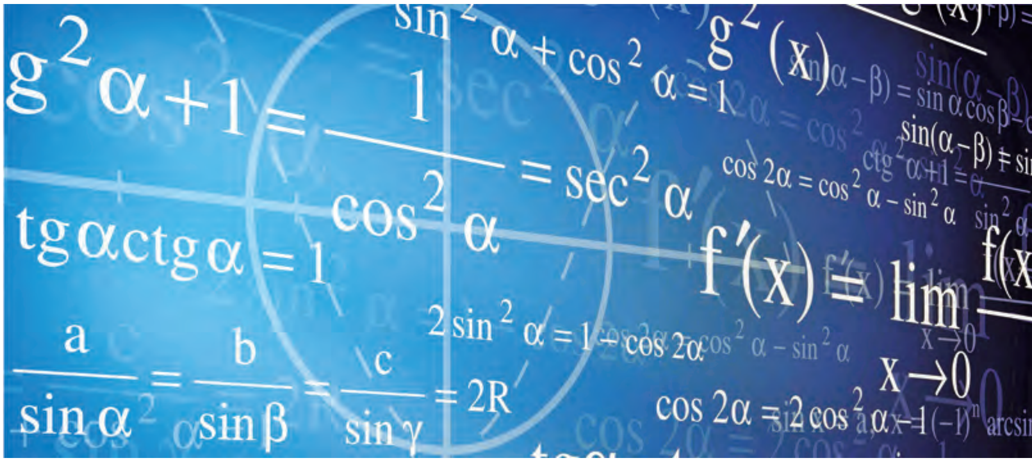
Matematički jezik:
oznake i izrazi[1]

Milana Vuković
i Mladen Vuković,
Zagreb



Uvod

Svaki jezik karakteriziran je svojom sintaksom i semantikom. Sintaksu jezika određuju dvije stvari: popis simbola koji se mogu koristiti (alfabet ili abeceda), te pravila za izgradnju izraza iz dopuštenih simbola. Semantika jezika određuje značenje izraza, odnosno određuje njihovu istinitost. U ovom članku razmatrat ćemo sintaksu matematičkog jezika. Pokušat ćemo naglasiti važnost sljedećih pitanja (i možda barem djelomično odgovoriti na neka):

- Što je to matematički jezik?
- Možemo li strogo zadati matematički jezik (hrvatsku inačicu)?
- Po čemu je taj jezik poseban?
- Zašto je važno u nastavi matematike u najranijoj dobi naglašavati neke elemente matematičkog jezika?

B. Čulina u [2] zgodno je objasnio važnost matematičkog jezika.

Prethodna teška pitanja zahtijevaju i složene odgovore. Ističemo na samom početku, barem na prvi pogled, i neka lakša pitanja:

- Je li nula prirodan broj?
- Je li paralelogram trapez?
- Zašto je zabranjeno dijeliti s nulom?
- Je li 0^0 jednako 1?
- Je li prebrojiv skup nužno beskonačan?

Prethodna pitanja trebala bi poslužiti kao motivacija za isticanje problematike uvođenja pojmova u nastavi matematike. Kasnije ćemo dati odgovore na ta pitanja.

Matematički simboli

Osnovni simboli hrvatskog jezika su slova naše abecede i ostali pomoćni znakovi (točka, zarez, dvotočka, uskličnik...). Jezik gluhonijemih kao simbole koristi posebne znakove koristeći ruke i prste. Morseova abeceda koristi samo točke i crte.

[1] Predavanja istog naslova autori su održali na županijskim stručnim skupovima nastavnika matematike osnovne škole u ljeto i jesen 2014. godine.

Programski jezici (Pascal, Fortran, C...) također imaju svoj popis simbola koji se smiju koristiti.

Za određivanje matematičkog jezika trebamo također prvo navesti popis simbola koji se koriste. Počnimo s popisom simbola. Odlukom 1. kongresa nastavnika matematike RH određene su standardne oznake za matematiku i preporučene su za upotrebu u Hrvatskoj. Popis oznaka može se vidjeti na mrežnoj adresi: `http://www.matematika.hr/files/2913/9064/9275/oznake.pdf` (vidi i [1], te [11]). Ovdje za ilustraciju navodimo dio popisa.

