Sintaksa i semantika u logici

Mladen Vuković

PMF–Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

13. listopad 2012., Zadar

§ 1. L O G I K A   S U D O V A

Intuitivni pojam suda ...

1.1. Sintaksa logike sudova

Osnovni pojmovi: alfabet, riječ, konkatenacija, podriječ

Definicija 1

Alfabet logike sudova *je unija skupova* A_1, A_2 *i* A_3, *pri čemu je:*

$A_1 = \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ *prebrojiv skup čije elemente nazivamo* **propozicionalne varijable**

$A_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ **skup logičkih veznika**

$A_3 = \{(\ ),\}$ **skup pomoćnih simbola (zagrade i zarez)**.

Logičke veznike redom nazivamo:

$\neg$	**negacija**
$\wedge$	**konjunkcija**
$\vee$	**disjunkcija**
$\longrightarrow$	**kondicional**
$\longleftrightarrow$	**bikondicional**

Definicija 2

Atomarna formula *logike sudova je svaka propozicionalna varijabla.*

Pojam **formule** *logike sudova definiramo rekurzivno:*

a) *svaka atomarna formula je formula;*

b) *ako su A i B formule tada su i riječi*

$$(\neg A), \qquad (A \wedge B), \qquad (A \vee B), \qquad (A \rightarrow B) \qquad i \qquad (A \leftrightarrow B)$$

također formule;

c) *riječ alfabeta logike sudova je formula ako je nastala primjenom konačno mnogo koraka uvjeta a) i b).*

1.2. Semantika logike sudova

Neka je A formula logike sudova te neka je $\{P_1, \ldots, P_n\}$ skup svih propozicionalnih varijabli koje se pojavljuju u A. To kratko označavamo sa $A(P_1, \ldots P_n)$.

Definicija 3

Svako preslikavanje sa skupa svih propozicionalnih varijabli u skup $\{0, 1\}$, tj.

$$I : \{P_0, P_1, \ldots\} \to \{0, 1\}$$

nazivamo **totalna interpretacija** *ili kratko* **interpretacija**.

Ako je preslikavanje definirano na podskupu skupa propozicionalnih varijabli tada kažemo da je to **parcijalna interpretacija.**

Kažemo da je parcijalna interpretacija I **adekvatna** *za formulu* $A(P_1, \ldots, P_n)$ *ako je funkcija* I *definirana na* P_i *za sve* $i = 1, \ldots, n$.

Definicija 4

Neka je I interpretacija (totalna ili parcijalna). Ako se radi o parcijalnoj interpretaciji I smatramo da je I adekvatna za formule na kojima se definira njena vrijednost. Tada vrijednost interpretacije I na proizvoljnoj formuli A, u oznaci $I(A)$, definiramo rekurzivno:

$$
\begin{aligned}
I(\neg A) = 1 \quad & \textit{ako i samo ako} \quad I(A) = 0; \\
I(A \wedge B) = 1 \quad & \textit{ako i samo ako} \quad I(A) = 1 \ \textit{ i } \ I(B) = 1; \\
I(A \vee B) = 1 \quad & \textit{ako i samo ako} \quad I(A) = 1 \ \textit{ ili } \ I(B) = 1; \\
I(A \rightarrow B) = 1 \quad & \textit{ako i samo ako} \quad I(A) = 0 \ \textit{ ili } \ I(B) = 1; \\
I(A \leftrightarrow B) = 1 \quad & \textit{ako i samo ako} \quad I(A) = I(B).
\end{aligned}
$$

Preglednije je vrijednost interpretacije na formulama definirati pomoću tablica koje se nazivaju **semantičke tablice.**

Tada se vrijednosti interpretacije za složenije formule mogu definirati i ovako:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Definicija 5

Ako je vrijednost interpretacije I na formuli jednaka 1, tj. $I(F) = 1$, tada kažemo da je **formula F logike sudova istinita za interpretaciju** I.

Ako je $I(F) = 0$ tada kažemo da je formula F logike sudova **neistinita za interpretaciju** I.

Definicija 6

Za formulu F logike sudova kažemo da je **ispunjiva**, *odnosno* **oboriva**, *ako postoji interpretacija I tako da vrijedi* $I(F) = 1$, *odnosno* $I(F) = 0$.

