Neki osnovni pojmovi teorije skupova

Mladen Vuković, Zagreb

Sažetak

U **sljedećem** broju ovog časopisa moći ćete čitati članak Olivera Deisera pod naslovom *Poznajete li* ω_1*?* Smatram da je navedeni članak vrlo zanimljiv, te pisan na pristupačan način i za one koji se ne bave teorijom skupova. No, u članku ima pojmova koji nisu strogo definirani, odnosno nije navedeno dovoljno primjera kako bi članak bio što bliži širem krugu čitatelja. Namjera je da ovo, na neki način, bude uvod za članak Olivera Deisera.

Uvod i malo povijesti o skupovima

Nije pretjerano reći da čitavu matematiku prožima ideja beskonačnosti. Sjetimo se beskonačnih skupova s kojima ste se već susreli u osnovnoj i srednjoj školi. To su, prije svega, skupovi brojeva: prirodnih, cijelih, racionalnih, iracionalnih, realnih i ompleksnih. Zatim, u geometriji se govori o skupu svih točaka ravnine, skupu svih dužina, skupu svih pravaca, ... Svi ti skupovi su beskonačni.

Jedan moj profesor je u šali rekao da bi matematičari mogli zatvoriti dućan da nema beskonačnosti.

G. Cantor (1845.–1918.) je razvio novu teoriju, koju danas nazivamo *naivna teoriju skupova*, kako bi mogli bolje razumijeti beskonačne skupove. Jedna od osnovnih Cantorovih ideja o jednako velikim skupovima je nevjerojatno jednostavna: za dva skupa A i B kažemo da su *jednako veliki* ili *ekvipotentni* ako postoji bijekcija $f\colon A \to B$. No, moramo imati na umu da ni genijalni grčki matematičari, a ni svi poslije njih sve do Cantora, nisu uočili različito velike beskonačne skupove. Na primjer skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ ima "više" elemenata nego skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, tj. ne postoji bijekcija između $\mathbb{R}$ i $\mathbb{N}$. No, skup $\mathbb{N}$ je jednako velik kao skup svih parnih prirodnih brojeva, te kao skup cijelih, a i skup svih racionalnih brojeva. Za skupove koji su jednako veliki kao i $\mathbb{N}$ kažemo da su *prebrojivi* (ili prebrojivo beskonačni).

Navedena svojstva beskonačnih skupova brojeva ilustrirat ćemo pričom o hotelu s beskonačno mnogo soba (detaljnije o tome možete čitati u knjizi [4]).

Zamislimo da negdje daleko u svemiru postoji hotel s beskonačno mnogo soba. Sobe su numerirane brojevima 1, 2, 3, ... (ima ih prebrojivo mnogo!) Zamislimo da su sve sobe zauzete gostima, i dolazi još jedan putnik koji želi sobu. Što će portir napraviti s njim? Jednostavno, zamolit će gosta iz sobe 1 da se premjesti u sobu 2, gosta iz sobe 2 u sobu 3, itd. Novopridošlog gosta će tada smjestiti u sobu broj 1. (Nemojte si postavljati pitanje koliko će to premještanje trajati!)

Pokušajte sami odgovoriti što će portir napraviti kako bi smjestio 1000 novih gostiju u hotel čije su sve sobe zauzete.

Promotrimo još jedan problem s kojim bi se mogao susresti portir hotela s beskonačno mnogo soba, i čije su sve sobe pune. Zamislimo da u svemiru postoji još jedan hotel s beskonačno mnogo soba čije su sve sobe popunjene gostima. Jednog dana glavna komisija za graditeljstvo u svemirskim prostranstvima otkrila je da ovaj drugi nema građevinsku dozvolu. Istog trena taj drugi hotel je morao biti zatvoren i svi gosti (beskonačno mnogo njih!) stali su pred vrata prvog hotela (čije su sve sobe pune). No, portir se brzo snašao. Gosta iz sobe 1 svojeg hotela premjestio je u sobu 2, gosta iz sobe 2 u sobu 4, gosta iz sobe 3 u sobu 6, itd. (općenito: gost iz $n-$te sobe se premješta u sobu s brojem $2n$).

