# Gödelovi teoremi nepotpunosti

*Mladen Vuković,*[*] *Zagreb*

*Bog postoji jer je matematika konzistentna, a đavo postoji jer to ne možemo dokazati.*
*André Weil (1906. – 1998.), francuski matematičar*

Ove godine navršava se 70 godina od otkrića Gödelovih teorema nepotpunosti. To su izuzetno značajni teoremi za matematičku logiku, odnosno matematiku. Do tada nezamislivi zaključci i potpuno novi tip dokaza izazvali su izuzetno veliku pažnju znanstvene javnosti i stvorili Gödelu reputaciju vodećeg mislioca u tom području. Gödelu je tada bilo 25 godina.

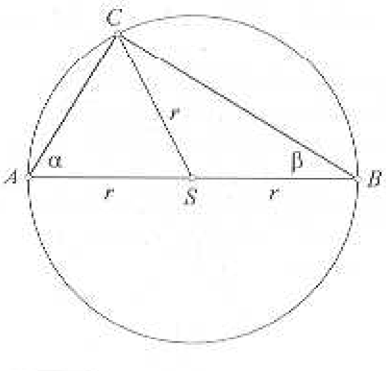
## Uvod

U ovom članku željeli bismo na jednostavan način iskazati Gödelove teoreme nepotpunosti, a zatim istaknuti njihovu važnost i posljedice. Gödelovi radovi pripadaju dijelu matematike koji se naziva matematička logika. Nemamo namjeru (a nemamo ni dovoljno prostora) pokušati odgovoriti na pitanje što je (sve) matematička logika, i čime se sve bavi. Navest ćemo neke momente iz njezinog razvoja koji su prethodili Gödelovim teoremima, kako bi čitatelj lakše shvatio povijesni okvir. Većina pojmova u članku neće biti strogo definirana, ali ćemo ih pokušati barem intuitivno objasniti.

U MFL-u broj 202 iz prošle godine na strani 91 citirana je sljedeća misao velikog francuskog matematičara Blaisea Pascala (1623. – 1662.):

*Sve treba dokazati, a kod dokaza ne možemo upotrijebiti ništa osim aksioma i dokazanih teorema.*

Što uopće znači dokazati neku tvrdnju u matematici? Promotrimo jedan elementaran primjer iz geometrije. Talesov teorem glasi: *svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.* Dokažimo istinitost te tvrdnje. Neka je zadana neka kružnica $k$ sa središtem u točki $S$ i radijusom $r$. Neka su $A$ i $B$ točke na kružnici tako da je dužina $\overline{AB}$ njezin promjer. Neka je, zatim, $C$ proizvoljna točka na kružnici različita od $A$ i $B$. Talesov teorem tada tvrdi da je $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$.




[*] Autor dr. Mladen Vuković radi na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, a bavi se matematičkom logikom; e-mail: vukovic@math.hr

Označimo $|\sphericalangle SAC| = \alpha$ i $|\sphericalangle SBC| = \beta$. Trokut $ASC$ je jednakokračan, jer je $|SA| = |SC| = r$. Iz toga slijedi $|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle SCA| = \alpha$. Analogno slijedi $|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB| = \beta$. Pošto je zbroj unutarnjih kutova u svakom trokutu jednak $180^\circ$ tada posebno za trokut $ABC$ slijedi $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$. Iz posljednje jednakosti slijedi $\alpha + \beta = 90^\circ$, a onda i $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$.

U prethodnom dokazu koristili smo neke druge tvrdnje za koje pretpostavljamo da su prije dokazane (o kutovima u jednakokračnom trokutu, sumi kutova u trokutu,...). Te "druge" tvrdnje su dokazane opet iz nekih "drugih" tvrdnji.... Gdje je početak? Na početku su *aksiomi*, odnosno istinite tvrdnje koje ne dokazujemo. Matematičari su se dogovorili da te polazne tvrdnje prilikom izgradnje geometrije smatraju istinitim. Prvi sustav aksioma za elementarnu geometriju predložio je grčki matematičar Euklid (oko 300. god. pr. Kr.).

U udžbenicima za osmi razred osnovne škole obično se nalazi dokaz da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj i dokaz Pitagorinog poučka. Broj dokaza u srednjoškolskim udžbenicima ovisi o usmjerenjima kojima su udžbenici namijenjeni. Pregledavajući neke zadnje brojeve MFL-a naišli smo na dokaze u sljedećim člancima: *Zanimljiva svojstva i primjene kongruencija* (MFL 202), *Još jedan dokaz poučka o kosinusima* (MFL 202), *Trigonometrijski dokaz Heronove formule* (MFL 202), *O udaljenostima nekih značajnih točaka trokuta* (MFL 201), *Još jedan dokaz Pitagorinog poučka* (MFL 200), *Dva dokaza jedne nejednakosti* (MFL 200), *Jedan način dokazivanja raznih klasičnih nejednakosti* (MFL 198).

