$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 1.2.2016.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Dozvoljeno je korištenje službenih formula s trigonometrijskim formulama, tablicom derivacija i integrala. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (a) (9 bodova) Ispitajte tip lokalnih ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane s

$$f(x,y) = e^x y^2 - \frac{1}{2}x^2 - y^2 - x.$$

   (b) (7 bodova) Na skupu $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ odredite minimum funkcije $f(x,y) = x\sqrt{3} + y$.

2a	2b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 1.2.2016.

2. (a) (**10 bodova**) Izračunajte integral

$$\iint_\Omega (x-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdje je Ω trokut s vrhovima $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$.

(b) (**8 bodova**) Izračunajte integral

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

gdje je $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \leq 0,\ y \geq 0,\ z \leq 0\}$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 1.2.2016.

3. (a) (8 bodova) Pokažite da je integral

$$\int_\gamma (ye^x - 2xy\sin(x^2y))\,\mathrm{d}x \, + (e^x - x^2\sin(x^2y))\,\mathrm{d}y$$

neovisan o putu integracije i odredite njegovu vrijednost ako je γ glatka krivulja koja spaja točke $(0,1)$ i $(1,\pi)$.

(b) (8 bodova) Koristeći Greenov teorem izračunajte

$$\int_c x^3y\,\mathrm{d}x \, + 2xy^2\,\mathrm{d}y\,,$$

gdje je c pozitivno orijentirani rub kvadrata $[-1,1]\times[-1,1]$.

4	5	6	7	8	9

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 1.2.2016.

4. (9 bodova) Dokažite da je vektorska funkcija

$$\mathbf{F}(\vec{r}) = k|\vec{r}|^3\vec{r}, \quad (\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j})$$

gradijent neke funkcije.

5. (7 bodova) Koristeći zamjenu varijabli $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ izračunajte površinu elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

6. (9 bodova) Skicirajte područje Ω definirano uzastopnim integralima

$$\int_1^3 \int_{-x}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

i promijenite poredak integracije.

7. (9 bodova) Neka je T tijelo volumena

$$V = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^3 \int_0^{6-x} \int_0^{2x} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Napišite formulu za volumen V u obliku

$$V = \int_\square^\square \int_\square^\square \int_\square^\square \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

8. (6 bodova) Skup Ω je zadan jednadžbom u polarnim koordinatama $r\cos\varphi = 1$. O kojem je geometrijskom objektu riječ? Skicirajte ga.

9. (10 bodova) Neka je skup Ω tipa II (podskup ravnine omeđen s $c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$), neka je C rub skupa Ω te neka su $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilne funkcije. Dokažite

$$\oint_C Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Napomena: Nije dozvoljeno koristiti Greenov teorem!

$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 1.2.2016.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Dozvoljeno je korištenje službenih formula s trigonometrijskim formulama, tablicom derivacija i integrala. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (a) (9 bodova) Ispitajte tip lokalnih ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane s

$$f(x, y) = x^2 e^y - x^2 - \frac{1}{2}y^2 - y.$$

   (b) (7 bodova) Na skupu $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$ odredite minimum funkcije $f(x, y) = -x + y\sqrt{3}$.

2a	2b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 1.2.2016.

2. (a) (**10 bodova**) Izračunajte integral

$$\iint_{\Omega} (x+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdje je Ω trokut s vrhovima $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(0,1)$.

(b) (**8 bodova**) Izračunajte integral

$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

gdje je $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 1.2.2016.

3. (a) (**8 bodova**) Pokažite da je integral

$$\int_\gamma (e^y + y^2 \cos(xy^2))\,\mathrm{d}x\, + (xe^y + 2xy\cos(xy^2))\,\mathrm{d}y$$

neovisan o putu integracije i odredite njegovu vrijednost ako je γ glatka krivulja koja spaja točke $(1,0)$ i $(\pi/2, 1)$.

(b) (**8 bodova**) Koristeći Greenov teorem izračunajte

$$\int_c 2x\,\mathrm{d}x\, + (y^3x - x^3)\,\mathrm{d}y\,,$$

gdje je c pozitivno orijentirani rub kvadrata $[-1,1]\times[-1,1]$.

4	5	6	7	8	9

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 1.2.2016.

4. (9 bodova) Dokažite da je gravitacijska sila zadana kao vektorska funkcija

$$\mathbf{F}(\vec{r}) = -G\frac{mM}{|\vec{r}|^3}\vec{r}, \quad (\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j})$$

gradijent neke funkcije.

5. (7 bodova) Izračunajte Jacobijan za promjenu varijabli u cilindričke koordinate.

6. (9 bodova) Skicirajte područje Ω definirano uzastopnim integralima

$$\int_0^1 \int_{x^4}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

i promijenite poredak integracije.

7. (9 bodova) Neka je T tijelo volumena

$$V = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^3 \int_0^{6-x} \int_0^{2x} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Napišite formulu za volumen V u obliku

$$V = \int_\square^\square \int_\square^\square \int_\square^\square \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

8. (6 bodova) Skup Ω je zadan jednadžbom u polarnim koordinatama $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. O kojem je geometrijskom objektu riječ? Skicirajte ga.

9. (10 bodova) Neka je skup Ω tipa I (podskup ravnine omeđen s $a \leq x \leq b$, $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$), neka je C rub skupa Ω te neka su $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilne funkcije. Dokažite

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x \ = \iint_\Omega -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Napomena: Nije dozvoljeno koristiti Greenov teorem!