Tako je ispraznio sve sobe s neparnim brojevima, te je u njih smjestio goste iz zatvorenog hotela.

Sada kada se već tako dobro snalazimo s hotelima s beskonačno mnogo soba promotrimo još jedan problem koji bi portiru mogao zadati mnogo glavobolja. Zamislimo da u svemiru postoji beskonačno mnogo hotela s beskonačno mnogo soba, i sve su sobe popunjene gostima. Glavna komisija za graditeljstvo iz raznih je razloga zatvorila sve hotele osim jednog. Tada su svi gosti (po beskonačno mnogo njih iz svakog od beskonačno mnogo hotela) došli pred vrata tog jednog hotela koji je još imao dozvolu za rad. Snalažljivi portir sada nije znao rješenje ove, na prvi pogled, bezizlazne situacije. Trebao je pomoć matematičara. Može li se uopće ova ogromna grupa novopridošlih gostiju smjestiti u (puni!) hotel? Možete li mu pomoći?

Kao što smo već bili naveli, Cantor je utemeljio novu teoriju. U vrlo kratkom vremenu dobiveno je puno važnih rezultata. Činilo se da je teorija skupova upravo traženi temelj matematike. No, dogodilo se upravo suprotno, tj. ne samo da nova teorija nije mogla biti temelj matematike, već se u okviru nje pojavilo nešto što matematičari nikako nisu mogli dopustiti. U Cantorovoj teoriji skupova otkriveni su *paradoksi*, štoviše čitavo mnoštvo paradoksa. Činilo se da je matematika u velikoj krizi. No, to je bio snažan poticaj za istraživanje osnova matematike. Razvijena je aksiomatska teorija skupova (E. Zermelo 1908. i A. Fraenkel 1922.) koja se obično označava sa ZF. Neki aksiomi teorije ZF su:

- *aksiom ekstenzionalnosti:* ako dva skupa imaju iste elemente tada su oni jednaki, tj. formalno

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y.$$

- *aksiom praznog skupa*: postoji skup koji ne sadrži niti jedan element, odnosno

$$\exists x \forall y(y \notin x).$$

- *aksiom para*: za svaka dva skupa postoji skup čiji su upravo oni jedini elementi, tj. formalno

$$\forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \leftrightarrow (x = u \vee y = u)).$$

Ostale aksiome, kao i detaljne opise i objašnjenja, možete naći u knjizi [1]. U naivnoj teoriji skupova pojam skupa se ne definira već se smatra primarnim pojmom. Intuitivno, skup je kolekcija objekata koji čine neku cjelinu. Za razliku od naivne teorije skupova, u aksiomatskoj teoriji ZF se pojam skupa strogo definira pomoću aksioma.

Sada ćemo definirati pojmove koji se provlače kroz čitav ovaj članak.

Neka su A i I skupovi. S $\mathcal{P}(A)$ označavamo *partitivni skup* skupa A, odnosno skup svih podskupova skupa A. Svaku funkciju $f\colon I \to \mathcal{P}(A)$ nazivamo *familija skupova*. Za skup I kažemo da je *skup indeksa*. Za svaki $i \in I$ umjesto $f(i)$ obično pišemo A_i. Iz tog razloga se familija skupova obično označava s $\{A_i : i \in I\}$.

Neka je A neki skup, te $\{A_i : i \in I\}$ neka familija podskupova od A (tj. za svaki $i \in I$ vrijedi $A_i \subseteq A$). Kažemo da je $\{A_i : i \in I\}$ *particija skupa* A ako vrijedi:

a) za svaki $i \in I$ je $A_i \neq \emptyset$;

b) za sve $i, j \in I$, takve da je $i \neq j$, vrijedi $A_i \cap A_j = \emptyset$;

c) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Uređeni skupovi

Osim proučavanja jednako velikih skupova, Cantor je promatrao i skupove u kojima su definirani odnosi među elementima, odnosno definirana je neka binarna relacija. Nisu ga zanimale općenite relacije, već tzv. relacije uređaja. One su poopćenje uređaja kakvi su dani na skupovima brojeva.

