Matematički jezik: oznake i izrazi

Mladen Vuković
vukovic@math.hr
web.math.hr/∼vukovic

PMF–Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

26. lipnja 2014.

Sadržaj predavanja

Uvod – općenito o jezicima

Svaki jezik karakteriziran je svojom **sintaksom** i **semantikom**.

Sintaksu jezika određuje dvije stvari: popis simbola koji se mogu koristiti (alfabet ili abeceda), te pravila za izgradnju izraza iz dopuštenih simbola.

Semantika jezika određuje značenje izraza, odnosno određuje njihovu istinitost.

U ovom predavanju mi ćemo razmatrati sintaksu matematičkog jezika.

U ovom predavanju pokušat ćemo prije svega naglasiti važnost sljedećih pitanja (i možda barem djelomično odgovoriti na neka):

- Što je to matematički jezik?
- Možemo li strogo zadati matematički jezik?
- Po čemu je taj jezik poseban?
- Zašto je važno u nastavi matematike u najranijoj dobi naglašavati neke elemente matematičkog jezika?

U ovom predavanju pokušat ćemo prije svega naglasiti važnost sljedećih pitanja (i možda barem djelomično odgovoriti na neka):

- Što je to matematički jezik?
- Možemo li strogo zadati matematički jezik?
- Po čemu je taj jezik poseban?
- Zašto je važno u nastavi matematike u najranijoj dobi naglašavati neke elemente matematičkog jezika?

U ovom predavanju pokušat ćemo prije svega naglasiti važnost sljedećih pitanja (i možda barem djelomično odgovoriti na neka):

- Što je to matematički jezik?
- Možemo li strogo zadati matematički jezik?
- Po čemu je taj jezik poseban?
- Zašto je važno u nastavi matematike u najranijoj dobi naglašavati neke elemente matematičkog jezika?

U ovom predavanju pokušat ćemo prije svega naglasiti važnost sljedećih pitanja (i možda barem djelomično odgovoriti na neka):

- Što je to matematički jezik?
- Možemo li strogo zadati matematički jezik?
- Po čemu je taj jezik poseban?
- Zašto je važno u nastavi matematike u najranijoj dobi naglašavati neke elemente matematičkog jezika?

Simboli matematičkog jezika

Odlukom 1. kongresa nastavnika matematike RH određene su standardne oznake za matematiku i preporučene su za upotrebu u Hrvatskoj.

Popis oznaka može se vidjeti na mrežnoj adresi:
`http://www.matematika.hr/files/2913/9064/9275/oznake.pdf`

Značenje	Oznaka
Skup prirodnih brojeva	$\mathbb{N}$
Skup prirodnih brojeva i nula	$\mathbb{N}_0$
Decimalni broj	zapis s decimalnom točkom
Otvoreni interval	primjeri: $\langle 2,3\rangle$, $\langle -\infty, 4\rangle$
Uređeni par	(a,b)
Kardinalni broj skupa S	$card(S)$
Dužina kojoj su A i B krajnje točke	$\overline{AB}$
Duljina dužine $\overline{AB}$	$\lvert AB\rvert$

Simboli matematičkog jezika

Odlukom 1. kongresa nastavnika matematike RH određene su standardne oznake za matematiku i preporučene su za upotrebu u Hrvatskoj.

Popis oznaka može se vidjeti na mrežnoj adresi:
`http://www.matematika.hr/files/2913/9064/9275/oznake.pdf`

Značenje	Oznaka
Skup prirodnih brojeva	$\mathbb{N}$
Skup prirodnih brojeva i nula	$\mathbb{N}_0$
Decimalni broj	zapis s decimalnom točkom
Otvoreni interval	primjeri: $\langle 2,3\rangle$, $\langle -\infty, 4\rangle$
Uređeni par	(a,b)
Kardinalni broj skupa S	$card(S)$
Dužina kojoj su A i B krajnje točke	$\overline{AB}$
Duljina dužine $\overline{AB}$	$\lvert AB\rvert$

Simboli (2)

Navedeno je da **nije potrebno** uvoditi posebne oznake za:

- *koordinatni sustav na pravcu; koordinatni sustav u ravnini*
- *sliku funkcije*
- *argument kompleksnog broja*
- *aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu*

Simboli (2)

Navedeno je da **nije potrebno** uvoditi posebne oznake za:

- *koordinatni sustav na pravcu; koordinatni sustav u ravnini*
- *sliku funkcije*
- *argument kompleksnog broja*
- *aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu*

Simboli (2)

Navedeno je da **nije potrebno** uvoditi posebne oznake za:

- *koordinatni sustav na pravcu; koordinatni sustav u ravnini*
- *sliku funkcije*
- *argument kompleksnog broja*
- *aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu*

Simboli (2)

Navedeno je da **nije potrebno** uvoditi posebne oznake za:

- *koordinatni sustav na pravcu; koordinatni sustav u ravnini*
- *sliku funkcije*
- *argument kompleksnog broja*
- *aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu*

Simboli (3)

Grčki alfabet: α, β, γ, δ, ϵ, ζ, η, θ, ι, κ, λ, μ, ν, ξ, o, π, ϱ, σ, τ, φ, χ, ψ, ω.

