U potrazi za skupovima[1]

Milana Vuković, Mladen Vuković

Kao što se iz naslova članka može zaključiti, imamo namjeru govoriti o skupovima u nastavi matematike u Republici Hrvatskoj. Naslov članka bi možda mogao upućivati da ćemo ovdje govoriti o svom nezadovoljstvu što skupova nema daleko više u nastavi. To nam nije cilj, a uostalom niti ne mislimo da teorija skupova treba biti daleko više zastupljena u srednjoškolskoj, odnosno osnovnoškolskoj nastavi matematike.

Ovim člankom želimo podijeliti neka naša iskustva o znanju o skupovima studenata prvih godina raznih studija. Namjera nam je istaknuti neka naša iskustva s ispita (raznih kolegija i diplomskih) gdje smo prvo bili začuđeni da studenti neke stvari ne znaju. Onda smo shvatili da ih se neke osnovne stvari o skupovima zapravo nigdje ne uči. Nadamo se da će vas ovaj članak potaknuti da sa skupovima postupate pažljivije nego što je to propisao nastavni program.

Sada ćemo ukratko opisati sadržaj članka. Prvo ćemo navesti primjere zadataka sa skupovima koji su se posljednjih godina pojavili na prijemnim ispitima na PMF–Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu. Zatim ćemo navesti gdje se u nastavnim programima iz matematike spominju skupovi. Nakon toga ćemo vas izvijestiti o rezultatima potrage za skupovima po stručnoj literaturi na hrvatskom jeziku iz matematike (udžbenici, časopisi, zbornici radova, bilteni za nastavnike mentore,...) Navest ćemo neke činjenice iz teorije skupova za koje smatramo da bi ih nastavnici trebali znati, iako to nigdje ne predaju (jednakost skupova $\{1, 2, 3\}$ i $\{2, 3, 1, 1, 2\}$; jednakost razlomaka $1/3$ i $2/6$; prebrojivi i neprebrojivi skupovi). Na kraju ćemo posebno istaknuti važnost pažljivog uvođenja pojma funkcije. Nadamo se da će se tom pojmu posvetiti dovoljno velika pažnja u novom kurikulumu nastave matematike, odnosno novim nastavnim programima, jer je funkcija osnovni pojam svake visokoškolske nastave matematike. Krenimo redom. Na prijemnom ispitu na PMF–Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu posljednjih godina pojavili su se sljedeći zadaci sa skupovima:

(2008) *Neka su* A *i* B *podskupovi od* $\mathbb{N}$ *takvi da je* $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $(A \cup B) \setminus A = \{4, 5\}$ *i* $\{6, 7\} \subseteq A \cup B$. *Tada je*:

<u>A</u>. $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **B**. $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **C**. $B = \{6, 7\}$

D. $B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ **E**. $B = \{1, 2, 3\}$

Ovaj zadatak je 59 pristupnika točno riješilo, što je približno samo oko 22%. Zatim, 48 pristupnika je krivo riješilo zadatak, a čak 165 pristupnika nije ponudilo nikakvo rješenje.

[1]Predavanje istog naslova Mladen Vuković održao je 04. 02. 2009. u okviru Stručno–metodičkih večeri na PMF–MO u Zagrebu.

(2007) *Ako su A i B skupovi za koje vrijedi $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A$, onda nužno vrijedi*

A. $A \cap B = \emptyset$ **B**. $B = \emptyset$ **C**. $A \subseteq B$ **<u>D</u>**. $B \subseteq A$ **E**. $A = \emptyset$

Ovaj zadatak je 52 pristupnika točno riješilo, što je približno 17%. Trideset pristupnika je krivo riješilo zadatak, a 226(!) pristupnika nije ponudilo nikakvo rješenje.

Samo ćemo još spomenuti da je ove godine na srpanjskom roku bio sljedeći zadatak s funkcijama:

(2009) *Za realni broj a definiramo preslikavanje $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $f_a(x) = x + a$, $g_a(x) = ax$. Koliko ima brojeva a za koje vrijedi da je $f_a \circ g_a = g_a \circ f_a$?*

Kako objasniti ovakvu malu rješivost jednostavnih zadataka sa skupovima na prijemnim ispitima? Jednostavno: zadaci takvog tipa nisu se nigdje radili u dosadašnjem školovanju (možda malo u prirodoslovno–matematičkim gimnazijama). Uostalom, taj očiti odgovor ćemo i potkrijepiti navođenjem rezultata potrage za skupovima u nastavnim programima i udžbenicima.