Neka je S neki skup, te R neka binarna relacija na S (odnosno $R \subseteq S \times S$). Često se umjesto $(x, y) \in R$ piše i xRy. Ponovimo nazive nekih relacija s posebnim svojstvima. Za relaciju R kažemo da je:

- *refleksivna* ako za sve $x \in A$ vrijedi xRx;
- *irefleksivna* ako niti za jedan $x \in A$ ne vrijedi xRx;
- *simetrična* ako za sve $x, y \in A$ činjenica xRy povlači yRx;
- *antisimetrična* ako za sve $x, y \in A$ činjenice xRy i yRx povlače $x = y$;
- *tranzitivna* ako za sve $x, y \in A$ činjenice xRy i yRz povlače xRz;
- *relacija ekvivalencije* ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Relacije ekvivalencije su posebno važne, jer svaka od njih definira jednu particiju skupa. Točnije:

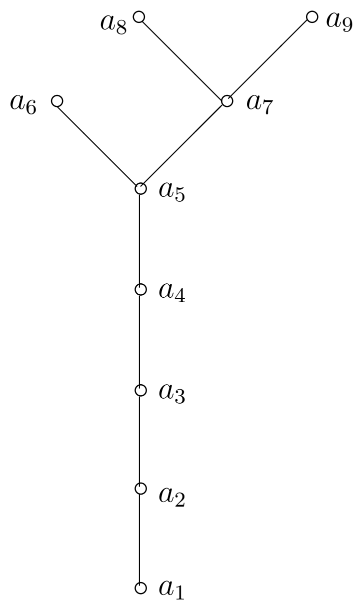
> Neka je R relacija ekvivalencije na skupu A. Za svaki element $x \in A$ označimo $[x] = \{y \in A : (x, y) \in R\}$, te takve $[x] \subseteq A$ nazivamo *klase ekvivalencije* obzirom na relaciju R. Za sve $x, y \in A$ vrijedi $[x] = [y]$ ili $[x] \cap [y] = \emptyset$. To znači da je $\{[x] : x \in A\}$ jedna particija skupa A.

Za binarnu relaciju R kažemo da je *relacija parcijalnog uređaja* ako je R irefleksivna i tranzitivna. Obično relaciju parcijalnog uređaja označavamo s $<$. S $\leq$ označavamo binarnu relaciju na A koja je definirana s:

$$x \leq y \qquad \text{ako i samo ako} \qquad x < y \text{ ili } x = y.$$

Parcijalno uređen skup je uređen par $(A, <)$. Ponekad se parcijalno uređen skup $(A, <)$ kratko označava samo s A. (Uočite da po našoj definiciji $(A, \leq)$ nije parcijalno uređen skup , jer relacija $\leq$ nije irefleksivna. No, ne dajte se zbuniti ako negdje drugdje pročitate da to jeste parcijalno uređen skup, jer se u literaturi taj pojam definira i drugačije.)

Skupovi $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ su parcijalno uređeni. Naravno, na skupovima brojeva možemo definirati i druge relacije uređaja. Parcijalno uređene skupove ponekad je zgodno zadavati slikom. Na primjer, neka je zadan skup $B = \{a_1, \ldots, a_9\}$. Sljedećom slikom definiramo jednu relaciju uređaja na skupu B. Važno je naglasiti da smatramo da je uređaj zadan "od dolje prema gore". To na primjer znači da je $a_1 < a_2$. Zatim, na slici nisu istaknute veze koje slijede zbog tranzitivnosti (npr. smatramo da vrijedi $a_2 < a_5$).



Slika 1.