Gotica: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Z}$.

Simboli (3)

Grčki alfabet: α, β, γ, δ, ϵ, ζ, η, θ, ι, κ, λ, μ, ν, ξ, o, π, ϱ, σ, τ, φ, χ, ψ, ω.

Gotica: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Z}$.

Uvođenje pojmova (1) – neka pitanja za početak

- Je li nula prirodan broj?
- Je li paralelogram trapez?
- Je li $0^0 = 1$?
- Zašto je zabranjeno dijeliti s nulom? Je li ta "zabrana" definicija?
- Je li je prebrojiv skup nužno beskonačan?

Uvođenje pojmova (1) – neka pitanja za početak

- Je li nula prirodan broj?
- Je li paralelogram trapez?
- Je li $0^0 = 1$?
- Zašto je zabranjeno dijeliti s nulom? Je li ta "zabrana" definicija?
- Je li je prebrojiv skup nužno beskonačan?

Uvođenje pojmova (1) – neka pitanja za početak

- Je li nula prirodan broj?
- Je li paralelogram trapez?
- Je li $0^0 = 1$?
- Zašto je zabranjeno dijeliti s nulom? Je li ta "zabrana" definicija?
- Je li je prebrojiv skup nužno beskonačan?

Uvođenje pojmova (1) – neka pitanja za početak

- Je li nula prirodan broj?
- Je li paralelogram trapez?
- Je li $0^0 = 1$?
- Zašto je zabranjeno dijeliti s nulom? Je li ta "zabrana" definicija?
- Je li je prebrojiv skup nužno beskonačan?

Uvođenje pojmova (1) – neka pitanja za početak

- Je li nula prirodan broj?
- Je li paralelogram trapez?
- Je li $0^0 = 1$?
- Zašto je zabranjeno dijeliti s nulom? Je li ta "zabrana" definicija?
- Je li je prebrojiv skup nužno beskonačan?

Uvođenje pojmova (2)

Matematički pojmovi se mogu podijeliti na **osnovne** i **izvedene**.

Osnovni pojmovi su primjerice sljedeći: *točka, pravac, ravnina i skup*.

Značenje izvedenih pojmova se opisuje pomoću izvedenih pojmova ili pomoću nekih već definiranih pojmova.

Tri su stupnja u procesu formiranja pojma:

- **promatranje i opažanje –** važno je da učenik razlikuje i prepoznaje objekte koji pripadaju nekom opsegu pojma;
- **predodžba o pojmu** – učenik bi trebao znati opisati bitna obilježja pojma;
- **stroga definicija pojma**.

Uvođenje pojmova (2)

Matematički pojmovi se mogu podijeliti na **osnovne** i **izvedene**.

Osnovni pojmovi su primjerice sljedeći: *točka, pravac, ravnina i skup*.

Značenje izvedenih pojmova se opisuje pomoću izvedenih pojmova ili pomoću nekih već definiranih pojmova.

Tri su stupnja u procesu formiranja pojma:

- **promatranje i opažanje –** važno je da učenik razlikuje i prepoznaje objekte koji pripadaju nekom opsegu pojma;
- **predodžba o pojmu** - učenik bi trebao znati opisati bitna obilježja pojma;
- **stroga definicija pojma.**

Uvođenje pojmova (2)

Matematički pojmovi se mogu podijeliti na **osnovne** i **izvedene**.

Osnovni pojmovi su primjerice sljedeći: *točka, pravac, ravnina i skup*.

Značenje izvedenih pojmova se opisuje pomoću izvedenih pojmova ili pomoću nekih već definiranih pojmova.

Tri su stupnja u procesu formiranja pojma:

- **promatranje i opažanje –** važno je da učenik razlikuje i prepoznaje objekte koji pripadaju nekom opsegu pojma;
- **predodžba o pojmu** - učenik bi trebao znati opisati bitna obilježja pojma;
- **stroga definicija pojma**.

Uvođenje pojmova (3) – pravila

Neka pravila prilikom izricanja definicija:

- **primjerenost** (niti preuska, a ni preširoka);
  Primjer preširoke definicije: "*Za dva pravca kažemo da su paralelni ako se oni ne sijeku ili se podudaraju.*"
  Treba još reći: "*koji leže u istoj ravnini*", jer inače su uključeni i mimoilazni pravci.
- **necirkularnost**;
  Primjer cirkularne definicije: "*Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od središta kružnice.*"
- **pozitivnost**;
  Primjer "negativne" definicije: "*Realan broj koji nije racionalan naziva se iracionalan*".
  "Pozitivna" preformulacija: "*Realan broj koji se zapisuje u obliku beskonačnog neperiodičkog decimalnog zapisa naziva se iracionalni broj*".

Uvođenje pojmova (3) – pravila

Neka pravila prilikom izricanja definicija:

- **primjerenost** (niti preuska, a ni preširoka);
  Primjer preširoke definicije: "*Za dva pravca kažemo da su paralelni ako se oni ne sijeku ili se podudaraju.*"
  Treba još reći: "*koji leže u istoj ravnini*", jer inače su uključeni i mimoilazni pravci.

