Matematička indukcija i Goodsteinov teorem

MLADEN VUKOVIĆ, Zagreb

U četvrtom razredu gimnazije uči se matematička indukcija. Cilj ovoga članka jest kratko ponoviti tu metodu te navesti u kojem se smjeru ona može poopćiti. Možda će najzanimljiviji dio članka biti Goodsteinov teorem čija je izreka pomalo nevjerojatna.

Uvod

Nepotpuna je indukcija način zaključivanja kojim se iz činjenice da nešto vrijedi u određenom broju slučajeva zaključuje da to vrijedi i u svim ostalim slučajevima. Npr., iz činjenice da je određeni broj vrana koje smo do sada susreli crnog perja, zaključujemo da su sve vrane crne.

Nepotpuna indukcija može biti vrlo korisna i u matematici, npr. kada želimo **naslutiti** vrijedi li neko svojstvo za sve prirodne brojeve. No, moramo biti vrlo oprezni da samo iz nepotpune indukcije brzopleto ne zaključimo da neko svojstvo vrijedi za sve prirodne brojeve.

Npr., prva su tri neparna broja veća od jedan (3, 5 i 7) prosti. Naravno da nitko (osim eksperimentalnoga fizičara iz jednog vica!) neće reći da iz toga slijedi da su svi neparni brojevi prosti.

Vjerojatno biste se duže zamislili kada bi vas pitali što mislite o tvrdnji da je za svaki prirodan broj x vrijednost polinoma $f(x) = x^2 - x + 41$ prost broj. Ako redom uvrštavate $x = 1,\ 2,\ 3, 4$ i 5 dobit ćete da je $f(x)$ prost broj. Štoviše, za sve prirodne brojeve x za koje vrijedi $x \leq 40$ vrijednost polinoma f je prost broj. No, $f(41)$ je složen broj.

Za nepotpunu je indukciju još zanimljiviji i ilustrativniji sljedeći primjer. Neka je $f(x) = 991x^2 + 1$. Za puno prirodnih brojeva vrijednost polinoma f nije potpun kvadrat. No, to ipak ne znači da možemo tvrditi da $f(x)$ za sve prirodne brojeve nije potpun kvadrat. Najmanji prirodan broj x za koji je $991x^3 + 1$ potpun kvadrat je

$$x = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767.$$

U članku Ž. Hanjša (vidi [5]) dano je nekoliko ilustrativnih primjera nepotpune indukcije.

Dakle, iako korisna, nepotpuna indukcija nije matematički ispravna metoda dokazivanja. Takva ispravna metoda jest matematička indukcija koju opisuju aksiomi matematičke indukcije.

Aksiom matematičke indukcije

Jasno je da u izgradnji bilo koje teorije treba odnekud početi, da neke činjenice treba uzeti kao osnovne istine. Takve se činjenice zovu aksiomi. Aksiomi su očite tvrdnje koje su u skladu s iskustvom i koje ne dokazujemo. Nas ovdje zanima aksiom matematičke indukcije:

Neka je S podskup od N koji ima sljedeća dva svojstva:

a) $1 \in S$,

b) za sve $n \in N$ koji imaju svojstvo da je $n \in S$ vrijedi i $n + 1 \in S$,

tada je $S = N$.

Prvi uvjet (a) nazivamo *baza indukcije*, a drugi uvjet (b) nazivamo *korak indukcije*.

Zgodno objašnjenje aksioma matematičke indukcije može se dati pomoću pločica domina. Zamislite da imamo puno pločica domina. Poslagali smo ih jednu do druge kao na ovom shematiziranom crtežu:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |...

Ima ih tako puno da im ne vidite kraja. Što biste zahtijevali kao jamstvo da će sve biti srušene? Svakako biste tražili da se sruši prva (baza indukcije!). Zatim, biste tražili da rušenje bilo koje (n-te) pločice domina uzrokuje rušenje sljedeće ((n + 1)-prve) pločice (korak indukcije). Za to bi bilo dovoljno da je razmak između postavljenih pločica dovoljno mali. Nadam se da se slažete da će tada sve pločice biti srušene.

Lijepa analiza sadržajne komponente aksioma matematičke indukcije dana je u knjizi V. Devidéa (vidi [3]).