Za formulu F logike sudova kažemo da je **valjana** *ili* **tautologija** *ako je istinita za svaku interpretaciju.*

Za formulu F logike sudova kažemo da je **antitautologija** *ako je neistinita za svaku interpretaciju.*

Napomena 1

Normalne forme u logici sudova: konjunktivna i disjunktivna – dobra tema za nastavu logike u srednjoj školi.

1.3. Sintaksa – račun sudova

Definicija 7

Sistem *RS* zadan je svojim shemama aksioma i jednim pravilom izvoda.

Sheme aksioma sistema RS su:

(A1) $\quad A \to (B \to A)$

(A2) $\quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(A3) $\quad (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

Jedino pravilo izvoda je **modus ponens** *ili kratko* **mod pon** *tj.*

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}.$$

Svaku instancu neke od shema (A1)–(A3) *nazivamo* **aksiom**.

Definicija 8

Kažemo da je niz formula $F_1, \ldots, F_n$ **dokaz** *za formulu F u sistemu RS ako vrijedi:*

a) *formula F_n je upravo F, tj. vrijedi $F_n \equiv F$;*

b) *za sve $k \in \{1, \ldots, n\}$ formula F_k je ili aksiom ili je nastala primjenom pravila modus ponens na neke formule F_i i F_j, gdje su $i, j < k$.*

Kažemo da je formula F **teorem** *sistema RS ako u RS postoji dokaz za F.*

Teorem 1 (Teorem adekvatnosti za sistem RS)

Svaki teorem sistema RS je valjana formula.

Teorem 2 (Teorem potpunosti za sistem RS)

Svaka valjana formula logike sudova je teorem sistema RS.

Rezime o logici sudova

Sintaksa

RAČUN
aksiomi, dokazi, ...
teorem

JEZIK
normalne forme
formula, potformula,...
alfabet logike sudova

teorem adekvatnosti

teorem potpunosti

Semantika

tautologija
testovi valjanosti
relacija logičke posljedice
istinitost formula
interpretacije

Rezime o logici sudova

Sintaksa

RAČUN
aksiomi, dokazi, ...
teorem

JEZIK
normalne forme
formula, potformula,...
alfabet logike sudova

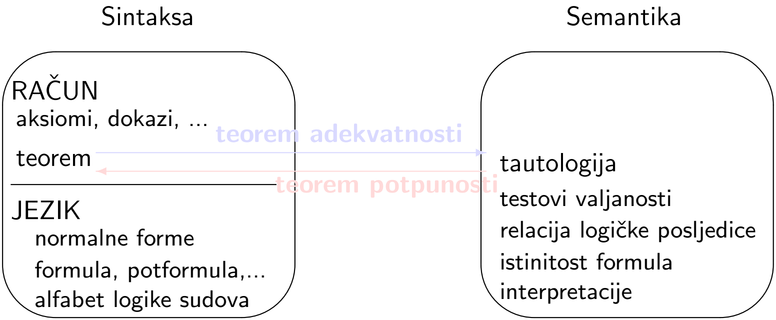
teorem adekvatnosti

teorem potpunosti

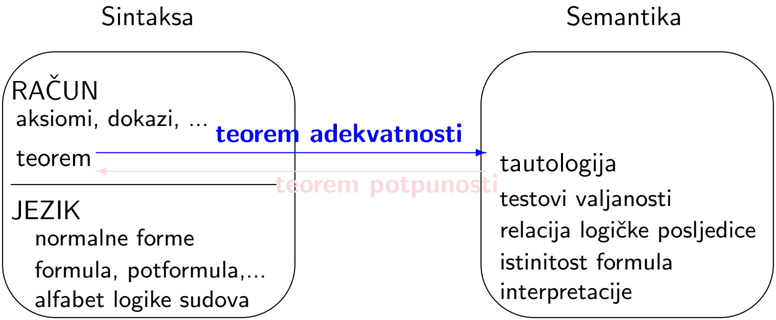
Semantika

tautologija
testovi valjanosti
relacija logičke posljedice
istinitost formula
interpretacije

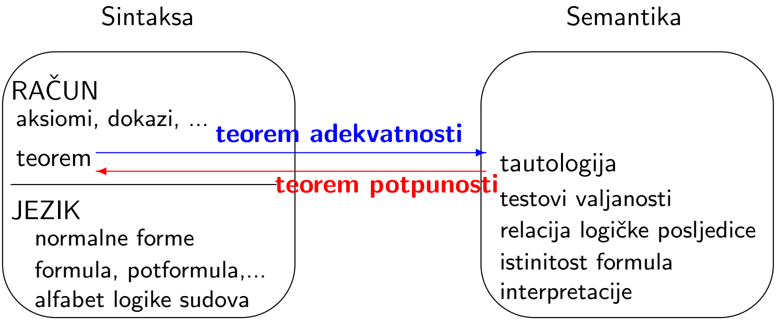
Rezime o logici sudova



Rezime o logici sudova



Rezime o logici sudova



Napomena 2

Sistem prirodne dedukcije ....