- **necirkularnost**;
  Primjer cirkularne definicije: "*Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od središta kružnice.*"

- **pozitivnost**;
  Primjer "negativne" definicije: "*Realan broj koji nije racionalan naziva se iracionalan*".
  "Pozitivna" preformulacija: "*Realan broj koji se zapisuje u obliku beskonačnog neperiodičkog decimalnog zapisa naziva se iracionalni broj*".

Uvođenje pojmova (3) – pravila

Neka pravila prilikom izricanja definicija:

- **primjerenost** (niti preuska, a ni preširoka);
  Primjer preširoke definicije: "*Za dva pravca kažemo da su paralelni ako se oni ne sijeku ili se podudaraju.*"
  Treba još reći: "*koji leže u istoj ravnini*", jer inače su uključeni i mimoilazni pravci.
- **necirkularnost**;
  Primjer cirkularne definicije: "*Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od središta kružnice.*"
- **pozitivnost**;
  Primjer "negativne" definicije: "*Realan broj koji nije racionalan naziva se iracionalan*".
  "Pozitivna" preformulacija: "*Realan broj koji se zapisuje u obliku beskonačnog neperiodičkog decimalnog zapisa naziva se iracionalni broj*".

Uvođenje pojmova (4) – primjeri nepotrebnih definicija

Primjeri opisa pojmova koje nije zabranjeno reći, ali nikako ne posebno isticati, te im davati posebnu važnost:

- *Brojeve koje dobivamo brojenjem nazivamo prirodnim brojevima.*
- *Točka je najmanji dio ravnine.*
- *Razlomkom izražavamo dio neke cjeline.*
- *Jednakost u kojoj se nalazi nepoznanica naziva se jednadžba.*
- *Skup je pojam koji se ne definira.*

Uvođenje pojmova (4) – primjeri nepotrebnih definicija

Primjeri opisa pojmova koje nije zabranjeno reći, ali nikako ne posebno isticati, te im davati posebnu važnost:

- *Brojeve koje dobivamo brojenjem nazivamo prirodnim brojevima.*
- *Točka je najmanji dio ravnine.*
- *Razlomkom izražavamo dio neke cjeline.*
- *Jednakost u kojoj se nalazi nepoznanica naziva se jednadžba.*
- *Skup je pojam koji se ne definira.*

Uvođenje pojmova (4) – primjeri nepotrebnih definicija

Primjeri opisa pojmova koje nije zabranjeno reći, ali nikako ne posebno isticati, te im davati posebnu važnost:

- *Brojeve koje dobivamo brojenjem nazivamo prirodnim brojevima.*
- *Točka je najmanji dio ravnine.*
- *Razlomkom izražavamo dio neke cjeline.*
- *Jednakost u kojoj se nalazi nepoznanica naziva se jednadžba.*
- *Skup je pojam koji se ne definira.*

Uvođenje pojmova (4) – primjeri nepotrebnih definicija

Primjeri opisa pojmova koje nije zabranjeno reći, ali nikako ne posebno isticati, te im davati posebnu važnost:

- *Brojeve koje dobivamo brojenjem nazivamo prirodnim brojevima.*
- *Točka je najmanji dio ravnine.*
- *Razlomkom izražavamo dio neke cjeline.*
- *Jednakost u kojoj se nalazi nepoznanica naziva se jednadžba.*
- *Skup je pojam koji se ne definira.*

Uvođenje pojmova (4) – primjeri nepotrebnih definicija

Primjeri opisa pojmova koje nije zabranjeno reći, ali nikako ne posebno isticati, te im davati posebnu važnost:

- *Brojeve koje dobivamo brojenjem nazivamo prirodnim brojevima.*
- *Točka je najmanji dio ravnine.*
- *Razlomkom izražavamo dio neke cjeline.*
- *Jednakost u kojoj se nalazi nepoznanica naziva se jednadžba.*
- *Skup je pojam koji se ne definira.*

Uvođenje pojmova (5) – kut

Primjer 8 (+1) definicije pojma kuta:

- *Kut je figura koja se sastoji od dva polupravca koji imaju zajednički vrh.*
- *Kut je dio ravnine između dva polupravca koji imaju zajednički vrh.*
- *Sustav od dvije zrake g_A i h_A koje izlaze iz iste točke A zovemo kutom. Točku A zovemo vrhom kuta, a zrake g_A i h_A njegovim krakovima.*
- *Dva polupravca x i y s istom rubnom točkom O dijele ravninu na dva dijela. Svaki se dio zove kut. Kut je uređena trojka $(x, y; \pi_0)$ koju čine dva polupravca sa zajedničkom rubnom točkom i jedan od dva dijela ravnine koju određuju ti polupravci.*

Uvođenje pojmova (5) – kut

Primjer 8 (+1) definicije pojma kuta:

- *Kut je figura koja se sastoji od dva polupravca koji imaju zajednički vrh.*

- *Kut je dio ravnine između dva polupravca koji imaju zajednički vrh.*

- *Sustav od dvije zrake g_A i h_A koje izlaze iz iste točke A zovemo kutom. Točku A zovemo vrhom kuta, a zrake g_A i h_A njegovim krakovima.*

- *Dva polupravca x i y s istom rubnom točkom O dijele ravninu na dva dijela. Svaki se dio zove kut. Kut je uređena trojka $(x, y; \pi_0)$ koju čine dva polupravca sa zajedničkom rubnom točkom i jedan od dva dijela ravnine koju određuju ti polupravci.*

