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = 9 \end{cases}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} A_p &= \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 & 1 & : & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 2 & : & 6 \\ 1 & 2 & 2 & \lambda & : & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & : & \mu \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 & 1 & : & 6 - \mu \\ 0 & 2 & 0 & \lambda - 1 & : & 9 - \mu \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & : & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 & : & 4 - \mu \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 3 & : & 5 - \mu \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uočimo da je determinanta matrice sustava jednaka $(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Dakle, ta matrica je regularna za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, pa u tom slučaju imamo jedinstveno rješenje, za svaki $\mu \in \mathbb{R}$. To rješenje pročitamo supstitucijom unazad:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{5 - \mu}{\lambda - 3} \\ x_3 &= \frac{4 - \mu}{\lambda - 2} \\ x_2 &= 2 - x_4 = \frac{2\lambda + \mu - 11}{\lambda - 3} \\ x_1 &= \mu - 2x_3 - x_4 = \mu - \frac{8 - 2\mu}{\lambda - 2} - \frac{5 - \mu}{\lambda - 3} \end{aligned}$$

Ostaju nam još slučajevi kada je $\lambda = 2$ i $\lambda = 3$.

- $\lambda = 2$

$$A_p \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & : & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 4 - \mu \\ 0 & 0 & 0 & -1 & : & 5 - \mu \end{bmatrix}$$

Ako je $\mu \neq 4$, vidimo da je $r(A) = 3$, a $r(A_p) = 4$, pa sustav nema rješenje. Za $\mu = 4$ imamo

$$A_p \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & : & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenja ovog sustava su oblika $(5 - 2t, 3, t, -1)$, $t \in \mathbb{R}$.

- $\lambda = 3$

$$A_p \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & : & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 4 - \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 5 - \mu \end{bmatrix}$$

Ako je $\mu \neq 5$, vidimo da je $r(A) = 3$, a $r(A_p) = 4$, pa sustav nema rješenje.
Za $\mu = 5$ imamo

$$A_p \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Rješenja ovog sustava su oblika $(7 - t, 2 - t, -1, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. (20 bodova) Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Odredite A^{-1} .
- (b) Neka je matrica B nastala iz matrice A primjenom sljedećih elementarnih transformacija koje su provedene sljedećim redoslijedom: zamjena prvog i drugog stupca, dodavanje trećeg stupca drugom stupcu, množenje četvrtog retka s -2 . Može li se matrica B^{-1} dobiti iz A^{-1} primjenom elementarnih transformacija? Ako da, navedite te elementarne transformacije i redoslijed kojim se primjenjuju.

Rješenje:

- (a) Standardnim algoritmom (najbrži put je: treći redak oduzmemo prvom, zatim drugi oduzmemo trećem i konačno prvi oduzmemo drugom) se dobije

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Navedenu matricu B možemo zapisati kao

$$B = F_4^{-2} A F_{12} F_{32}^1,$$

Stoga je $B^{-1} = F_{32}^{-1} F_{12} A^{-1} F_4^{-\frac{1}{2}}$, pa vidimo da se B^{-1} može iz A^{-1} dobiti vršeći redom sljedeće elementarne transformacije:

- i. Zamijenimo prvi i drugi redak
- ii. Drugi redak oduzmemo trećem
- iii. Četvrti stupac pomnožimo s $-\frac{1}{2}$.

5. a) (10 bodova) Neka je $\mathcal{S} \leq M_2$ potprostor simetričnih matrica, te $K, L, R \in \mathcal{S}$ takve da vrijedi

$$K + L + R = I,$$

gdje je I jedinična matrica. Ako je to jedini mogući prikaz od I kao linearne kombinacije matrica K, L i R , je li skup $\{K, L, R\}$ baza za $\mathcal{S}$? Obrazložite.

- b) (10 bodova) Neka je $C \in M_3$. Pokažite da je skup

$$M = \{X \in M_3 \mid CX = 0\}$$

vektorski prostor. Dodatno, ako C ima stupce S_1, S_2 i S_3 , pri čemu su S_1 i S_2 linearno nezavisni, a $S_3 = -S_1 - S_2$, odredite dimenziju od M i jednu njegovu bazu.

Rješenje:

- a) Pretpostavimo da matrice K, L i R nisu linearno nezavisne. Tada postoje skalari α_1, α_2 i α_3 , te $i \in \{1, 2, 3\}$, takvi da je $\alpha_i \neq 0$ i

$$\alpha_1 K + \alpha_2 L + \alpha_3 R = 0.$$

Zbrajanjem sa jednadžbom $K + L + R = I$, imamo

$$(1 + \alpha_1)K + (1 + \alpha_2)L + (1 + \alpha_3)R = I,$$

pri čemu $(1 + \alpha_i) \neq 1$. To je kontradikcija s jedinstvenim prikazom matrice I . Dakle skup $\{K, L, R\}$ je linearno nezavisan, a kako je sadržan u prostoru dimenzije 3, onda je i baza.

- b) Uočimo: M je sadržan u vektorskom prostoru M_3 . Neka su α, β skalari i $X, Y \in M$, tada je

$$C(\alpha X + \beta Y) = \alpha CX + \beta CY = 0.$$

Dakle M je vektorski prostor.

Za $X = [x_{ij}] \in M_3$, te $r \in \{1, 2, 3\}$, r -ti stupac matrice CX je

$$S_1 x_{1r} + S_2 x_{2r} + S_3 x_{3r} = S_1(x_{1r} - x_{3r}) + S_2(x_{2r} - x_{3r})$$

i on je nulstupac ako i samo ako je $x_{1r} = x_{2r} = x_{3r}$. Dakle $CX = 0$ ako i samo ako je X oblika

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{bmatrix} = x_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + x_{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kako je linearna nezavisnost očita, skup

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

je baza za M , koji onda ima dimenziju 3.