§ 2. LOGIKA PRVOG REDA

2.1 Sintaksa logike prvog reda

Definicija 9

Alfabet $\mathcal{A}$ logike prvog reda *je unija skupova $A_1, \ldots, A_6$ gdje su redom skupovi A_i definirani s:*

$A_1 = \{v_0, v_1, \ldots\}$, *prebrojiv skup čije elemente nazivamo* **individualne varijable**.

$A_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists\}$, **skup logičkih simbola**, *koje redom nazivamo: negacija, konjunkcija, disjunkcija, kondicional, bikondicional, univerzalni i egzistencijalni kvantifikator.*

$A_3 = \{R_k^{n_k} \ : \ k \in \mathbb{N}\}$, skup čije elemente nazivamo **relacijski simboli**. Prirodan broj n_k naziva se mjesnost relacijskog simbola. Pretpostavljamo da za svaki $j \in \mathbb{N}$ ovaj skup sadrži prebrojivo mnogo relacijskih simbola mjesnosti j.

$A_4 = \{f_k^{m_k} \ : \ k \in J\}$, skup čije elemente nazivamo **funkcijski simboli**. Prirodan broj m_k naziva se mjesnost funkcijskog simbola. Pretpostavljamo da za svaki $j \in \mathbb{N}$ ovaj skup sadrži prebrojivo mnogo funkcijskih simbola mjesnosti j.

$A_5 = \{c_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$, skup čije elemente nazivamo **konstantski simboli**.

$A_6 = \{(\ ) \ , \}$, **skup pomoćnih simbola** (lijeva i desna zagrada, te zarez).

Uniju skupova relacijskih, funkcijskih i konstantskih simbola nazivamo još **skup nelogičkih simbola**.

Definicija 10

Term *je riječ pripadnog alfabeta $\mathcal{A}$ definirana sljedećom rekurzivnom definicijom:*

- *svaka individualna varijabla i konstantski simbol su termi;*
- *ako je f^n neki $n-$mjesni funkcijski simbol i $t_1, \ldots, t_n$ su termi, tada je riječ $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ term;*
- *riječ je term ako i samo ako je nastala pomoću konačno mnogo primjena prethodno dva navedena pravila.*

Definicija 10

Term *je riječ pripadnog alfabeta* $\mathcal{A}$ *definirana sljedećom rekurzivnom definicijom:*

- *svaka individualna varijabla i konstantski simbol su termi;*
- *ako je* f^n *neki* $n-$*mjesni funkcijski simbol i* $t_1, \ldots, t_n$ *su termi, tada je riječ* $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ *term;*
- *riječ je term ako i samo ako je nastala pomoću konačno mnogo primjena prethodno dva navedena pravila.*

Definicija 10

Term *je riječ pripadnog alfabeta $\mathcal{A}$ definirana sljedećom rekurzivnom definicijom:*

- *svaka individualna varijabla i konstantski simbol su termi;*
- *ako je f^n neki $n-$mjesni funkcijski simbol i $t_1, \ldots, t_n$ su termi, tada je riječ $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ term;*
- *riječ je term ako i samo ako je nastala pomoću konačno mnogo primjena prethodno dva navedena pravila.*

Definicija 11

Ako je R^n neki n–mjesni relacijski simbol, i $t_1, \ldots, t_n$ su termi, tada riječ $R^n(t_1, \ldots, t_n)$ nazivamo **atomarna formula.**

Definicija 12

Formula *je riječ pripadnog alfabeta $\mathcal{A}$ definirana sljedećom rekurzivnom definicijom:*

- *svaka atomarna formula je formula;*
- *ako su A i B formule tada su $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ i $(A \leftrightarrow B)$ također formule;*
- *ako je A formula, a x varijabla, tada su riječi $(\forall x A)$ i $(\exists x A)$ također formule;*
- *riječ alfabeta $\mathcal{A}$ je formula ako i samo ako je nastala primjenom konačno mnogo puta prethodno navedena tri pravila.*