Uvođenje pojmova (5) – kut

Primjer 8 (+1) definicije pojma kuta:

- *Kut je figura koja se sastoji od dva polupravca koji imaju zajednički vrh.*
- *Kut je dio ravnine između dva polupravca koji imaju zajednički vrh.*
- *Sustav od dvije zrake g_A i h_A koje izlaze iz iste točke A zovemo kutom. Točku A zovemo vrhom kuta, a zrake g_A i h_A njegovim krakovima.*
- *Dva polupravca x i y s istom rubnom točkom O dijele ravninu na dva dijela. Svaki se dio zove kut. Kut je uređena trojka $(x, y; \pi_0)$ koju čine dva polupravca sa zajedničkom rubnom točkom i jedan od dva dijela ravnine koju određuju ti polupravci.*

Uvođenje pojmova (5) – kut

Primjer 8 (+1) definicije pojma kuta:

- *Kut je figura koja se sastoji od dva polupravca koji imaju zajednički vrh.*
- *Kut je dio ravnine između dva polupravca koji imaju zajednički vrh.*
- *Sustav od dvije zrake g_A i h_A koje izlaze iz iste točke A zovemo kutom. Točku A zovemo vrhom kuta, a zrake g_A i h_A njegovim krakovima.*
- *Dva polupravca x i y s istom rubnom točkom O dijele ravninu na dva dijela. Svaki se dio zove kut. Kut je uređena trojka $(x, y; \pi_0)$ koju čine dva polupravca sa zajedničkom rubnom točkom i jedan od dva dijela ravnine koju određuju ti polupravci.*

Uvođenje pojmova (6) – kut

(Sljedeće 4 (+1) definicije pojma kuta.)

- *Rotacijom oko svoje početne točke zraka opisuje lik koji zovemo kutom, a bilo koja njezina točka, osim početne pri tome opisuje lik koji zovemo luk.*

- *Kut jest par što ga tvore dva različita polupravca a i b koji imaju zajednički početak O i ne pripadaju istom pravcu. Točka O zove se vrh, a polupravci a i b krakovi promatranog kuta.*

- *Uređeni par polupravaca (x_1, x_2) s vrhom u točki O nazivamo kut u točki O.*

- *Klasu svih ekvivalentnih uređenih parova polupravaca nazivamo kutom s vrhom u točki O.*

  (To je definicija iz knjige Pavković, Veljan, Elementarna matematika 1).

- **Preporuka**: nacrtajte neki kut, te recite da taj lik nazivamo kut.

Uvođenje pojmova (6) – kut

(Sljedeće 4 (+1) definicije pojma kuta.)

- *Rotacijom oko svoje početne točke zraka opisuje lik koji zovemo kutom, a bilo koja njezina točka, osim početne pri tome opisuje lik koji zovemo luk.*

- *Kut jest par što ga tvore dva različita polupravca a i b koji imaju zajednički početak O i ne pripadaju istom pravcu. Točka O zove se vrh, a polupravci a i b krakovi promatranog kuta.*

- *Uređeni par polupravaca (x_1, x_2) s vrhom u točki O nazivamo kut u točki O.*

- *Klasu svih ekvivalentnih uređenih parova polupravaca nazivamo kutom s vrhom u točki O.*

  (To je definicija iz knjige Pavković, Veljan, Elementarna matematika 1).

- **Preporuka**: nacrtajte neki kut, te recite da taj lik nazivamo kut.

Uvođenje pojmova (6) – kut

(Sljedeće 4 (+1) definicije pojma kuta.)

- *Rotacijom oko svoje početne točke zraka opisuje lik koji zovemo kutom, a bilo koja njezina točka, osim početne pri tome opisuje lik koji zovemo luk.*
- *Kut jest par što ga tvore dva različita polupravca a i b koji imaju zajednički početak O i ne pripadaju istom pravcu. Točka O zove se vrh, a polupravci a i b krakovi promatranog kuta.*
- *Uređeni par polupravaca (x_1, x_2) s vrhom u točki O nazivamo kut u točki O.*
- *Klasu svih ekvivalentnih uređenih parova polupravaca nazivamo kutom s vrhom u točki O.*

  (To je definicija iz knjige Pavković, Veljan, Elementarna matematika 1).

- **Preporuka**: nacrtajte neki kut, te recite da taj lik nazivamo kut.

Uvođenje pojmova (6) – kut

(Sljedeće 4 (+1) definicije pojma kuta.)

- *Rotacijom oko svoje početne točke zraka opisuje lik koji zovemo kutom, a bilo koja njezina točka, osim početne pri tome opisuje lik koji zovemo luk.*

- *Kut jest par što ga tvore dva različita polupravca a i b koji imaju zajednički početak O i ne pripadaju istom pravcu. Točka O zove se vrh, a polupravci a i b krakovi promatranog kuta.*

- *Uređeni par polupravaca (x_1, x_2) s vrhom u točki O nazivamo kut u točki O.*

- *Klasu svih ekvivalentnih uređenih parova polupravaca nazivamo kutom s vrhom u točki O.*

  (To je definicija iz knjige Pavković, Veljan, Elementarna matematika 1).