U većini udžbenika koji razmatraju matematičku indukciju kao prvi se primjer navodi sljedeća tvrdnja:

Za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Kako to dokazati? Provjerimo vrijedi li tvrdnja za $n = 3$. Lijeva strana jednakosti je $1 + 2 + 3$, tj. jednaka je 6. Desna strana jednakosti je jednaka $\frac{3(3+1)}{2}$, tj. također 6. To znači da tvrdnja vrijedi za $n = 3$.

Lako bi danu tvrdnju mogli provjeriti za $n = 4$ ili $n = 9$. Mogli bismo napraviti računalni program koji bi danu jednakost ispitao za puno prirodnih brojeva (ali samo konačno mnogo njih!). Bismo li nakon svega toga mogli reći da dana jednakost vrijedi za sve prirodne brojeve? Naravno da ne bismo.

Za dokaz ove tvrdnje koristimo se aksiomom matematičke indukcije. To znači da prvo moramo provjeriti danu jednakost za $n = 1$. To je lako. Lijeva strana jednakosti tada je jednaka 1, a desna $\frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, tj. također 1. Sada provjeravamo vrijedi li korak indukcije. U tu svrhu pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za *neki* prirodan broj n, tj. neka je

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prethodnu pretpostavku nazivamo *pretpostavka indukcije*. Sada moramo provjeriti da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Laganim računom, primjenom pretpostavke indukcije, dobivamo:

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2},$$

što je upravo tražena jednakost za $n + 1$.

Na kraju zaključimo: primjenom aksioma matematičke indukcije slijedi da dana jednakost za sumu prvih n prirodnih brojeva vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Tvrdnje raznih vrsta mogu se dokazati primjenom aksioma matematičke indukcije. To su razne jednakosti i nejednakosti, tvrdnje o djeljivosti, tvrdnje iz geometrije, Newtonova binomna formula, Moivreove formule za kompleksne brojeve, problem Hanojskih kula i drugo. Zadatke koji se rješavaju primjenom aksioma matematičke indukcije možete naći u [1] i [5].

Goodsteinov teorem

Engleski matematičar R. L. Goodstein je 1944. godine dokazao teorem čiji je iskaz na prvi pogled (a možda i drugi) nevjerojatan. Taj je teorem zanimljiv jer iskazuje jedno svojstvo prirodnih brojeva, a za njegov se dokaz moraju koristiti beskonačni redni brojevi.

Kako bismo izrekli Goodsteinov teorem, tj. definirati Goodsteinov niz, prvo definiramo što znači prikaz prirodnoga broja u *superbazi*.

Pokažimo to, bez stroge definicije, na primjeru broja 27. Broj 27 može se prikazati u bazi 2 na sljedeći način $27 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$. Prikažimo sada i eksponente u bazi 2. Tada dobivamo: $27 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^1 + 2^0$. U ovom drugom slučaju kažemo da je broj 27 u superbazi 2.

Pogledajmo kako to izgleda za broj 521. Prikažimo ga prvo u superbazi 2 :

$$521 = 2^9 + 2^3 + 2^0 = 2^{2^3+1} + 2^{2+1} + 2^0 = 2^{2^{2+1}+1} + 2^{2+1} + 2^0.$$

Prikažimo sada broj 521 u superbazi 3 :

$$521 = 2 \cdot 3^5 + 3^3 + 2 \cdot 3 + 2 = 2 \cdot 3^{3+2} + 3^3 + 2 \cdot 3 + 2.$$

Pojam *Goodsteinovoga niza* definiramo prvo na primjeru broja 8. Prvi član Goodsteinovoga niza broja 8, jest on sam, tj. $g_1 = 8$. Kako bismo dobili drugi član niza, prikažimo prvo broj 8 u superbazi 2, tj. $8 = 2^{2+1}$. Umjesto svih dvojka u prikazu 2^{2+1} napišemo trojke: 3^{3+1}. Zatim od tako dobivenog broja oduzmemo 1. Time smo dobili drugi član Goodsteinovoga niza, tj. $g_2 = 80$. Prikažimo sada broj 80 u superbazi 3, zatim zamijenimo sve trojke četvorkama te oduzmimo jedan. Dobili smo $g_3 = 553$. Nadamo se da je jasan daljnji postupak konstrukcije Goodsteinovoga niza.