Ako su dana dva parcijalno uređena skupa, $(A, <)$ i $(B, \prec)$, tada na Kartezijevom produktu $A \times B$ definiramo binarnu relaciju R na sljedeći način:

$$(x_1, x_2) R (y_1, y_2) \qquad \text{ako i samo ako} \qquad \begin{cases} x_1 < y_1 \\ \quad \text{ili} \\ x_1 = y_1 \ \text{ i } \ x_2 \prec y_2 \end{cases}$$

Lako je provjeriti da je R parcijalni uređaj na $A \times B$. Taj uređaj se naziva *leksikografski uređaj* (sjetite se na koji način tražite pojmove u leksikonu).

Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Kažemo da je $(A, <)$ *totalno uređen* ako su svaka dva elementa skupa A usporediva, tj. za sve $x, y \in A$ vrijedi

$$x < y \qquad \text{ili} \qquad x = y \qquad \text{ili} \qquad y < x.$$

Skupovi $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbf{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ su totalno uređeni. No, skup $(B, <)$ za koji je uređaj zadan slikom 1 nije totalno uređen (npr. elementi a_6 i a_9 nisu usporedivi).

Neka je $(A, <)$ proizvoljan parcijalno uređen skup. Svaki totalno uređen podskup B skupa A nazivamo *lanac*. Za $B \subseteq A$ kažemo da je *početni komad* skupa A ako za sve $b \in B$ i $a \in A$ iz činjenice $a < b$ slijedi $a \in B$. Npr. $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ je jedan početni komad skupa $(\mathbb{N}, <)$ a interval $< -\infty, 33 >$ je jedan početni komad skupa $(\mathbb{R}, <)$.

Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Za element $x \in A$ kažemo da je:

a) *maksimalan* ako ne postoji $y \in A$ tako da vrijedi $x < y$;

b) *minimalan* ako ne postoji $y \in A$ tako da vrijedi $y < x$;

c) *najveći* ako za sve $y \in A$ vrijedi $y \leq x$;

d) *najmanji* ako za sve $y \in A$ vrijedi $x \leq y$.

Važno je naglasiti da je najmanji element ujedno i minimalni, dok općenito ne mora vrijediti obratno. Analogno, najveći element je ujedno i maksimalni element, ali ne mora vrijedit obratno. To vidimo na primjeru koji je dan slikom 1. Elementi a_6, a_8 i a_9 su maksimalni, ali niti jedan od njih nije najveći element parcijalno uređenog skupa $(B, <)$. No, u totalno uređenom skupu minimalni element je ujedno i najmanji, odnosno maksimalni element je ujedno i najveći.

Neka je B podskup parcijalno uređenog skupa $(A, <)$. Za element x od A kažemo da je:

a) *gornja međa* skupa B ako za sve $y \in B$ vrijedi $y \leq x$;

b) *donja međa* skupa B ako za sve $y \in B$ vrijedi $x \leq y$;

c) *supremum* skupa B ako je x najmanja gornja međa skupa B;

d) *infimum* skupa B ako je x najveća donja međa skupa B.

Za totalno uređen skup $(A, <)$ kažemo da je *dobro uređen* ako svaki njegov neprazni podskup ima najmanji element. Skup $(\mathbb{N}, <)$ je dobro uređen skup, ali $(\mathbf{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ nisu.

Najvažnije funkcije među parcijalno uređenim skupovima su uređajni izomorfizmi. Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ neki parcijalno uređeni skupovi. Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je *uređajni izomorfizam* ako je bijekcija, te za sve $x, y \in A$ vrijedi

$$x < y \qquad \text{ako i samo ako} \qquad f(x) \prec f(y).$$

Tada kažemo da su parcijalno uređeni skupovi A i B uređajno izomorfni, te to označavamo s $A \simeq B$.

Primijetite da vrijedi $\mathbb{N} \not\simeq \mathbf{Z}$ i $\mathbb{N} \not\simeq \mathbb{Q}$. (Može li se na skupu $\mathbf{Z}$ definirati neka uređajna relacija $\prec$ tako da vrijedi $(\mathbb{N}, <) \simeq (\mathbf{Z}, \prec)$? Za nalaženje odgovora na ovo pitanje može vam pomoći priča s početka članka o hotelima s beskonačno mnogo soba!)