- **Preporuka**: nacrtajte neki kut, te recite da taj lik nazivamo kut.

Uvođenje pojmova (6) – kut

(Sljedeće 4 (+1) definicije pojma kuta.)

- *Rotacijom oko svoje početne točke zraka opisuje lik koji zovemo kutom, a bilo koja njezina točka, osim početne pri tome opisuje lik koji zovemo luk.*

- *Kut jest par što ga tvore dva različita polupravca a i b koji imaju zajednički početak O i ne pripadaju istom pravcu. Točka O zove se vrh, a polupravci a i b krakovi promatranog kuta.*

- *Uređeni par polupravaca* (x_1, x_2) *s vrhom u točki* O *nazivamo kut u točki* O.

- *Klasu svih ekvivalentnih uređenih parova polupravaca nazivamo kutom s vrhom u točki* O.

  (To je definicija iz knjige Pavković, Veljan, Elementarna matematika 1).

- **Preporuka**: nacrtajte neki kut, te recite da taj lik nazivamo kut.

Uvođenje pojmova (7) – preporuka

Preporuka 1: definicije iskazavati tako da se koriste riječi "**nazivamo**" ili "**kažemo**".

Primjeri. Umjesto: "**Paralelogram je četverokut koji ima dva para paralenih stranica**" bolje je reći:

"**Četverokut koji ima dva para paralelnih stranica nazivamo paralelogram**."

Umjesto: "**Postotak je razlomak s nazivnikom 100**" bolje je reći:

"**Razlomak s nazivnikom 100 nazivamo postotak**."

Uvođenje pojmova (7) – preporuka

Preporuka 1: definicije iskazavati tako da se koriste riječi "**nazivamo**" ili "**kažemo**".

Primjeri. Umjesto: "**Paralelogram je četverokut koji ima dva para paralenih stranica**" bolje je reći:

"**Četverokut koji ima dva para paralelnih stranica nazivamo paralelogram**."

Umjesto: "**Postotak je razlomak s nazivnikom 100**" bolje je reći:

"**Razlomak s nazivnikom 100 nazivamo postotak**."

Uvođenje pojmova (8) – preporuka

Preporuka 2: Jasno istaknuti radi li se o **opisu pojma**, ili **definiciji**.
U stranim udžbenicima samo se ističu definicije i poučci.

Primjer opisa pojma: "*Dva trokuta su sukladna ako se mogu dovesti do poklapanja*".

Primjer opisa pojma: "*Mnogokut (poligon) je dio ravnine omeđen dužinama*".

Primjer definicije: "*Kut čiji je vrh središte kružnice naziva se središnji kut*".

Primjer definicije: "*Jednadžbe koje imaju jednaka rješenja nazivamo ekvivalentne jednadžbe*".

Uvođenje pojmova (8) – preporuka

Preporuka 2: Jasno istaknuti radi li se o **opisu pojma**, ili **definiciji**.
U stranim udžbenicima samo se ističu definicije i poučci.

Primjer opisa pojma: "*Dva trokuta su sukladna ako se mogu dovesti do poklapanja*".

Primjer opisa pojma: "*Mnogokut (poligon) je dio ravnine omeđen dužinama*".

Primjer definicije: "*Kut čiji je vrh središte kružnice naziva se središnji kut*".

Primjer definicije: "*Jednadžbe koje imaju jednaka rješenja nazivamo ekvivalentne jednadžbe*".

Uvođenje pojmova (8) – preporuka

Preporuka 2: Jasno istaknuti radi li se o **opisu pojma**, ili **definiciji**.
U stranim udžbenicima samo se ističu definicije i poučci.

Primjer opisa pojma: "*Dva trokuta su sukladna ako se mogu dovesti do poklapanja*".

Primjer opisa pojma: "*Mnogokut (poligon) je dio ravnine omeđen dužinama*".

Primjer definicije: "*Kut čiji je vrh središte kružnice naziva se središnji kut*".

Primjer definicije: "*Jednadžbe koje imaju jednaka rješenja nazivamo ekvivalentne jednadžbe*".

Uvođenje pojmova (8) – preporuka

Preporuka 2: Jasno istaknuti radi li se o **opisu pojma**, ili **definiciji**.
U stranim udžbenicima samo se ističu definicije i poučci.

Primjer opisa pojma: "*Dva trokuta su sukladna ako se mogu dovesti do poklapanja*".

Primjer opisa pojma: "*Mnogokut (poligon) je dio ravnine omeđen dužinama*".

Primjer definicije: "*Kut čiji je vrh središte kružnice naziva se središnji kut*".

Primjer definicije: "*Jednadžbe koje imaju jednaka rješenja nazivamo ekvivalentne jednadžbe*".

Uvođenje pojmova (8) – preporuka

Preporuka 2: Jasno istaknuti radi li se o **opisu pojma**, ili **definiciji**.
U stranim udžbenicima samo se ističu definicije i poučci.

Primjer opisa pojma: "*Dva trokuta su sukladna ako se mogu dovesti do poklapanja*".

Primjer opisa pojma: "*Mnogokut (poligon) je dio ravnine omeđen dužinama*".