Evo još nekoliko sljedećih članova Goodsteinovoga niza broja 8.

superbaza 2	$g_1 = 8 = 2^{2+1}$
$2 \longmapsto 3$	$3^{3+1} = 81$
-1	$g_2 = 80$
superbaza 3	$80 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$
$3 \longmapsto 4$	$2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 2 = 554$
-1	$g_3 = 553$
superbaza 4	$553 = 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1$
$4 \longmapsto 5$	$2 \cdot 5^5 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 6\,311$
-1	$g_4 = 6\,310$
superbaza 5	$6\,310 = 2 \cdot 5^5 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5$
$5 \longmapsto 6$	$2 \cdot 6^6 + 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 = 93\,396$
-1	$g_5 = 93\,395$
superbaza 6	$93\,395 = 2 \cdot 6^6 + 2 \cdot 6^2 + 6 + 5$

$$\vdots$$

$$g_6 = 1\,647\,195$$
$$g_7 = 33\,554\,571$$
$$g_8 = 774\,841\,151$$
$$g_9 = 20\,000\,000\,211$$
$$g_{10} = 570\,623\,341\,475$$
$$\vdots$$

Sada navodimo nekoliko prvih članova Goodsteinovoga niza broja 25.

$$
\begin{aligned}
g_1 = 25 &= 2^{2^2} + 2^{2+1} + 1 \\
& 3^{3^3} + 3^{3+1} + 1 \\
g_2 &= 3^{3^3} + 3^{3+1} \approx 10^{13} \\
& 4^{4^4} + 4^{4+1} \\
g_3 &= 4^{4^4} + 3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 \approx 10^{81} \\
& 5^{5^5} + 3 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 3 \\
g_4 &= 5^{5^5} + 3 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 \approx 10^{2\,216}
\end{aligned}
$$

Evo točnoga četvrtoga člana, g_4, Goodsteinovoga niza broja 25 :

191101259794547752035640455970396459919808104899009433713951278924652053
024261580301205938651973985026558644015579446223535921278867380697228841
014691598660208796189675719570183928166033804761122597553362610100148265
112341314776825241149309444717696528275628519673751439535754247909321920
664188301178716912255242107005070906467438287085144995025658619446154318
351137984913369177992812743384043154923685552678359637410210533154603135
372532574863690915977869032826645918298381523028693657287369142264813129
174376213632573032164528297948686257624536221801767322494056764281936007
872071383707235530544635615394640118534849379271951459450550823274922160
584891291094518995994868619954314766693801303717616359259447974616422005
088507946980448713320513316073913423054019887257003832980124605019701346
739717590902738949392381731578699684589979478106804282243609378394633526
542281570430283244238551508231649096728571217170812323279048181726832751
011274678231741098588868370852200071173349225391332230075614718042900752
767779335230620061828601245525424306100689480544658470482065098266431936
096038873625851074707434063628697657670269925864995355797631817390255089
133122329474393034395616132833407283166349825814522686200430779908468810
380418736832480090387359621291963360258312078167367374253332287929690720
549059562140688882599124458184237959786347648431567376092362509037151179
894142426227022006628648686786871018298087280256069310194928083082504419
842479679205890881711232719230145558291674679519743054802640464685400273
399386079859446596150175258696581144756851004156868773090371248253534383
928539759874945849705003822501248928400182659005625128618762993804440734
014234706205578530532503491818958970719930566218851296318750174353596028
220103821161604854512103931331225633226076643623668829685020883949614283
048473911399166962264994856368523471287329479668088450940589395110465094
413790950227654565313301867063352132302846051943438139981056140065259530
073179077271106578349417464268472095613464732774858423827489966875505250
439421823219135722305406671537337424854364566378204570165459321815405354
839361425066449858540330746646854189014813434771465031503795417577862281
1776585876941680908212967

Najvjerojatnije ste zaključili da Goodsteinovi nizovi brojeva 8 i 25 teže prema beskonačnosti. No, prevarili ste se. R. L. Goodstein je dokazao sljedeći teorem.

Teorem.

Svaki Goodsteinov niz završava nulom.