Matematika je deduktivna znanost. To znači da u dokazima matematičkih tvrdnji koristimo samo aksiome i već dokazane tvrdnje (prisjetite se Pascalove izreke). Za razliku od, na primjer, fizike i kemije koje su prije svega eksperimentalne znanosti, tj. svoje istine zasnivaju na opažanjima i pokusima. U ovom članku nas najviše zanima aritmetika. *Aritmetika* je primjer jedne aksiomatske matematičke teorije. Navedimo njene aksiome. No, prije svega istaknimo kojim simbolima zapisujemo aritmetičke tvrdnje, tj. definirajmo *alfabet* aritmetike. To je skup

$$\{(, ), \neg, \rightarrow, \forall, =, 0, ', +, \cdot\} \cup \{x_k : k \in \mathbf{N}\}.$$

Navedimo samo da je aritmetička interpretacija simbola $'$ funkcija sljedbenika, tj. funkcija $s : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ definirana sa $s(n) = n + 1$. (S $\mathbf{N}$ označavamo skup svih prirodnih brojeva, tj. skup $\{0, 1, 2, \ldots\}$.) Aksiomi aritmetike su sljedeći:

a) $\forall x_1(x_1' \neq 0)$.
Ovim aksiomom iskazujemo da ne postoji prirodan broj čiji je sljedbenik nula;

b) $\forall x_1 \forall x_2(x_1' = x_2' \rightarrow x_1 = x_2)$,
tj. ako dva broja imaju iste sljedbenike tada su oni jednaki;

c) $\forall x_1(x_1 + 0 = x_1)$,
tj. suma svakog prirodnog broja $x_1$ i nule je jednaka $x_1$;

d) $\forall x_1 \forall x_2(x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)')$,
odnosno suma broja $x_1$ i sljedbenika broja $x_2$ je jednaka sljedbeniku broja $x_1 + x_2$;

e) $\forall x_1(x_1 \cdot 0 = 0)$.
Ovim aksiomom iskazujemo da je produkt proizvoljnog prirodnog broja s nulom jednak nuli;

f) $\forall x_1 \forall x_2(x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1)$,
tj. produkt broja $x_1$ i sljedbenika broja $x_2$ je jednak $x_1 \cdot x_2 + x_1$;

g)
$$(F(0) \wedge \forall x_1(F(x_1) \rightarrow F(x_1'))) \rightarrow \forall x_1 F(x_1),$$
gdje je $F$ bilo koja aritmetička tvrdnja. Ovaj aksiom se naziva *shema aksioma matematičke indukcije*. Ova shema iskazuje da ako nula ima neko svojstvo $F$, te

ako iz pretpostavke da neki prirodan broj $x_1$ ima svojstvo $F$ slijedi da i sljedbenik broja $x_1$ ima svojstvo $F$, tada svi prirodni brojevi imaju svojstvo $F$.

Ovi aksiomi se nazivaju *Peanovi aksiomi* po talijanskom matematičaru Giuseppeu Peano (1858. – 1932.). Matematička teorija u kojoj za dokazivanje aritmetičkih tvrdnji koristimo samo Peanove aksiome naziva se *Peanova aritmetika*. Prirodno se postavlja pitanje možemo li sve aritmetičke istine dokazati. Odnosno, možemo li u Peanovoj aritmetici dokazati svaku istinitu aritmetičku tvrdnju. Odgovor na ovo pitanje daje prvi Gödelov teorem nepotpunosti.

Kurt Gödel rođen je 28. 04. 1906. u Brünnu koji je bio središte tadašnje austro-ugarske pokrajine Moravske (to je današnje Brno u Češkoj Republici). Studirao je matematiku na Bečkom sveučilištu, a 1930. je obranio doktorsku disertaciju i postao profesorom na istom sveučilištu. U disertaciji je dokazao značajan teorem o potpunosti logike prvog reda. Sljedeće godine, tj. 1931., objavio je članak o nepotpunosti aritmetike, gdje su dokazana dva teorema koji se obično nazivaju Gödelov prvi i drugi teorem nepotpunosti. Nakon što je nacistička Njemačka pripojila Austriju Gödel je 1938. godine emigrirao u SAD. Sve do svoje smrti 14. 01. 1978. godine radio je u Princetonu u Institutu za napredni studij. Često se družio s Albertom Einsteinom. Povezivala ih je izuzetno naglašena zajednička osobina da direktno i potpuno predano ulaze u samu srž stvari koje razmatraju. Kao osobe bili su u svakom pogledu različiti. Za razliku od Einsteina koji je bio društven i pun smijeha, Gödel je bio ekstremno dostojanstven (gotovo ukočen), vrlo ozbiljan i prilično usamljen.