Primjer definicije: "*Kut čiji je vrh središte kružnice naziva se središnji kut*".

Primjer definicije: "*Jednadžbe koje imaju jednaka rješenja nazivamo ekvivalentne jednadžbe*".

Uvođenje pojmova – preporuka (13)

Ponekad je bolje ostati pri ispravnoj intuitivnoj predodžbi nekog pojma nego davati definicije neprimjerene učenicima.

Uvođenje pojmova (9) – odgovori na neka pitanja s početka

- Je li nula prirodan broj?
  Nije, u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi.
  Jeste, u matematičkoj logici i teoriji skupova.

- Je li paralelogram trapez?
  I. Gusić u svom "Rječniku" kaže da jeste.
  Z. Kurnik u svojoj knjizi kaže da jeste.
  Jedan udžbenik: *Trapez je četverokut koji ima točno dvije stranice usporedne.*

- Je li $0^0 = 1$?
  U matematičkoj analizi izraz 0^0 nije definiran.
  U računarstvu se ponekad definira $0^0 = 1$.

Uvođenje pojmova (9) – odgovori na neka pitanja s početka

- Je li nula prirodan broj?
  Nije, u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi.
  Jeste, u matematičkoj logici i teoriji skupova.

- Je li paralelogram trapez?
  I. Gusić u svom "Rječniku" kaže da jeste.
  Z. Kurnik u svojoj knjizi kaže da jeste.
  Jedan udžbenik: *Trapez je četverokut koji ima točno dvije stranice usporedne.*

- Je li $0^0 = 1$?
  U matematičkoj analizi izraz 0^0 nije definiran.
  U računarstvu se ponekad definira $0^0 = 1$.

Uvođenje pojmova (9) – odgovori na neka pitanja s početka

- Je li nula prirodan broj?
  Nije, u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi.
  Jeste, u matematičkoj logici i teoriji skupova.

- Je li paralelogram trapez?
  I. Gusić u svom "Rječniku" kaže da jeste.
  Z. Kurnik u svojoj knjizi kaže da jeste.
  Jedan udžbenik: *Trapez je četverokut koji ima točno dvije stranice usporedne*.

- Je li $0^0 = 1$?
  U matematičkoj analizi izraz 0^0 nije definiran.
  U računarstvu se ponekad definira $0^0 = 1$.

Iskazivanje tvrdnji u nastavi matematike (1)

Osnovne tvrdnje u matematici se nazivaju **aksiomi**.

To su tvrdnje za koje su se matematičari dogovorili da ih smatraju istinitim, te se one ne dokazuju.

Aksiomi implicitno definiraju osnovne pojmove.

Sada navodimo Peanove aksiome, te ističemo njihovu važnost prilikom razmatranja skupa prirodnih brojeva.

Iskazivanje tvrdnji (2) – Peanovi aksiomi

(1) $x' = y' \to x = y$

(2) $0 \neq x'$

(3) $x + 0 = x$

(4) $x + y' = (x + y)'$

(5) $x \cdot 0 = 0$

(6) $x \cdot y' = x \cdot y + x$

(7) *shema aksioma indukcije:*

$$A(0) \to \Big(\forall x(A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x)\Big),$$

gdje je $A(x)$ proizvoljna formula.

Iskazivanje tvrdnji (3)

Tvrdnje u matematici koje nisu aksiomi se moraju dokazati.

Obično takve tvrdnje imaju jedan od sljedećih naziva:

- lema,
- teorem/poučak,
- propozicija,
- korolar.

U udžbenicima matematike važne tvrdnje se ističu kao poučci.

Iskazivanje tvrdnji (3)

Tvrdnje u matematici koje nisu aksiomi se moraju dokazati.

Obično takve tvrdnje imaju jedan od sljedećih naziva:

- lema,
- teorem/poučak,
- propozicija,
- korolar.

U udžbenicima matematike važne tvrdnje se ističu kao poučci.

Iskazivanje tvrdnji (3)

Tvrdnje u matematici koje nisu aksiomi se moraju dokazati.

Obično takve tvrdnje imaju jedan od sljedećih naziva:

- lema,
- teorem/poučak,
- propozicija,
- korolar.

U udžbenicima matematike važne tvrdnje se ističu kao poučci.

Iskazivanje tvrdnji (3)

Tvrdnje u matematici koje nisu aksiomi se moraju dokazati.

Obično takve tvrdnje imaju jedan od sljedećih naziva:

- lema,
- teorem/poučak,
- propozicija,
- korolar.

U udžbenicima matematike važne tvrdnje se ističu kao poučci.

Iskazivanje tvrdnji (3)

Tvrdnje u matematici koje nisu aksiomi se moraju dokazati.

Obično takve tvrdnje imaju jedan od sljedećih naziva:

- lema,
- teorem/poučak,
- propozicija,
- korolar.

U udžbenicima matematike važne tvrdnje se ističu kao poučci.

Iskazivanje tvrdnji (4) - preporuka

Preporuka: tvrdnje iskazavati u obliku **"ako ... onda"**

Na taj način se jasno izdvajaju **pretpostavke** i **zaključak**, te je moguće govoriti o obratu tvrdnje.