Kako je to moguće? U prvi tren se čini nevjerojatnim. U istinitost Goodsteinovoga teorema pokušat ćemo vas uvjeriti navodeći dva primjera. Prvo navodimo Goodsteinov niz broja 3.

superbaza 2	$g_1 = 3 = 2+1$
$2 \mapsto 3$	$3+1 = 4$
	4
-1	$g_2 = 3$
superbaza 3	3
$3 \mapsto 4$	4
-1	$g_3 = 3$
superbaza 4	3
$4 \mapsto 5$	3
-1	$g_4 = 2$
superbaza 5	2
$5 \mapsto 6$	2
-1	$g_5 = 1$
superbaza 6	1
$6 \mapsto 7$	1
-1	$g_6 = 0$

Uočite da je u jednom koraku član Goodsteinovoga niza manji od superbaze (u ovom slučaju to je g_3). Nakon toga članovi Goodsteinovoga niza strogo padaju pa, budući da se radi o prirodnim brojevima, niz mora završiti nulom. Za neke prirodne brojeve član Goodsteinovoga niza koji je manji od superbaze u tom koraku može biti vrlo velik. To ćemo ilustrirati procjenom duljine Goodsteinovoga niza za broj 4.

$$g_1 = 4 = 2^2$$

$$2 \mapsto 3 \qquad\qquad 3^3$$

$$-1 \qquad g_2 = 2 \cdot 3^2 + \mathbf{2} \cdot 3 + 2$$

U prikazu broja g_2 istaknut je broj **2**. To je koeficijent uz superbazu. Primijetimo da trebamo tri puta oduzeti jedinicu kako bismo taj koeficijent smanjili za jedan. Reći ćemo da moramo napraviti tri nova koraka. To znači da će nakon tri koraka superbaza biti 6 te ćemo imati sljedeći peti član Goodsteinovoga niza broja 4 :

$$g_5 = 2 \cdot 6^2 + \mathbf{1} \cdot 6 + 5$$

Sada smo istaknuli koeficijent **1**. Očito nam treba još šest novih koraka (odnosno oduzimanja jednice) kako bismo taj koeficijent sveli na nulu. Tada dobivamo jedanaesti član niza $(2+3+6=11)$ koji je zapisan u superbazi 12 $(3+3+6=12)$.

$$g_{11} = \mathbf{2} \cdot 12^2 + 11$$

U jedanaestom članu niza istaknuli smo koeficijent **2**. Očito treba 12 novih koraka kako bismo taj koeficijent smanjili za jedan. Time dobivamo g_{23} koji je u superbazi 24 jednak:

$$g_{23} = 24^2 + \mathbf{23} \cdot 24 + 23$$

Nakon 24 nova koraka dobivamo g_{47} zapisan u superbazi 48. Uočite da se članovi niza povećavaju, ali se koeficijenti smanjuju.

$$g_{47} = 48^2 + 22 \cdot 48 + 47$$

Kod člana g_{47} "kvadratni dio" ima koeficijent jedan. Sada bismo promatrali koliko nam koraka treba da koeficijent 22 smanjimo za jedan (treba nam 48 novih koraka!). Tada bismo s 96 novih koraka taj koeficijent smanjili na 20 i tako dalje.

Nakon $n = 1 + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 48 + \ldots + 3 \cdot 2^{3+23} = 3 \cdot 2^{27} - 2$ koraka dobivamo broj

$$(\boldsymbol{n} + \mathbf{1}) \cdot (n+2) + (n+1)$$

zapisan u superbazi $n+2$. Uočite da taj član niza više nema kvadriranu superbazu.

Nakon $m = 1 + 3 + 6 + \ldots + 3 \cdot 2^{26} + 3 \cdot 2^{27} + \ldots + 3 \cdot 2^{26+(n+1)} = 1 + 3 \cdot (2^{26+3 \cdot 2^{27}} - 1)$ koraka dobivamo broj $\boldsymbol{m} + \mathbf{1}$ zapisan u superbazi $m+2$. To znači da svaki sljedeći korak smanjuje članove Goodsteinovoga niza, tj. oni strogo padaju te moraju završiti nulom. Dakle, Goodsteinov niz broja 4 završava nulom nakon $m + (m+1)$ koraka, pri čemu je

$$m + (m+1) = 3 \cdot 2^{402\,653\,211} - 3$$

(broj $2m+1$ ima više od 121 210 700 znamenaka!).