Na drugom svjetskom matematičkom kongresu 1900. godine u Parizu veliki njemački matematičar David Hilbert (1862. – 1943.) istaknuo je 23 problema iz raznih područja matematike, čije je rješavanje pridonijelo velikom razvoju matematike u XX. stoljeću. Neki od tih problema pripadaju matematičkoj logici. Drugi Hilbertov problem jednostavno glasi ovako: *Dokazati konzistentnost aritmetike.* (Aritmetika je *konzistentna* ako u njoj nije moguće istovremeno dokazati neku tvrdnju i negaciju te tvrdnje.) Nakon otkrivenih paradoksa u teoriji skupova pitanje konzistentnosti neke teorije postalo je jako značajno. Hilbert je formulirao svoj poseban program o proučavanju temelja matematike. Želio je da se točno odrede dijelovi matematike u kojima se svi dokazi mogu izvršiti na formalan (i konačan) način, odnosno da se naglase dijelovi gdje su mogući problemi. Svrha velikog i ambicioznog Hilbertovog programa bila je postaviti aksiomatske osnove na kojima bi se moglo temeljiti svako istraživanje u matematici.

Odgovor na Hilbertov problem o konzistentnosti aritmetike, te nemogućnost ostvarenja Hilbertovog programa, slijedi iz drugog Gödelovog teorema nepotpunosti.

## Iskazi Gödelovih teorema nepotpunosti

Dva su Gödelova teorema nepotpunosti: prvi i drugi. Sada ćemo ih iskazati.

PRVI GÖDELOV TEOREM NEPOTPUNOSTI
*Ako pretpostavimo da je Peanova aritmetika konzistentna tada je ona nepotpuna, tj. postoji aritmetička tvrdnja tako da niti ona ni njena negacija nisu dokazive u Peanovoj aritmetici.*

Aritmetička tvrdnja, čija egzistencija se tvrdi u prethodnom teoremu, naziva se *Gödelova rečenica.*

Istaknimo odmah neposrednu posljedicu Gödelovog prvog teorema. Primijetimo, ako neka aritmetička tvrdnja nije istinita, tada je nužno istinita negacija te tvrdnje. To znači da za svaku aritmetičku tvrdnju vrijedi da je ona istinita ili je njena negacija istinita. Posebno to vrijedi za Gödelovu rečenicu. Time smo dobili sljedeći rezultat:

*U Peanovoj aritmetici nije moguće dokazati svaku istinitu aritmetičku tvrdnju.*

U prvi tren mogli bismo reći da to samo znači da smo loše odabrali aksiome o prirodnim brojevima. No, iz dokaza Gödelovog teorema može se vidjeti da teorem vrijedi za proširenja Peanove aritmetike. Znači, ako bismo dodali neke nove aksiome opet je moguće konstruirati aritmetičku tvrdnju tako da niti ona, a ni njena negacija nisu dokazive.

DRUGI GÖDELOV TEOREM NEPOTPUNOSTI
*U Peanovoj aritmetici nije moguće dokazati njenu konzistentnost.*

Direktna posljedica drugog teorema je neostvarivost Hilbertovog programa. Vjerojatno nitko tko se bavi aritmetikom ne sumnja u njezinu konzistentnost. (Pogledajte ponovo Weilovu izreku s početka ovog članka!) Važno je spomenuti da je njemački matematičar Gerhard Gentzen (1909. – 1945.) dokazao konzistentnost Peanove aritmetike, ali sredstvima koja imaju veću dokaznu moć od Peanove aritmetike.

## Neki istaknuti dijelovi Gödelovog dokaza

U dokazu prvog teorema konstruirana je Gödelova rečenica. Gödelova konstrukcija je duga i vrlo složena. Čak i u današnjim udžbenicima matematičke logike poglavlje o Gödelovim teoremima je među posljednjima ili ga uopće nema. Postoji mnogo tekstova i knjiga o Gödelovim teoremima. Američki matematičar Raymond Smullyan je autor nekoliko vrlo popularnih knjiga o toj temi. Njegov pristup je vrlo neobičan, ali za čitatelja svakako zabavan i zanimljiv. Uz pomno odabrane logičke zadatke Smullyan vodi čitaoca kroz zamršen Gödelov dokaz. Spomenimo neke od naslova Smullyanovih knjiga: *What is the name of this book?*, *The Lady or the Tiger*, *Alice in Puzzle-Land*, *Forever undecided*,.... Većina tih knjiga je objavljena u Republici Sloveniji (naravno, na slovenskom jeziku).