Sada redom navodimo rezultate naše potrage za skupovima u nastavnim programima i udžbenicima matematike. Prvo ćemo to učiniti za osnovnu školu. U prvom razredu osnovne škole imamo sljedeći naslov nastavne cjeline: "Oduzimati i uspoređivati u skupu brojeva do 10." U drugom razredu osnovne škole pronašli smo sljedeći naslov: "Ovladati tablicom množenja u skupu brojeva do 100." U četvrtom razredu osnovne škole naša potraga je dala sljedeći rezultat: "Pisano zbrajanje i oduzimanje u skupu brojeva do milijun." U udžbenicima petog razreda naslovi poglavlja su "Skup prirodnih brojeva" i "Skup točaka u ravnini", ali onda u tim poglavljima, kao i u spominjanim naslovima cjelina nižih razreda, uopće se ne spominje riječ skup! Doduše u nekim udžbenicima spominju se skupovi parnih i neparnih prirodnih brojeva, te pojam podskupa. U sedmom razredu osnovne škole pronašli smo naslov: "Prikazivanje i analiza podataka ... obilježje skupa objekata." U osmom razredu osnovne škole su sljedeći naslovi: "Skup realnih brojeva" i "Odrediti odnose između skupova $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$."

Našu potragu za skupovima u nastavnim programima i udžbenicima matematike osnovne škole možemo zaključiti ovako:

Riječ "skup" se koristi samo kao ime (skupovi brojeva; grupe objekata u statistici). Uvede se oznaka $\in$ i spomene se pojam podskupa.[2]

Smatramo da je to sasvim zadovoljavajuće za osnovnu školu.

[2] U jednom našem udžbeniku matematike za peti razred osnovne škole iz 1990. godine u prvom poglavlju pod naslovom *Skupovi*, na tridesetak strana (!) izloženo je sljedeće o skupovima: primjeri skupova, označavanje i zadavanje skupa, element skupa, podskup, jednakost skupova, presjek skupova, unija skupova, komplement skupa, konačni skupovi. Naravno, taj udžbenik je pisan po nastavnom programu prije "rasterećenja".

Sada navodimo rezultate naše potrage za skupovima u nastavnim programima i udžbenicima matematike za srednju školu. U nastavnom programu za gimnazije za prvi razred naišli smo na sljedeće naslove: "Skup racionalnih brojeva", "Skup realnih brojeva" i "Uređaj na skupu realnih brojeva". U drugom razredu je sljedeći naslov: "Skup kompleksnih brojeva". U udžbenicima za drugi razred se prilikom pisanja rješenja kvadratne nejednadžbe spomenu skupovne operacije: unija, presjek, razlika, te pojam praznog skupa. U četvrtom razredu pronašli smo sljedeće naslove: "Skupovi brojeva" i "Pojam funkcije". U nekim udžbenicima za četvrti razred postoji na početku kratak uvod o skupovima. Rezimirajmo rezultate naše potrage za skupovima u nastavnim programima i udžbenicima matematike za gimnazije:

> *Prilikom rješavanja nejednadžbi uvedu se osnovne skupovne operacije (presjek, unija, razlika) te se definira pojam funkcije. Spomene se i pojam prebrojivosti.*

Po našem mišljenju to nije nikako dovoljno. Trebalo bi posvetiti više pažnje uvođenju skupovnih operacija. Važno je još naglasiti da se nigdje ne vježba dokazivanje skupovnih identiteta (npr. de Morganova pravila, distributivnost...). S druge strane na PMF–Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu je dokazivanje skupovnih identiteta za većinu studenata prvi susret s dokazima.

Prije nego što izložimo još neke rezulate naše potrage za skupovima po stručnoj literaturi na hrvatskom jeziku dajemo jedan primjer rješavanja sistema nejednadžbi. Zapravo, cilj nam je naglasiti kako odgovoriti na često učeničko pitanje prilikom rješavanja nejednadžbi: *"Što sada moram napraviti? Uniju ili presjek?"* U tu svrhu ponovimo prvo definiciju presjeka i unije:

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \ \mathbf{i} \ \ x \in B\}; \qquad A \cup B = \{x : x \in A \ \ \mathbf{ili} \ \ x \in B\}$$

Namjerno smo istaknuli veznik "i", odnosno "ili", jer ćemo upravo naglašavanjem upotrebe tih veznika, te onda zamjenom "i" s presjekom, odnosno "ili" s unijom, riješiti sistem nejednažbi u sljedećom primjeru. Naravno, ne mislimo da se učenicima treba upravo na taj koncizan način s upotrebom logičkih ekvivalencija prikazati to rješenje. Mi smo ga ovdje na taj način napisali iz jednostavnog razloga da bi rješenje zauzimalo manje prostora.