Značenje	Oznaka
Skup prirodnih brojeva	$\mathbf{N}$
Skup prirodnih brojeva i nula	$\mathbf{N}_0$
Decimalni broj	zapis s decimalnom točkom
Otvoreni interval	primjeri: $\langle 2,3\rangle$, $\langle -\infty,4\rangle$
Uređeni par	(a,b)
Kardinalni broj skupa S	$card(S)$
Dužina kojoj su A i B krajnje točke	$\overline{AB}$
Duljina dužine $\overline{AB}$	$\lvert AB\rvert$

Ovdje se nećemo upuštati u raspravu koje simbole bi možda trebalo mijenjati. Pogotovo nećemo ništa reći o problemu "decimalna točka ili zarez". Željeli smo samo istaknuti da su simboli nužan početak priče o matematičkom jeziku. Nemoguće je popisati sve simbole koji se koriste u matematici. No, svakako je jako važno voditi računa koji simboli se koriste.

Matematički izrazi: definicije i tvrdnje

Sintaksu nekog jezika, osim popisa simbola, određuju i pravila za formiranje izraza. Primjerice, u programskim jezicima postoje pravila kojima je određeno koji niz instrukcija čini program. Izraze u matematici, vrlo grubo govoreći, možemo podijeliti na izraze o pojmovima i tvrdnje. Iz tog razloga ovu točku smo podijelili na dva dijela: *3.1. Uvođenje matematičkih pojmova* i *3.2. Iskazivanje tvrdnja u matematici*.

Uvođenje matematičkih pojmova

Teško je egzaktno odrediti u kojem razredu treba određeni pojam intuitivno opisati, ili pak strogo definirati. No, svakako moramo naglasiti da treba razlikovati matematiku "kao znanosti" i matematiku "u nastavi". Svakako ova druga matematika treba voditi računa o prvoj. No, istovremeno matematika "u nastavi" mora voditi računa kome je namijenjena. Svaki nastavnik odlučuje kojem razredu, odnosno čak i kojem pojedinom učeniku, na kojem nivou apstrakcije će uvesti pojedini pojam. Nužno je da nastavnik zna malo više matematike od one koju predaje, tj. da zna dio matematike "kao znanosti" koji možda nikada neće predavati u razredu. Vođeni tom idejom, u ovom ćemo članku iznijeti i neke činjenice za koje smo svjesni da ne pripadaju nastavi matematike u osnovnoj školi.

Matematički pojmovi se mogu podijeliti na osnovne i izvedene. Osnovni pojmovi su primjerice sljedeći: točka, pravac, ravnina i skup. Značenje izvedenih pojmova opisuje se s pomoću osnovnih pojmova ili s pomoću nekih već izvedenih pojmova. U [9] se navode tri stupnja u procesu formiranja pojma:

1. promatranje i opažanje
2. predodžba o pojmu i
3. formiranje pojma.

Na prvom stupnju učenik razlikuje i prepoznaje objekte koji pripadaju nekom opsegu pojma. Primjerice, na zadanim slikama učenik treba razlikovati kvadrate od ostalih četverokuta. Na drugom stupnju učenik opisuje bitna obilježja pojma. Primjerice, učenik bi trebao istaknuti da kvadrat ima četiri stranice jednake duljine, te da stranice zatvaraju prave kutove. Prelazak na treći stupanj zahtijeva sposobnost apstrahiranja. Na trećem stupnju radi se o formuliranju strogih matematičkih definicija. Primjerice, za definiciju kvadrata učenik bi mogao reći da je to pravokutnik koji ima sve četiri stranice jednake duljine.

Zanimljivi primjeri uvođenja nekih pojmova dani su u [4].

Primjer. Sada navodimo neke primjere opisa pojmova za koje smatramo da ih nije zabranjeno izreći u nastavi matematike osnovne škole, ali mislimo da ih nikako ne treba posebno isticati, te im davati posebnu važnost. Naglašavamo da to nisu definicije.