Zatim, taj oblik omogućava da se govori o: nužnim i dovoljnim uvjetima, ekvivalenciji, obratu po kontrapoziciji, suprotnoj tvrdnji, ...

Z. Kurnik: "*Dobro je učenicima ukazati na činjenicu da je lakše izdvojiti pretpostavku i tvrdnju u poučku ako se poučak formulira rečenicom "ako ... onda" i poticati ih na preformuliranje poučka u taj oblik.*"

Iskazivanje tvrdnji (4) - preporuka

Preporuka: tvrdnje iskazavati u obliku **"ako ... onda"**

Na taj način se jasno izdvajaju **pretpostavke** i **zaključak**, te je moguće govoriti o obratu tvrdnje.

Zatim, taj oblik omogućava da se govori o: nužnim i dovoljnim uvjetima, ekvivalenciji, obratu po kontrapoziciji, suprotnoj tvrdnji, ...

Z. Kurnik: "*Dobro je učenicima ukazati na činjenicu da je lakše izdvojiti pretpostavku i tvrdnju u poučku ako se poučak formulira rečenicom "ako ... onda" i poticati ih na preformuliranje poučka u taj oblik.*"

Iskazivanje tvrdnji (5) – primjeri

Primjer tvrdnje: "**Razlika cijelih brojeva je djeljiva s nekim brojem ako je svaki član razlike djeljiv tim brojem.**

Prijedlog preformulacije: "**Neka su** a, b **i** c **cijeli brojevi. Ako broj** c **dijeli** a **i broj** c **dijeli** b **tada broj** c **dijeli razliku** $a - b$.

Gornja formulacija omogućava da se postavi pitanje vrijedi li obrat tvrdnje:
"**Ako broj** c **dijeli razliku** $a - b$ **tada broj** c **dijeli** a **i broj** c **dijeli** b."

Iskazivanje tvrdnji (5) – primjeri

Primjer tvrdnje: "**Razlika cijelih brojeva je djeljiva s nekim brojem ako je svaki član razlike djeljiv tim brojem.**

Prijedlog preformulacije: "**Neka su** a, b **i** c **cijeli brojevi. Ako broj** c **dijeli** a **i broj** c **dijeli** b **tada broj** c **dijeli razliku** $a - b$.

Gornja formulacija omogućava da se postavi pitanje vrijedi li obrat tvrdnje:
"**Ako broj** c **dijeli razliku** $a - b$ **tada broj** c **dijeli** a **i broj** c **dijeli** b."

Iskazivanje tvrdnji (5) – primjeri

Primjer tvrdnje: "**Razlika cijelih brojeva je djeljiva s nekim brojem ako je svaki član razlike djeljiv tim brojem.**

Prijedlog preformulacije: "**Neka su** a, b **i** c **cijeli brojevi. Ako broj** c **dijeli** a **i broj** c **dijeli** b **tada broj** c **dijeli razliku** $a - b$.

Gornja formulacija omogućava da se postavi pitanje vrijedi li obrat tvrdnje:
"**Ako broj** c **dijeli razliku** $a - b$ **tada broj** c **dijeli** a **i broj** c **dijeli** b."

Iskazivanje tvrdnji (6) – primjeri

Primjer tvrdnje: "**U svakom trokutu nasuprot dviju stranica jednakih duljina leže kutovi jednakih veličina**".

Prijedlog preformulacije: "**Ako su u trokutu dvije stranice jednakih duljina tada su kutovi nasuprot tih stranica jednakih veličina**."

Primjer tvrdnje: "**U rombu su dijagonale okomite**".

Prijedlog preformulacije:"**Ako je dani četverokut romb, tada su mu dijagonale okomite**".

Iskazivanje tvrdnji (6) – primjeri

Primjer tvrdnje: "**U svakom trokutu nasuprot dviju stranica jednakih duljina leže kutovi jednakih veličina**".

Prijedlog preformulacije: "**Ako su u trokutu dvije stranice jednakih duljina tada su kutovi nasuprot tih stranica jednakih veličina**."

Primjer tvrdnje: "**U rombu su dijagonale okomite**".

Prijedlog preformulacije:"**Ako je dani četverokut romb, tada su mu dijagonale okomite**".

Iskazivanje tvrdnji (7) – primjer

S–S–S poučak o sličnosti trokuta:
Dva su trokuta slična ako su im duljine odgovarajućih stranica proporcionalne.

Prijedlog preformulacije:
Neka su $\triangle ABC$ **i** $\triangle A'B'C'$ **trokuti čije su duljine stranica** a, b **i** c, **odnosno** a', b' **i** c'. **Ako vrijedi** $a : a' = b : b' = c : c'$ **tada su trokuti** $\triangle ABC$ **i** $\triangle A'B'C'$ **slični.**

Iskazivanje tvrdnji (7) – primjer

S–S–S poučak o sličnosti trokuta:
Dva su trokuta slična ako su im duljine odgovarajućih stranica proporcionalne.

Prijedlog preformulacije:
Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ trokuti čije su duljine stranica a, b i c, odnosno a', b' i c'. Ako vrijedi $a : a' = b : b' = c : c'$ tada su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ slični.