Definicija 12

Formula *je riječ pripadnog alfabeta $\mathcal{A}$ definirana sljedećom rekurzivnom definicijom:*

- *svaka atomarna formula je formula;*
- *ako su A i B formule tada su $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ i $(A \leftrightarrow B)$ također formule;*
- *ako je A formula, a x varijabla, tada su riječi $(\forall x A)$ i $(\exists x A)$ također formule;*
- *riječ alfabeta $\mathcal{A}$ je formula ako i samo ako je nastala primjenom konačno mnogo puta prethodno navedena tri pravila.*

Definicija 12

Formula *je riječ pripadnog alfabeta $\mathcal{A}$ definirana sljedećom rekurzivnom definicijom:*

- *svaka atomarna formula je formula;*
- *ako su A i B formule tada su $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ i $(A \leftrightarrow B)$ također formule;*
- *ako je A formula, a x varijabla, tada su riječi $(\forall x A)$ i $(\exists x A)$ također formule;*
- *riječ alfabeta $\mathcal{A}$ je formula ako i samo ako je nastala primjenom konačno mnogo puta prethodno navedena tri pravila.*

Definicija 12

Formula *je riječ pripadnog alfabeta $\mathcal{A}$ definirana sljedećom rekurzivnom definicijom:*

- *svaka atomarna formula je formula;*
- *ako su A i B formule tada su $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ i $(A \leftrightarrow B)$ također formule;*
- *ako je A formula, a x varijabla, tada su riječi $(\forall x A)$ i $(\exists x A)$ također formule;*
- *riječ alfabeta $\mathcal{A}$ je formula ako i samo ako je nastala primjenom konačno mnogo puta prethodno navedena tri pravila.*

Definicija 13

Složenost formule;
potformula;
slobodni i vezani nastup varijable u formuli;
otvorena i zatvorena formula;
supstitucije varijable u formuli s termom;
term slobodan za varijablu u formuli; ....

2.2. Semantika logike prvog reda

Definicija 14

Struktura *je uređeni par* $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$, *gdje je* M *neprazni skup koji nazivamo* **nosač**, *a* φ *je preslikavanje sa skupa nelogičkih simbola koje ima sljedeća svojstva:*

a) *svakom relacijskom simbolu* $R_k^{n_k}$ *pridružuje se* n_k*–mjesna relacija* $\varphi(R_k^{n_k})$ *na* M;

b) *svakom funkcijskom simbolu* $f_k^{m_k}$ *pridružuje se* m_k*–mjesna funkcija* $\varphi(f_k^{m_k})$ *sa* M^{m_k} *u* M;

c) *svakom konstantskom simbolu* c_k *pridružuje se neki element* $\varphi(c_k)$ *iz* M.

Definicija 15

Za danu strukturu $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ svaku funkciju sa skupa individualnih varijabli u nosač strukture nazivamo **valuacija**.

Svaki uređeni par neke strukture $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ i proizvoljne valuacije v na M nazivamo **interpretacija**.

Za danu valuaciju v i varijablu x sa v_x označavamo svaku valuaciju koja se podudara sa v na svim varijablama osim možda na varijabli x.

Definicija 15

Za danu strukturu $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ svaku funkciju sa skupa individualnih varijabli u nosač strukture nazivamo **valuacija**.

Svaki uređeni par neke strukture $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ i proizvoljne valuacije v na M nazivamo **interpretacija**.

Za danu valuaciju v i varijablu x sa v_x označavamo svaku valuaciju koja se podudara sa v na svim varijablama osim možda na varijabli x.

Definicija 15

Za danu strukturu $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ svaku funkciju sa skupa individualnih varijabli u nosač strukture nazivamo **valuacija**.

Svaki uređeni par neke strukture $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ i proizvoljne valuacije v na M nazivamo **interpretacija**.

Za danu valuaciju v i varijablu x sa v_x označavamo svaku valuaciju koja se podudara sa v na svim varijablama osim možda na varijabli x.

Definicija 16

Neka je $(\mathfrak{M}, v)$ *neka interpretacija, gdje je* $\mathfrak{M} = (M,\ \varphi)$.