Koliko su važni sami Gödelovi teoremi, usuđujemo se reći da su za razvoj matematičke logike jednako važne i ideje i metode koje je Gödel koristio prilikom dokaza svojih teorema nepotpunosti. Ovdje ćemo posebno istaknuti ideju aritmetizacije i rekurzivne funkcije.

### Aritmetizacija

Može se reći da značaj aritmetizacije u matematičkoj logici odgovara značaju otkrića analitičke geometrije, odnosno Descartesovom preslikavanju geometrije u algebru. Sjetimo se npr. kako u analitičkoj geometriji provjeravamo paralelnost pravaca.

Jednostavno provjerimo imaju li jednake koeficijente smjera. Želimo naglasiti da ne moramo crtati pravce u koordinatnom sustavu i uvjeriti se jesu li paralelni. Slično je postupio Gödel s aritmetičkim tvrdnjama.

Opisat ćemo kratko ideju aritmetizacije. Već smo bili naveli da je alfabet aritmetike skup $\{(,\ ),\ \neg,\ \rightarrow,\ \forall,\ =,\ 0,\ ',\ +,\ \cdot\} \cup \{x_k : k \in \mathbf{N}\}$. S $g$ označavamo funkciju koju prvu definiramo za svaki simbol alfabeta aritmetike na sljedeći način:

$g(() = 2,\quad g()) = 3,\qquad$ (funkcija $g$ lijevoj zagradi pridružuje broj 2, a desnoj 3)

$$g(\neg) = 5,\quad g(\rightarrow) = 7,\quad g(\forall) = 11,\quad g(=) = 13,$$

$$g(0) = 17,\quad g(') = 19,\quad g(+) = 23,\ g(\cdot) = 29,$$

$$g(x_k) = 31 + k,\ \text{za } k \in \mathbf{N}.$$

Sada se funkcija $g$ proširuje na skup svih aritmetičkih tvrdnji i skup svih dokaza u Peanovoj aritmetici. Ako je $e_0 e_1 \ldots e_r$ neki izraz u Peanovoj aritmetici (aritmetička tvrdnja ili dokaz) tada njemu pridružujemo Gödelov broj

$$2^{g(e_0)} \cdot \ldots \cdot p_r^{g(e_r)},$$

gdje je $p_i$ $i$–ti po redu prosti broj. Tako npr. aksiomu $\forall x_1(x_1 + 0 = x_1)$ funkcija $g$ pridružuje prirodni broj

$$2^{g(\forall)} \cdot 3^{g(x_1)} \cdot 5^{g(()} \cdot 7^{g(x_1)} \cdot 11^{g(+)} \cdot 13^{g(0)} \cdot 17^{g(=)} \cdot 19^{g(x_1)} \cdot 23^{g())},$$

tj. broj $2^{11} \cdot 3^{32} \cdot 5^2 \cdot 7^{32} \cdot 11^{23} \cdot 13^{17} \cdot 17^{13} \cdot 19^{32} \cdot 23^3$. Uočite da je tako definirana funkcija $g$ injekcija.

Primjenom te ideje Gödel je izvršio prevođenje mnogih problema Peanove aritmetike na probleme s prirodnim brojevima. Gödelu u čast aritmetizacija se naziva i *gedelizacija*.

## Rekurzivne funkcije

Već u osnovnoj školi uče se razni postupci, kao što su npr. dijeljenje prirodnih brojeva, zbrajanje razlomaka, konstrukcija simetrale dužine, i slično. Zajedničko svim tim postupcima je da se sastoje od konačno mnogo vrlo jednostavnih i jasnih koraka. Takvi postupci se jednim imenom nazivaju *algoritmi*. Naziv algoritam dolazi od latiniziranog imena arapskog matematičara Al-Khwarizmija koji je u IX. stoljeću dao pravila kako se izvršavaju četiri računske operacije u decimalnom sustavu.

Ovdje ne možemo opisati svu problematiku vezanu uz algoritme, i dati strogu definiciju. (O paralelnim algoritmima možete čitati u seriji članaka Sanje i Saše Singer u MFL-u od broja 194.) Istaknut ćemo samo jedan mali dio vezan uz Gödelov dokaz teorema nepotpunosti.