- *Brojeve koje dobivamo brojenjem nazivamo prirodnim brojevima*.
  Ovo sigurno ne može biti definicija prirodnih brojeva. Smatramo da je dovoljno reći da brojeve $1, 2, 3, \ldots$ nazivamo prirodni brojevi.
- *Točka je najmanji dio ravnine*.
  Još je Euklid u svojim *Elementima* napisao nešto slično tomu. U Hilbertovoj aksiomatizaciji geometrije točke (kao i pravci i ravnine) su osnovni pojmovi koji se ne definiraju. To znači da je u nastavi matematike u osnovnoj školi dovoljno, primjerice, reći da presjek dvaju pravaca zovemo točka. Naravno, to nije definicija točke, već samo uvođenje naziva.
- *Pravac je ravna neomeđena crta*.
  Što je to crta? Što je to ravna crta? Dakle, navedena rečenica sigurno nije definicija pravca. U nastavi matematike treba razviti intutivan pojam pravca, te se nikako ne smije inzistirati na učenju, memoriranju i ispitivanju opisa pojma pravca. Daleko je važnije da učenik zna nacrtati pravac, uočiti odnose među pravcima, te razlikovati ga od ostalih skupova točaka u ravnini.
- *Razlomkom izražavamo dio neke cjeline*.
  Smatramo da to također ne smije biti neka istaknuta rečenica u nastavi. Jedini razlomci koji se razmatraju u osnovnoj školi su racionalni brojevi, pa rečenica ima smisla. No, u nastavi matematike u srednjoj školi razmatraju se primjerice i sljedeći razlomci: $\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{5}{\sqrt[3]{7}} \ldots$ To su iracionalni brojevi, za koje baš nije odmah jasno koji dio cjeline izražavaju.
- *Jednakost u kojoj se nalazi nepoznanica naziva se jednadžba*.
  Što je jednakost? Što je nepoznanica? U visokoškolskoj nastavi matematike važno je studente naučiti rješavati neke tipove diferencijalnih jednadžbi, a ne pokušava se strogo definirati što je to diferencijalna jednadžba. Tako i u osnovnoj školi treba učenike naučiti rješavati određene vrste jednadžbi, a da se ne pokuša definirati pojam jednadžbe.
- *Skup je pojam koji se ne definira*.
  Dio matematike koji se naziva teorija skupova bavi se problemom određivanja pojma skupa. U aksiomatskoj teoriji skupova aksiomima se implicitno pokušava definirati pojam skupa. Sigurno je učenicima u osnovnoj školi potpuno nerazumljiva rečenica: "Skup je pojam koji se ne definira". Predlažemo da se pojmu skupa pristupi potpuno na intuitivnom nivou. To bi primjerice značilo da se prilikom prvog navođenja naziva "skup prirodnih brojeva" kaže da nećemo govoriti "mnoštvo prirodnih brojeva" ili "cjelina prirodnih brojeva" već koristimo naziv "skup". Bilo kakvo ulaženje u problematiku definicije pojma skupa nije primjereno osnovnoškolskom nivou. O skupovima u nastavi matematike u RH možete čitati u [19].

Primjer. Sada navodimo nekoliko opisa pojma i definicija kuta koje smo pronašli u postojećim, odnosno u starijim, udžbenicima matematike za osnovnu školu u RH.

- *Kut je figura koja se sastoji od dva polupravca koji imaju zajednički vrh.*
- *Kut je dio ravnine između dva polupravca koji imaju zajednički vrh*.
- *Sustav od dvije zrake g_A i h_A koje izlaze iz iste točke A zovemo kutom. Točku A zovemo vrhom kuta, a zrake g_A i h_A njegovim krakovima*.
- *Dva polupravca x i y s istom rubnom točkom O dijele ravninu na dva dijela. Svaki se dio zove kut. Kut je uređena trojka $(x, y; \pi_0)$ koju čine dva polupravca sa zajedničkom rubnom točkom i jedan od dva dijela ravnine koju određuju ti polupravci*.
- *Rotacijom oko svoje početne točke zraka opisuje lik koji zovemo kutom, a bilo koja njezina točka, osim početne pri tome opisuje lik koji zovemo luk*.
- *Kut jest par što ga tvore dva različita polupravca a i b koji imaju zajednički početak O i ne pripadaju*

istom pravcu. Točka O zove se vrh, a polupravci a i b krakovi promatranog kuta.

- *Uređeni par polupravaca (x_1, x_2) s vrhom u točki O nazivamo kut u točki O.*
- *Klasu svih ekvivalentnih uređenih parova polupravaca nazivamo kutom s vrhom u točki O.*
  (To je definicija iz knjige B. Pavkovića i D. Veljana (vidi [10]). Ovdje nismo naveli o kojoj relaciji ekvivalencije se radi).

Smatramo da niti jedna od prethodnih "definicija" nije primjerena za osnovnu školu. Preporučamo da nastavnik jednostavno na ploči nacrta neke kutove, te kaže da te likove nazivamo kutovi. Kasnije, učenicima će taj pojam postati jasniji kada će se proučavati trokuti, četverokuti, kutovi u krugu. . .