Primjer. Riješite sistem nejednadžbi

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{x+2} < 0 \\[2ex] \dfrac{|x|+2}{x-3} \leq 0 \end{cases}$$

Rješenje.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \dfrac{x-4}{x+2} < 0 & & \mathbf{i} & & \dfrac{|x|+2}{x-3} \leq 0 & \\
 & \Updownarrow & & & & \Updownarrow & \\
x-4>0 & & x-4<0 & & |x|+2 \geq 0 & & |x|+2 \leq 0 \\
\mathbf{i} & \mathbf{ili} & \mathbf{i} & & \mathbf{i} & \mathbf{ili} & \mathbf{i} \\
x+2<0 & & x+2>0 & & x-3<0 & & x-3>0 \\
 & \Updownarrow & & & & \Updownarrow & \\
x \in \langle 4, +\infty \rangle & & x \in \langle -\infty, 4 \rangle & & x \in \mathbb{R} & & \emptyset \\
\mathbf{i} & \mathbf{ili} & \mathbf{i} & & \mathbf{i} & \mathbf{ili} & \mathbf{i} \\
x \in \langle -\infty, -2 \rangle & & x \in \langle -2, +\infty \rangle & & x \in \langle -\infty, 3 \rangle & & x \in \langle 3, +\infty \rangle \\
 & \Updownarrow & & & & \Updownarrow & \\
\emptyset & \mathbf{ili} & x \in \langle -2, 4 \rangle & & x \in \langle -\infty, 3 \rangle & \mathbf{ili} & \emptyset \\
 & \Updownarrow & & & & \Updownarrow & \\
 & x \in \langle -2, 4 \rangle & & & & x \in \langle -\infty, 3 \rangle &
\end{array}
$$

Rješenje zadatka je presjek intervala: $\langle -2, 4 \rangle$ i $\langle -\infty, 3 \rangle$, tj. $\langle -2, 3 \rangle$.

Pregledali smo i gotovo sve brojeve stručno–metodičkih časopisa: *Matematika, Poučak, Matematika i škola, Matka, Matematičko–fizički list, Playmath i math.e.* Naslove članaka koji se bave skupovima naveli smo u popisu literature. Posebno bismo željeli istaknuti članke [6] i [12]. Citirat ćemo neke dijelove članka V. G. Kirina iz 1977. godine jer su po našem mišljenju na zgodan način opisani tadašnji problemi s uvođenjem skupova u nastavni program, a s druge strane želimo istaknuti da je profesor Kirin još te davne 1977. godine predvidio što će se dogoditi sa skupovima u nastavi matematike. Sada navodimo neke dijelove članka [6].

"*Ovog puta jedan bauk kruži cijelim svijetom. To je bauk skupova. Naime, skupovi su ušli u osnovne škole, a sa školskom djecom i u naše domove. Tko bi se nadao da će zajedno sa skupovima ući i u poneku familiju čak i svađe? A zbog čega? Roditelji ne umiju riješiti svom djetetu domaći zadatak iz teorije skupova.*"

"*... dilema nije da li skupove uvoditi u osnovne škole ili ne, već da li ih uvoditi ovako kako se to danas čini ili ne.*"

"*Tek kad se stigne do sistematskog izbrojavanja svega i svačega, tad bi po mom* *sudu trebalo po prvi put uzgred spomenuti skupove i elemente, ali ne odgovarati na pitanja iz razreda, što skupovi jesu. To će se vidjeti iz konteksta.* "

"*Uopće se treba kloniti stupidnih skupova koliko god se oni dopadali i učiteljima i djeci zbog svoje lakoće.*"