Promotrimo sada funkcije čija je domena i kodomena skup $\mathbf{N}$. Postavlja se pitanje koja je od tih funkcija $f$ *izračunljiva*, tj. za koju postoji algoritam tako da za svaki $n \in \mathbf{N}$ možemo odrediti, odnosno izračunati $f(n)$. Jednostavni primjeri izračunljivih funkcija su npr. $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x^2$ i $f_3(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$. No, nije za sve funkcije jednostavno odgovoriti jesu li izračunljive. To ilustriramo sljedećim primjerom. Promotrimo funkciju $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, koja je definirana po slučajevima na ovaj način:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{ako postoji } n \text{ uzastopnih petica u decimalnom zapisu } \sqrt{2}; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(Sjetite se da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj, te nije periodički decimalni broj.) Kako bismo mogli odgovoriti je li dana funkcija $f$ izračunljiva treba prvo strogo definirati taj pojam.

Jedna stroga definicija izračunljivih funkcija dana je pomoću *rekurzivnih funkcija*. Veliki dio Gödelovog dokaza sastoji se od vrlo detaljnog dokaza rekurzivnosti nekoliko desetaka funkcija. (Neki će čak zbog toga reći da je Gödel bio vrhunski kompjutorski programer!)

### Umjesto zaključka

Možemo se zapitati koju istinitu tvrdnju o prirodnim brojevima izražava Gödelova rečenica, tj. koje svojstvo prirodnih brojeva ne možemo dokazati pomoću Peanove aritmetike. Gödelova rečenica doslovno izgleda: *Ova rečenica nije dokaziva u Peanovoj aritmetici*. Netko bi mogao reći da tu tvrdnju o prirodnim brojevima možemo smatrati potpuno nezanimljivom za matematiku, te reći da nas nije briga što takvu aritmetičku istinu ne možemo formalno dokazati. Nažalost to nije rješenje. Otkrivene su i "zanimljive" aritmetičke istine koje nije moguće formalno dokazati. Jedna od prvih otkrivenih aritmetičkih istina s tim svojstvom je dana u teoremu Parisa i Kirbya (teorem govori o borbi Herkula i hidre!). Nakon toga otkriveni su mnogi istiniti kombinatorni principi koji nisu dokazivi u Peanovoj aritmetici.

Nakon pojave računala, odnosno razvoja umjetne inteligencije, mogle su se u raznim časopisima pročitati optimistične izjave i sljedećeg oblika: *Računalo će moći stvoriti glazbeno djelo izvanredne umjetničke vrijednosti*, ili *Računalo će postati prvakom svijeta u šahu*, ili pak *Računalo će otkriti i dokazati značajan matematički teorem*. Ništa od toga se nije dogodilo, a vjerojatno se ni neće uskoro sve to ostvariti. No, neki iz Gödelovih teorema iščitavaju i više, tj. da strojevi nikad neće doseći ljudsku inteligenciju. O toj tvrdnji se može spekulirati na dugačko i na široko, ali to svakako ne slijedi iz Gödelovih teorema. Iako Gödelovi teoremi na prvi pogled otvaraju (nekima!) mračne perspektive njihov značaj je ogroman za razvoj matematičke logike.

### Literatura


[1] E. Nagel, J. R. Newman, *Gödelov dokaz*, Kruzak, Zagreb, 2001.

[2] R. M. Smullyan, *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, New York, 1992.

[3] Z. Šikić, *Život i djelo Kurta Gödela*, Matematika, 1987, no. 1.

[4] Z. Šikić, *Gödelovi teoremi*, Rugjer, 1996, no. 5.


## Što je zapravo, "očito"?


*Willie Yong,*[1] *Singapore, Jim Boyd,*[2] *Virginia, SAD*


Postoji priča o G. H. Hardyju iz koje se vidi kako su matematičari uvijek u poteškoćama kada treba objasniti smisao i nijanse riječi "očito". Prema toj priči, Hardy je jednom držao predavanje: "Očito je da ...", i tada bi stao. Svakako se neizmjerno jako koncentrirao. Auditorij je bio potpuno miran. Nakon pauze od nekoliko minuta Hardy je nastavio: "Očito je da ...", i nastavio svoje predavanje.

---

[1] Willie Yong, SCT Publishing, Singapore, je jedan od urednika matematičkog časopisa Mathematics and Informatics Quarterly.

[2] Jim Boyd, St Chripstopher's School, Virginia, SAD, je jedan od glavnih urednika tog časopisa.