Nadam se da vam je na temelju ovoga primjera za broj četiri jasno da bi Goodsteinov niz svakoga prirodnoga broja završio nulom.

Neke napomene za kraj

Za strogi dokaz Goodsteinovoga teorema koriste se beskonačni redni brojevi i poopćeni oblik matematičke indukcije što svakako prelazi okvire ovoga članka. Ipak, možemo spomenuti ideju dokaza.

Dakle, u dokazu se koristi poopćenje aksioma matematičke indukcije. Može se pokazati da je taj aksiom ekvivalentan sljedećoj tvrdnji: *svaki neprazan podskup od N ima najmanji element.*

Uočite da skupovi cijelih, racionalnih i realnih brojeva nemaju to svojstvo. Još u osnovnoj školi učili ste da svaki prirodan broj može biti promatran s dva aspekta: tako da određuje koliko čega ima, odnosno da određuje redno mjesto. Nas ovdje upravo zanimaju redni brojevi: prvi, drugi, treći ... No, ne zanimaju nas samo konačni redni brojevi, već bismo željeli govoriti i o beskonačnim rednim brojevima.

Što znače redni brojevi? Prvi po redu znači da ispred njega nema ništa. Drugi znači da je ispred njega samo jedan i tako dalje. Iz tog se razloga redni brojevi u teoriji skupova definiraju na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
0. &= \emptyset \\
1. &= \{\emptyset\} \\
2. &= \{0.,\ 1.\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3. &= \{0.,\ 1.,\ 2.\} \\
&\vdots \\
n. &= \{0.,\ 1.,\ \ldots,\ (n-1).\}
\end{aligned}
$$

Neka vas ne zbunjuje početak definicije $0. = \emptyset$ (prazan skup!). Kao što se npr. definira $0! = 1$ tako se i ovdje mora imati početak definicije. Napominjemo da u literaturi nije uobičajno koristiti oznake 0., 1., 2., 3., ..., već se jednostavno piše 0, 1, 2, 3, ...

Gornja definicija rednih brojeva omogućava nam da je jednostavno proširimo na beskonačne skupove. S ω označavamo redni broj koji je definiran s $\omega = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$. Govorimo još da je ω redni broj skupa N.

Ako skupu ω dodamo novi element a te definiramo da za sve $n \in \omega$ vrijedi $n < a$, tada smo dobili skup $\omega \cup \{a\}$ čiji redni broj označavamo s $\omega + 1$. Na sličan se način definiraju redni brojevi $\omega + 2$, $\omega + 100$, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 7$, ω^2, $\omega^4 + \omega \cdot 3 + \omega + 8$, ω^ω, ...

Aksiomon matematičke indukcije iskazana je indukcija do rednoga broja ω. U teoriji je skupova *transfinitna indukcija* (indukcija po svim rednim brojevima) najčešće i najmoćnije sredstvo dokazivanja.

U dokazu Goodsteinova teorema koristi se indukcija do rednoga broja ε_0. To je najmanji redni broj α za koji vrijedi $\omega^\alpha = \alpha$.

Svakom članu Goodsteinovoga niza pridružuje se (beskonačni) redni broj manji od ε_0. Tada se dokaže da pridruženi redni brojevi strogo padaju. Godine 1982. dokazano je da se Goodsteinov teorem ne može dokazati primjenom samo prirodnih brojeva (točnije pomoću Peanovih aksioma).

U članku pod naslovom *Gödelovi teoremi nepotpunosti* u MFL, broj 206, pokušao sam objasniti da postoji istinita tvrdnja o prirodnim brojevima koja se ne može dokazati samo primjenom Peanovih aksioma. To je tzv. Gödelova rečenica. No, Gödelova rečenica je kodirani zapis pomoću prirodnih brojeva tvrdnje „*Ova rečenica nije dokaziva.*" Ako bi netko i mogao reći da nedokazivost Gödelove rečenice i nije neki nedostatak za Peanovu aritmetiku, mislim da to nikako ne može reći za Goodsteinov teorem.

Literatura

[1] M. Cvitković, *Kombinatorika - zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 1994.

[2] B. Dakić, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[3] V. Devidé, *Matematička čitanka*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

[4] J. M. Henle, *An outline of set theory*, Springer, 1986.

[5] B. Pavković i dr., *Male teme iz matematike*, Element, Zagreb, 1994.