"*Posljednji prigovor uopće nije tipičan za matematiku, ali se ogleda u njoj kao i u ostalim nastavnim predmetima. Ogleda se naš popustljiv stav prema gomilanju činjeničnog materijala u udžbenicima. Taj je materijal ušao u njih iz opširnih programa. Vidimo da su školske knjige sve deblje i sve skuplje i da ih je sve više. Ako taj materijal bude i nadalje tako vrtoglavo rastao, izvjestan njegov dio neminovno će se morati proglasiti suvišnim i bezvrijednim. Bolje će biti da to učine sami matematičari nego netko sa strane.*"

Pregledali smo i sve *Zbornike radova sa susreta i kongresa nastavnika matematike* u Zagrebu i Istri, te *Biltene za nastavnike mentore natjecatelja*. Niti u jednom broju tih materijala nismo naišli na neki članak posvećen skupovima. Zatim, među zadacima iz matematike s nacionalnih ispita, te zadacima s natjecanja u Republici Hrvatskoj (na svim razinama i razredima) nema zadataka sa skupovima. U maturalnim zadaćima iz matematike i godišnjim ispitima iz matematike koji su provedeni u zagrebačkim gimnazijama, i dostupni su u stručnim časopisima, također nema posebnih zadataka sa skupovima. U prijemnim ispitima Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu zadnjih dvadesetak godina nije se pojavio neki zadatak sa skupovima, ali ima zadataka s funkcijama.

Sada nam je cilj navesti neke činjenice iz teorije skupova koje nisu direktno vezane s nastavom matematike u osnovnoj ili srednjoj školi, ali smatramo da bi ih nastavnici matematike trebali znati. Gotovo sigurno nastavnik neće biti u prilici predavati neke od sljedećih dijelova teorije skupova, ali postoji mogućnost da će nekom izvrsnom učeniku nešto od toga trebati objasniti. Nadamo se da će im onda ovaj materijal biti od pomoći. Materiju ćemo izložiti kao odgovore na moguća učenička pitanja. Prvo postavljamo pitanja vezana uz jednakost skupova.

Vrijedi li $\{1,\ 2,\ 3\} = \{3,\ 2,\ 1\}$, *te vrijedi li* $\{1,\ 2,\ 3\} = \{1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3\}$ *?*

Prvim pitanjem želimo naglasiti pitanje o jednakosti skupova koji imaju iste elemente, ali nisu navedeni u istom poretku. U drugom pitanju želimo naglasiti što se događa sa skupovima koji imaju više "kopija" nekih svojih elemenata. Odgovor na oba pitanja je potvrdan, a odgovor direktno slijedi iz jednog aksioma teorije skupova koji se naziva aksiom ekstenzionalnosti. On jednostavno govori da ako skupovi imaju iste elemente tada su oni jednaki, tj. formalno zapisano aksiom ekstenzionalnosti glasi:

$$\forall x \forall y \Big(\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \ \Rightarrow \ x = y \Big)$$

O ostalim aksiomima teorije skupova (točnije: Zermelo–Fraenkelove teorije skupova) možete čitati primjerice u [19] ili [21].

Drugo pitanje koje postavljamo vezano je uz uvođenje skupova brojeva. Pitamo *zašto vrijedi 1/2 = 3/6.* Naravno, "školski" odgovor je da jednostavno razlomak 3/6 pokratimo s 2. No, mi zapravo pitamo zašto je to tako definirano. Kako bismo na to odgovorili moramo prvo nešto reći o definiciji skupova brojeva. Prirodni brojevi se definiraju u teoriji skupova. O tome kako se to točno radi ne možemo ovdje govoriti jer zahtijeva malo više prostora. Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se definira relacija $\sim$ ovako:

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \;\Leftrightarrow\; m_1 + n_2 = n_1 + m_2$$

Lako je provjeriti da je to relacija ekvivalencije. Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ definiramo kao skup svih klasa ekvivalencije relacije $\sim$.

Na skupu $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definiramo binarnu relaciju $\simeq$ sa:

$$(p_1, q_1) \simeq (p_2, q_2) \;\Leftrightarrow\; p_1 \cdot q_2 = q_1 \cdot p_2$$

Lako je provjeriti da je to relacija ekvivalencije. Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ definiramo kao skup svih klasa ekvivalencije relacije $\simeq$. Tada je po dogovoru p/q oznaka klase ekvivalencije uređenog para (p, q). Jednakost $1/2 = 3/6$ zapravo znači da mora vrijediti $(1, 2) \simeq (3, 6)$.