Aksiom izbora

Već smo bili naveli da je sa ZF označena jedna aksiomatska teorija skupova. Toj teoriji obično se dodaje još jedan aksiom, tzv. *aksiom izbora*, koji ćemo sada navesti.

Aksiom izbora (eng. axiom of choice; kratko: AC)
Neka je $\{A_i : i \in I\}$ proizvoljna neprazna familija nepraznih skupova koji su u parovima disjunktni. Tada postoji skup B tako da je $B \cap B_i$ jednočlan skup za sve $i \in I$.

Teorija ZF zajedno s aksiomom izbora obično se označava sa ZFC. Važnost aksioma izbora je velika, jer se primjenjuje na mnogim mjestima u matematici. Zapravo, primjenjuju se razne tvrdnje koje su ekvivalentne s AC. Navest ćemo neke najpoznatije.

Zornova lema
Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup čiji svaki lanac ima gornju među. Tada skup A sadrži barem jedan maksimalni element.

Hausdorffov princip maksimalnosti
Svaki lanac parcijalno uređenog skupa je sadržan u nekom maksimalnom lancu.

Zermelov teorem
Svaki skup se može dobro urediti.

No, neke posljedice AC su u najmanju ruku vrlo čudne. Najpoznatija jedna takva posljedica je Banach-Tarskijev teorem koji sada navodimo.

Teorem (Banach-Tarski, 1924.)
Neka je k ma kako mala, a K ma kako velika kugla. Tada postoje particije

$$k = k_1 \cup \ldots \cup k_n \quad \text{i} \quad K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$$

tako da je k_i kongruentno K_i (tj. postoji bijekcija koja čuva udaljenost) za sve $i = 1, \ldots, n$.

U popularnim prikazama često se Banach-Tarskijev teorem ilustrira na sljedeći način: svaku jabuku možemo razrezati u konačno mnogo komada tako da se posebnim sastavljanjem mogu dobiti dvije jabuke koje su obje jednake početnoj. To je vrlo ilustrativno, ali baš i nije sasvim točno.

Kraj

Sada moramo stati. Sigurno vam je već dosta pojmova, odnosno definicija. U članku Olivera Deisera naići ćete na još barem desetak pojmova koje niste čuli tijekom školovanja u osnovnoj i srednjoj školi, te nisu definirani i objašnjeni u Deiserovom, a ni u ovom članku. To su sljedeći pojmovi: Borelov skup, Borelova σ-algebra, Borelova determiniranost, projektivni skupovi, nedostiživi kardinalni brojevi, aksiom o velikim kardinalnim brojevima, Woodinovi kardinalni brojevi, superkompaktni kardinalni brojevi, unutarnji modeli, forcing, Lebesgueova izmjerivost, σ-aditivne mjere, ... Za definiciju i objašnjenje tih pojmova trebalo bi više prostora, tj. teško je o njima pisati a da se nema već dosta veliko predznanje o teoriji skupova. No, neka vas to ne obeshrabri, već bude poticaj da posegnete za nekom knjigom iz teorije skupova. U popisu literature sam naveo knjige P. Papića i Dj. Kurepe. One su dobre za "prve korake" u teoriji skupova. Nažalost drugih knjiga iz teorije skupova nemamo na hrvatskom jeziku, a one na stranim jezicima nisam stavljao u popis literature, jer ih možete naći u Deiserovom članku. Također se u tom članku spominju i Gödelovi teoremi nepotpunosti. Oni nisu isključivo vezani uz teoriju skupova, već pripadaju matematičkoj logici. Osnovne informacije o tim teoremima možete naći u [5].

Literatura

[1] J.-L. Krivine, *Aksiomatička teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

[2] Dj. Kurepa, *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

[3] P. Papić, *Uvod u teoriju skupova*, HMD, Zagreb, 2000.

[4] N. J. Vilenkin, *Priče o skupovima*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

[5] M. Vuković, *Gödelovi teoremi nepotpunosti*, MFL 206, Zagreb, 2002.