Istinitost formule F *za danu interpretaciju, u oznaci* $\mathfrak{M} \models_v F$, *definiramo rekurzivno po složenosti formule* F :

- *ako je* F *atomarna formula, tj.* F *je oblika* $R(t_1,\ \dots,\ t_n)$, *tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $(v(t_1),\ \dots,\ v(t_n))\ \in \varphi(R)$;

- *ako je F formula oblika $\neg G$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako nije* $\mathfrak{M} \models_v G$;

- *ako je F formula oblika $A \wedge B$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_v A$ *i* $\mathfrak{M} \models_v B$;

- *ako je F formula oblika $A \vee B$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_v A$ *ili* $\mathfrak{M} \models_v B$;

- *ako je F formula oblika $\neg G$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako nije* $\mathfrak{M} \models_v G$;

- *ako je F formula oblika $A \wedge B$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_v A$ *i* $\mathfrak{M} \models_v B$;

- *ako je F formula oblika $A \vee B$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_v A$ *ili* $\mathfrak{M} \models_v B$;

- *ako je F formula oblika $\neg G$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako nije* $\mathfrak{M} \models_v G$;

- *ako je F formula oblika $A \wedge B$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_v A$ *i* $\mathfrak{M} \models_v B$;

- *ako je F formula oblika $A \vee B$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_v A$ *ili* $\mathfrak{M} \models_v B$;

- *ako je F formula oblika $A \rightarrow B$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako ne vrijedi* $\mathfrak{M} \models_v A$ *ili vrijedi* $\mathfrak{M} \models_v B$;

- *ako je F formula oblika $A \leftrightarrow B$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako vrijedi da je* $\mathfrak{M} \models_v A$ *ekvivalentno s* $\mathfrak{M} \models_v B$;

- *ako je F formula oblika $A \rightarrow B$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako ne vrijedi* $\mathfrak{M} \models_v A$ *ili vrijedi* $\mathfrak{M} \models_v B$;

- *ako je F formula oblika $A \leftrightarrow B$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako vrijedi da je* $\mathfrak{M} \models_v A$ *ekvivalentno s* $\mathfrak{M} \models_v B$;

- *ako je F formula oblika $\forall x G$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_{v_x} G$ *za sve valuacije* v_x;

- *ako je F formula oblika $\exists x G$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_{v_x} G$ *za neku valuaciju* v_x.

- *ako je F formula oblika $\forall x G$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_{v_x} G$ *za sve valuacije* v_x;

- *ako je F formula oblika $\exists x G$ tada definiramo:*

  $\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_{v_x} G$ *za neku valuaciju* v_x.

Definicija 17

Kažemo da je formula F logike prvog reda **ispunjiva** *(***oboriva***) ako postoji interpretacija $(\mathfrak{M}, v)$ tako da vrijedi $\mathfrak{M} \models_v F \quad (\mathfrak{M} \not\models_v F)$.*

Kažemo da je struktura $\mathfrak{M}$ **model** *za formulu F ako vrijedi $\mathfrak{M} \models_v F$ za sve valuacije v. Tu činjenicu označavamo sa $\mathfrak{M} \models F$.*

Kažemo da je formula **valjana** *ako je istinita za svaku interpretaciju.*

Napomena 3

Preneksna normalna forma – dobra tema za nastavu logike u srednjoj školi.

2.3. Sintaksa – račun logike prvog reda

Definicija 18

Račun logike prvog reda *zadan je s pet shema aksioma i dva pravila izvoda. Sheme aksioma su sljedeće:*

(A1) $A \to (B \to A)$;

(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;

(A4) $\forall x A(x) \to A(t/x)$, *gdje je term* t *slobodan za varijablu* x *u formuli* A;

(A5) $\forall x (A \to B) \to (A \to \forall x B)$, *gdje formula* A *ne sadrži slobodnih nastupa varijable* x.

Pravila izvoda su modus ponens i generalizacija, tj.

$$\frac{A \qquad A \rightarrow B}{B} \qquad \text{i} \qquad \frac{A}{\forall x A}.$$

Ovako definirani sistem kratko ćemo označavati s RP.