Iskazivanje tvrdnji (8) – ekvivalencije

Napomena o iskazivanju ekvivalencija: korištenje "ako i samo ako"

Preporuka 1: izbjegavati koristiti skraćenicu "akko"

Preporuka 2: izbjegavati koristiti "samo ako"

Iskazivanje tvrdnji (8) – ekvivalencije

Napomena o iskazivanju ekvivalencija: korištenje "ako i samo ako"

Preporuka 1: izbjegavati koristiti skraćenicu "akko"

Preporuka 2: izbjegavati koristiti "samo ako"

Iskazivanje tvrdnji (8) – ekvivalencije

Napomena o iskazivanju ekvivalencija: korištenje "ako i samo ako"

Preporuka 1: izbjegavati koristiti skraćenicu "akko"

Preporuka 2: izbjegavati koristiti "samo ako"

Rezime – Aksiomatska izgradnja matematičkih teorija

Općenito	**Primjer** – *geometrija*
Osnovni pojmovi	*točka, pravac, ravnina*
Aksiomi	*Na svakom pravcu leže barem tri različite točke.*
Definicije	*okomiti pravci, trokut, kružnica*
Poučci	*Pitagorin poučak,* *SSS–poučak o sukladnosti*

Možemo li formalno dokazati sve istinite tvrdnje?
NE! O tome govori Gödelov prvi teorem nepotpunosti.

istinitost $\neq$ dokazivost

Rezime – Aksiomatska izgradnja matematičkih teorija

Općenito	**Primjer** – *geometrija*
Osnovni pojmovi	*točka, pravac, ravnina*
Aksiomi	*Na svakom pravcu leže barem tri različite točke.*
Definicije	*okomiti pravci, trokut, kružnica*
Poučci	*Pitagorin poučak,* *SSS–poučak o sukladnosti*

Možemo li formalno dokazati sve istinite tvrdnje?
NE! O tome govori Gödelov prvi teorem nepotpunosti.

istinitost $\neq$ dokazivost

Popis korištene literature

1. I. Gusić, *Tri razine obrade matematičkih pojmova*, MIŠ 2(2001), br. 8, 111–118
2. I. Gusić, *Tehnika i pojmovi u nastavi matematike*, Poučak, 11(2002), 51-60
3. Z. Kurnik, *Oblici matematičkog mišljenja*, Element, Zagreb, 2013.
4. B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.
5. M. Vuković, *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2009.
6. *Udžbenici iz matematike* za 5., 6., 7. i 8. razred koji se koriste u RH i inozemstvu

Malo matematike za kraj

- Gödelovi teoremi nepotpunosti
- Milenijski problem $P \neq NP$
- Logička analiza hibridnih sustava
- Funkcijsko programiranje
- Logičko programiranje

Malo matematike za kraj

- Gödelovi teoremi nepotpunosti
- Milenijski problem $P \neq NP$
- Logička analiza hibridnih sustava
- Funkcijsko programiranje
- Logičko programiranje

Malo matematike za kraj

- Gödelovi teoremi nepotpunosti
- Milenijski problem $P \neq NP$
- Logička analiza hibridnih sustava
- Funkcijsko programiranje
- Logičko programiranje

Malo matematike za kraj

- Gödelovi teoremi nepotpunosti
- Milenijski problem $P \neq NP$
- Logička analiza hibridnih sustava
- Funkcijsko programiranje
- Logičko programiranje

Malo matematike za kraj

- Gödelovi teoremi nepotpunosti
- Milenijski problem $P \neq NP$
- Logička analiza hibridnih sustava
- Funkcijsko programiranje
- Logičko programiranje

Naj–zadaci: 1. Ana i Marija (Sam Loyd)

Ana i Marija imaju zajedno 44 godine. Marija je dva puta toliko stara koliko je Ana bila kada je Marija bila napola toliko stara koliko će Ana biti kada Ana bude tri puta toliko stara koliko je Marija bila kada je Marija bila tri puta toliko stara koliko je tada bila Ana. Koliko godina sada ima Ana, a koliko Marija?

Naj–zadaci: 2. Tri kćeri

Dva prijatelja nisu se dugo vidjela. Sreli su se u gradu. Ovo je njihov razgovor:

- Imaš li djece?
- Imam tri kćerke.
- Koliko su stare?
- Produkt njihovih godina je 36. Zbroj njihovih godina je jednak broju prozora na zgradi pred kojom stojimo.

  Nakoliko minuta "znatiželjni" prijatelj je računao, a onda je rekao:
- Na osnovu podataka koje si mi dao ja ne mogu točno izračunati koliko godina imaju tvoje kćeri.
- Oprosti, zaboravio sam ti reći da moja najstarija kćer svira klavir.

Izačunajte koliko godina ima svaka kćer.

Naj–zadaci: 3. Gostioničar Bistrić

Gostioničar Bistrić nije bio zadovoljan prodajom vina prošlog tjedna. Požalio se svom susjedu Kapiću:
– Ove dvije bačvice bile su pune bijelog vina. U prvoj je još 25, a u drugoj čak 38 litara.
– Koliko vina stane u svaku?
– Ako se svaka od bačvica nadopuni do vrha vinom iz one druge, u drugoj će vino biti do polovice. Možeš li sada sam naći odgovor na svoje pitanje?