Ovim pitanjem, odnosno njegovim odgovorom, nije nam bio primarni cilj podsjetiti na pojam relacije ekvivalencije. Željeli smo zapravo naglasiti zašto se često teorija skupova naziva osnova matematike. U teoriji skupova mogu se definirati skupovi brojeva (prirodni, cijeli, racionalni, realni i kompleksni). U teoriji skupova mogu se dokazati dobro poznata svojstva skupova brojeva (npr. komutativnost i asocijativnost zbrajanja, aksiom matematičke indukcije, ...). Nakon što se u teoriji skupova definiraju skupovi brojeva, tada možemo reći da je velik dio današnje matematike zapravo smješten u teoriju skupova.

Treće naše "učeničko" pitanje je vrlo kratko: *Što je skup?* Spomenimo da tim pitanjem obično počinju predavanja kolegija *Teorija skupova* na trećoj godini preddiplomskog studija matematike na PMF–Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu. Kao odgovor nekom učeniku na to pitanje navest ćemo dio članka [12] od Z. Šikića.

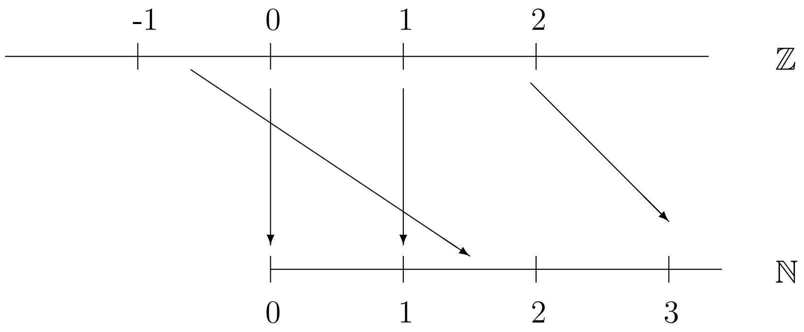
"*Prije nego odgovorimo na pitanje iz naslova Što su skupovi u školi?, zapitajmo se općenito: što su skupovi? Na takvo općenito i teško pitanje nije moguće odgovoriti jednostavnom formulom: Skupovi su to i to! Usporedimo naše pitanje sa sličnim jednako općenitim i teškim pitanjima: Što su brojevi? Što je materija? Primijetimo prije svega da se tokom osam godina učenja aritmetike u osnovnoj školi, a ni tokom četiri godine učenja aritmetike u srednjoj školi, uopće ne susrećemo s pitanjem "što su brojevi?", pogotovo pak s pokušajem odgovora na nj, pa nam to ipak ne smeta da učeći aritmetiku štošta naučimo o brojevima.*

Slično je sa skupovima. Odgovor na pitanje: "Što su skupovi?" nije drugo do matematička znanost poznata pod imenom teorija skupova. Što je aritmetika za brojeve i fizika za materiju, to je teorija skupova za skupove. Težak odgovor na teško pitanje."

Dakle, u nastavi matematike ne treba se uopće truditi kako bi se pokušao objasniti pojam skupa. Naročito nikako ne navoditi rečenicu: *Skup je pojam koji se ne definira.*

Četvrta, i posljednja, naša grupa pitanja je vezana uz jedno od osnovnih pitanja na ispitu iz kolegija *Teorija skupova. Koji su skupovi brojeva prebrojivi, a koji neprebrojivi? Je li skup cijelih brojeva prebrojiv? Zašto?*

Kako bi odgovorili na to pitanje, ponovimo prvo neke definicije. Za skup A kažemo da je prebrojiv ako postoji barem jedna bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$. Za skup kažemo da je neprebrojiv ako je beskonačan i nije prebrojiv. Skup $\mathbb{N}$ je očito prebrojiv (jedna tražena bijekcija je npr. funkcija identitete na skupu $\mathbb{N}$). Skup $\mathbb{Z}$ je prebrojiv. Kao ilustraciju dokaza posljednje tvrdnje na sljedećoj slici je dana jedna bijekcija između skupova $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$ (broj 0 se preslika u 0, negativni cijeli brojevi se preslikavaju u parne prirodne, a pozitivni ciljeli brojevi u neparne prirodne brojeve).



Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv (za dokaz vidite npr. [19] ili [9]). Skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ su neprebrojivi. Neprebrojivost skupa realnih brojeva je krajem 19. stoljeća dokazao njemački matematičar G. Cantor (dokaz vidi u [19]). Vrlo lijep pristup teškim pojmovima prebrojivosti i neprebrojivosti je dan u priči o Hilbertovom hotelu. O tom možete čitati u [3] i [14]. Posebno toplo preporučamo Vilenkinovu knjigu [15]. Primjere mnogih prebrojivih i neprebrojivih skupova možete naći u [2].

Rezimirajmo na kraju rezultate naše potrage za skupovima. Pojmovi: "biti element", podskup, unija, presjek i razlika skupova, spomenu se pri obradi nastavne jedinice gdje su potrebni. Na primjer znak $\in$ uvede se u osnovnoj školi, znakovi $\cup$ i $\cap$ uvedu se u drugom razredu srednje škole kada se obrađuju nejednadžbe. Smatramo da bi tu nastavnici trebali rezervirati malo više vremena prilikom uvođenja skupovnih operacija. Logički veznici $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$, te kvantifikatori $\forall$ i $\exists$ se izbjegavaju. Većina studenata matematike na PMF–Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu prije studija nije nikada čula za sljedeće pojmove: partitivni skup, komplement skupa, Kartezijev produkt, prebrojivi i neprebrojivi skupovi, a pogotovo ne za kardinalne brojeve skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$. Smatramo da to nije najveći nadostatak, već su najveći problemi s pojmom funkcije. Na svim fakultetima, gdje se na prvoj godini predaje matematika, osnovni pojam je funkcija. Obično se obrađuju limesi, derivacije i integrali. Teško je od studenta očekivati da bez problema prihvati te pojmove ako nije dovoljno dugo vremena učio o funkcijama, grafovima, injekcijama, ... Smatramo da bi o tome trebalo voditi računa prilikom kreiranja novih nastavnih programa.

Literatura

[1] F. M. Brückler, *Matematički dvoboji: Kronecker kontra Cantora*, math.e, 4 (2005) http://e.math.hr/old/dvoboji/index.html

[2] F. M. Brückler, V. Čačić, M. Doko, M. Vuković, *Zbirka zadataka iz teorije skupova*, web–izdanje, PMF–MO, Zagreb, 2008. http://web.math.hr/~vukovic/dodiplomska_nastava.htm

[3] N. Casey, *Hotel Infinity*, Poučak, 22 (2005), 72–80

[4] O. Deiser, *Poznajete li ω_1?*, Osječka matematička škola, 2 (2002), 39-48

[5] V. G. Kirin, *Jednadžbe, nejednadžbe, veznici*, Matematika, 1976, no 1, 32–40

[6] V. G. Kirin, *Što i kako sa skupovima?*, Matematika, 1977, no 2, 25–29

[7] Dj. Kurepa, *Teorija skupova*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1951.

[8] S. Kurepa, *Uvod u matematiku*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.

[9] I. Mihalj, *Prebrojivost skupa racionalnih brojeva i konstrukcija zmijaste funkcije*, MFL, 215 (2003), 185–190

[10] P. Papić, *Uvod u teoriju skupova*, HMD, Zagreb, 2000.

[11] A. Shenitzer, J. Stilwell, *Problem kontinuuma*, Poučak, 30 (2007), 9–24

[12] Z. Šikić, *Što su skupovi u školi?*, Matematika, 1989, no 3, 19–30

[13] Z. Šikić, *Kako je stvarana novovjekovna matematika*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[14] D. Veljan, *Hotel s beskonačno mnogo soba*, Matka 6 (1997/98), 69–72

[15] N. J. Vilenkin, *Priče o skupovima*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

[16] Ž. Vrcelj, *Skupovi–primjeri rada učeničkog tima u razredu*, Matematika i škola, 20(2003), 207–210

[17] M. Vuković, *Neki osnovni pojmovi teorije skupova*, Osječka matematička škola, 2 (2002), 31–38

[18] M. Vuković, *Matematička indukcija i Goodsteinov teorem*, Poučak, 4 (2003), 5–13

[19] M. Vuković, *Teorija skupova*, predavanja, PMF–MO, Zagreb, 2009. http://web.math.hr/~vukovic/dodiplomska_nastava.htm

[20] M. Vuković, *O aksiomu izbora, cipelama i čarapama*, Poučak, 9 (2009), 54–60

[21] M. Vuković, *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2009.