Definicija 19

Neka su $A_1, \ldots, A_n$ *i* A *formule logike prvog reda.*

Kažemo da je niz formula $A_1, \ldots, A_n$ **dokaz** *za formulu* A *u sistemu* RP *ako vrijedi:*

a) *formula* A_n *je upravo* A;

b) *za sve* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *vrijedi jedno od:*

- *formula* A_i *je aksiom sistema* RP*;*
- *formula* A_i *je nastala primjenom pravila izvoda modus ponens ili generalizacije na neke formule* A_j *i* A_k*, pri čemu je* $j, k < i$*.*

Kažemo da je formula A *logike prvog reda* **teorem** *sistema* RP *ako u* RP *postoji dokaz za* A*.*

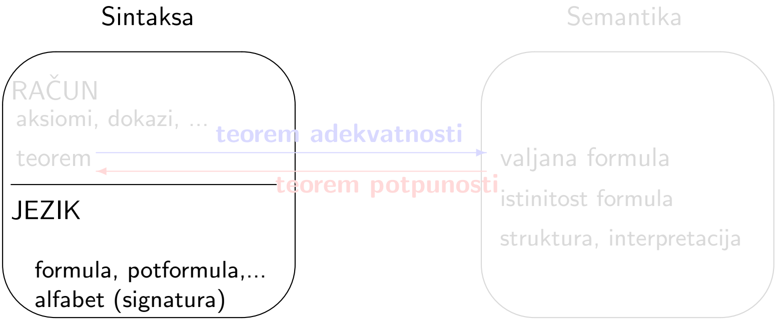
Teorem 3 (Teorem adekvatnosti za sistem RP)

Svaki teorem sistema RP je valjana formula.

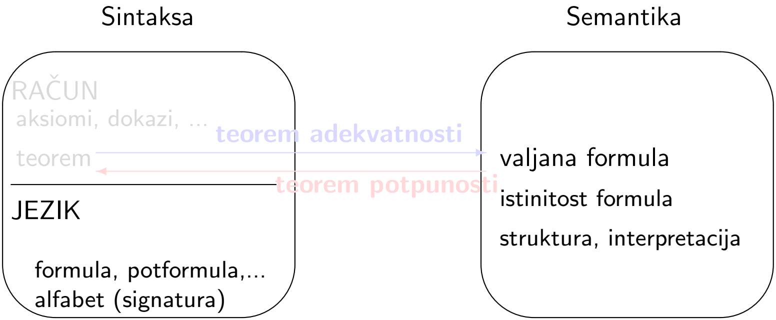
Teorem 4 (Gödelov teorem potpunosti)

Svaka valjana formula F logike prvog reda je teorem sistema RP.

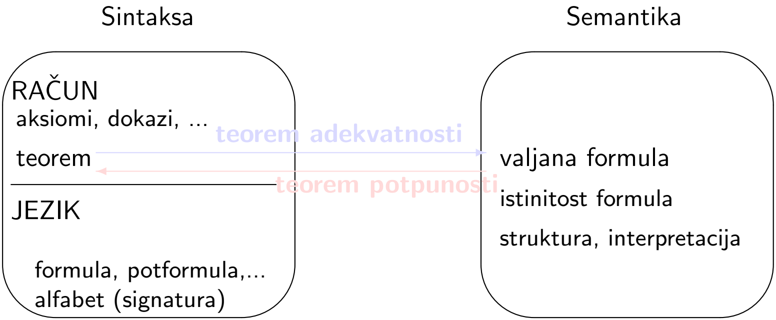
Rezime o logici prvog reda



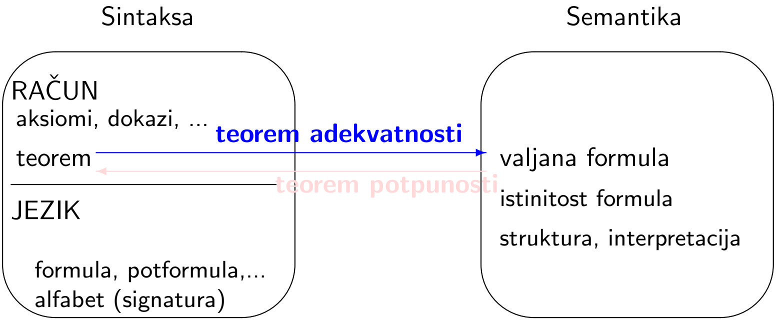
Rezime o logici prvog reda



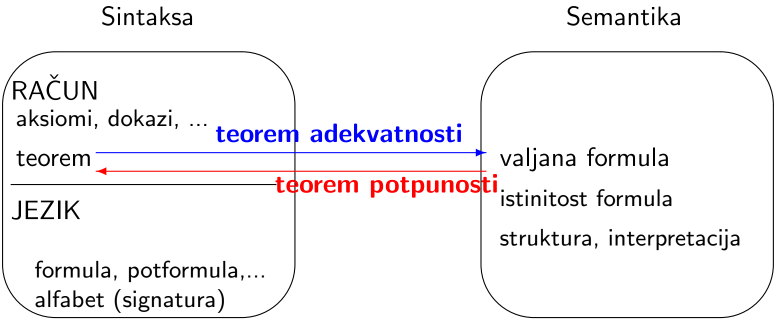
Rezime o logici prvog reda



Rezime o logici prvog reda



Rezime o logici prvog reda



§ 3. Modalna logika

Uvod: kritika materijalne implikacije ...

Jezik (propozicionalne) modalne logike: logika sudova + modalni operator $\Box$

Pojam formule, supstitucije, ...

§ 3. Modalna logika

Uvod: kritika materijalne implikacije ...

Jezik (propozicionalne) modalne logike: logika sudova + modalni operator $\Box$

Pojam formule, supstitucije, ...

§ 3. Modalna logika

Uvod: kritika materijalne implikacije ...

Jezik (propozicionalne) modalne logike: logika sudova + modalni operator $\Box$

Pojam formule, supstitucije, ...

Definicija 20

Modalni sistem K *(S. Kripke) sadrži sljedeće aksiome:*

$$A0) \quad \textit{sve tautologije (u novom jeziku!)}$$

$$A1) \quad \Box\,(A \to B) \to (\Box\, A \to \Box\, B)$$

Pravila izvoda sistema K su:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}\ \textit{(mod pon)} \qquad\qquad i \qquad\qquad \frac{A}{\Box\, A}\ \textit{(nužnost)}$$

Sasvim analogno kao za sistem RS definiraju se pojmovi dokaza i teorema.

Definicija 21

Neka je W neki neprazan skup, te $R \subseteq W \times W$ proizvoljna binarna relacija.

Tada uređeni par (W, R) nazivamo **Kripkeov okvir** *ili kratko* **okvir**.

Elemente skupa W nazivamo **svijetovi**, *a relaciju R nazivamo* **relacija dostiživosti**.

Definicija 22

Kripkeov model $\mathfrak{M}$ *je uređena trojka* $(W, R, \Vdash)$, *gdje je* (W, R) *okvir, a* $\Vdash$ *je binarna relacija između svijetova i formula koja ima sljedeća svojstva:*

$$w \Vdash \neg A \quad \text{ako i samo ako} \quad w \nVdash A$$

$$w \Vdash A \wedge B \quad \text{ako i samo ako} \quad w \Vdash A \quad \text{i} \quad w \Vdash B$$

$$w \Vdash A \vee B \quad \text{ako i samo ako} \quad w \Vdash A \quad \text{ili} \quad w \Vdash B$$

$$w \Vdash A \rightarrow B \quad \text{ako i samo ako} \quad w \nVdash A \quad \text{ili} \quad w \Vdash B$$

$$w \Vdash A \leftrightarrow B \quad \text{ako i samo ako} \quad w \Vdash A \quad \text{je ekvivalentno sa} \quad w \Vdash B$$

$$w \Vdash \Box A \quad \text{ako i samo ako} \quad \forall v (wRv \quad \text{povlači } v \Vdash A)$$

Definicija 23

Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ Kripkeov model.

Kažemo da je neka **formula A istinita na modelu** *$\mathfrak{M}$ ako za sve svijetove $w \in W$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash A$. To kratko označavamo sa $\mathfrak{M} \models A$.*

Kažemo da je formula A **valjana** *ako za sve Kripkeove modele $\mathfrak{M}$ vrijedi $\mathfrak{M} \models A$.*

Teorem 5 (Teorem adekvatnosti za sistem K)

Ako je modalna formula F teorem sistema K tada je formula F valjana.

Teorem 6 (Teorem potpunosti za sistem K)

Ako je F valjana modalna formula tada je F teorem sistema K.

Napomena 4

Za razliku od klasične logike sudova za modalnu logiku ne postoji samo jedan istaknuti sistem (kojemu su drugi sistemi ekvivalentni).

Ovdje navodimo još nekoliko najčešće razmatranih proširenja sistema K.

$$\mathbf{T} = K + \Box A \to A$$

$$\mathbf{S}4 = T + \Box A \to \Box \Box A$$

$$\mathbf{S}5 = T + \Diamond A \to \Box \Diamond A$$

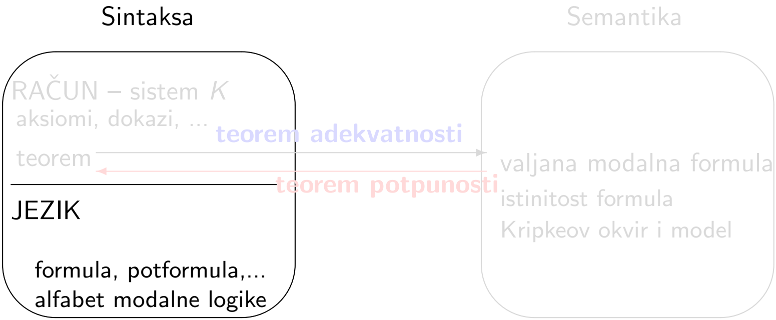
Napomena 5

Postoje i druge semantike za modalne logike: okolinska, topološka, algebarska, opći okviri, ...

Napomena 6

Neki modalni sistemi su nepotpuni u odnosu na Kripkeovu semantiku.

Rezime priče o modalnoj logici



Rezime priče o modalnoj logici

Sintaksa

RAČUN – sistem K
aksiomi, dokazi, ...

teorem

JEZIK

formula, potformula,...
alfabet modalne logike

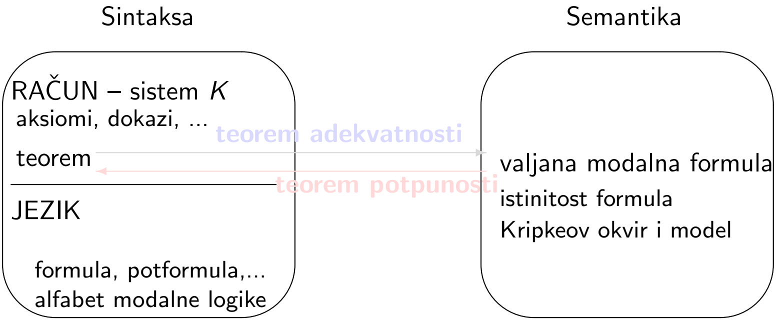
teorem adekvatnosti

teorem potpunosti

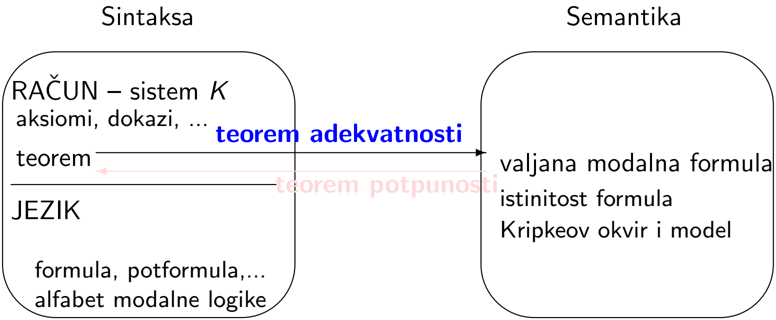
Semantika

valjana modalna formula
istinitost formula
Kripkeov okvir i model

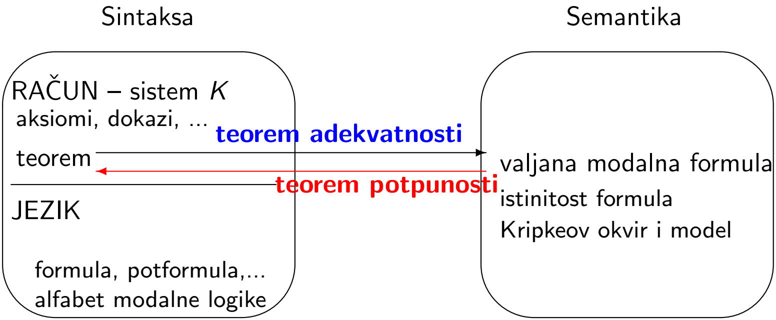
Rezime priče o modalnoj logici



Rezime priče o modalnoj logici



Rezime priče o modalnoj logici



http://web.math.hr/~vukovic

vukovic@math.hr

Knjiga: M. Vuković, Matematička logika, Element, Zagreb, 2009.

http://web.math.hr/∼vukovic

vukovic@math.hr

Knjiga: M. Vuković, Matematička logika, Element, Zagreb, 2009.

http://web.math.hr/∼vukovic

vukovic@math.hr

Knjiga: M. Vuković, Matematička logika, Element, Zagreb, 2009.