Umjesto zaključka ovog dijela o uvođenju pojmova u nastavi matematike za kraj dajemo dvije preporuke. Kao što je i istaknuto u [9], mi također smatramo da je definicije bolje iskazivati tako da se koriste riječi "nazivamo" ili "kažemo". U nastavi matematike u osnovnoj školi ne smije se pisati "Definicija", pa upotrebom riječi "nazivamo" ili "kažemo" naglašavamo da se radi o definiciji. Sada navodimo nekoliko primjera kojima želimo istaknuti upotrebu riječi "nazivamo" i "kažemo".

Primjeri definicija	Naša preporuka iskaza
Paralelogram je četverokut koji ima dva para paralenih stranica.	*Četverokut koji ima dva para paralelnih stranica nazivamo paralelogram.*
Postotak je razlomak s nazivnikom 100.	*Razlomak s nazivnikom 100 nazivamo postotak.*
Prosti broj je onaj prirodan broj koji ima točno dva djeljitelja.	*Prirodan broj koji ima točno dva djeljitelja nazivamo prosti broj.*

Naša druga preporuka vezana uz uvođenje pojmova je zapravo ponavljanje već prije navedenog da u nastavi treba jasno istaknuti radi li se o opisu pojma ili definiciji. U stranim udžbenicima koje smo pregledali samo se ističu definicije i poučci. Naravno da postoji tekst s opisima pojmova, ali to nije posebno naglašeni tekst u smislu da je uokviren ili označen drugom bojom. Navodimo dva primjera opisa pojma i dva primjera definicija. *Dva trokuta su sukladna ako se mogu dovesti do poklapanja*, nije definicija već opis pojma sukladnosti (što znači "mogu se dovesti do poklapanja"?). Zatim, *Mnogokut je dio ravnine omeđen dužinama*, također nije definicija. (Za definiciju mnogokuta treba prvo definirati pojam poligonalne linije; vidi [10].)

U nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi svakako treba napisati definiciju kada se to može. Primjerice, *Kut čiji je vrh središte kružnice naziva se središnji kut.*, dobra je definicija. Zatim, *Jednadžbe koje imaju jednaka rješenja nazivamo ekvivalentne jednadžbe.*, dobra je i važna definicija. Svakako je ponekad bolje ostati pri ispravnoj intuitivnoj predodžbi nekog pojma nego davati definicije neprimjerene učenicima.

Sada ćemo dati odgovore na pitanja koja smo naveli u uvodu. U nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi u RH definirano je da nula nije prirodan broj. U svim domaćim i stranim udžbenicima iz matematičke logike i teorije skupova definira se da je nula prirodan broj. Zatim u Peanovim aksiomima navodi se nula kao prirodan broj. Tu situaciju s nulom želimo samo istaknuti kao primjer kako su dogovori u matematici jako važni.

U knjigama [5] i [10] navodi se da je trapez četverokut koji ima točno dva para paralenih stranica (iz toga slijedi da paralelogram nije trapez). U nekim udžbenicima matematike navodi se da je trapez četverokut koji ima barem jedan par paralelnih stranica (to bi značilo da su paralelogrami ujedno i trapezi). Taj "problem" nikako se ne smije prezentirati učenicima. Mi smatramo da to zapravo nije nikakav problem. Nastavnik samo treba obratiti pažnju što piše u udžbeniku koji koristi za nastavu.

S nulom se ne smije dijeliti jer ne možemo definirati kvocijent $x : 0$, za $x \in \mathbf{R}$, tako da ostanu sačuvana svojstva aritmetičkih operacija. Primjerice, ako su $x, y, z \in \mathbf{R}$ i $y \neq 0$, tada je $x : y = z$ ekvivalentno sa $x = y \cdot z$. Ako bi za $x \neq 0$ definirali da je $x : 0 = z$, tada bi slijedilo $x = 0 \cdot z = 0$, čime imamo kontradikciju s pretpostavkom $x \neq 0$. Lako se vidi da se ne može definirati ni kvocijent $0 : 0$.

U matematičkoj analizi izraz 0^0 naziva se neodređeni izraz. To znači da ako imamo primjerice dvije realne funkcije f i g, te točku $c \in \mathbf{R}$, tako da vrijedi $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ i $x \to cg(x) = 0$, tada $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ (koji je zapravo oblika 0^0), može biti jednak bilo kojem realnom broju, a ne mora ni postojati. No, u teorijskom računarstvu često se definira da je $0^0 = 1$ (kada se želi da neke funkcije budu totalne, odnosno da im domena bude čitav skup $\mathbf{N}$). U teoriji skupova definira se potencija kardinalnosti dvaju skupova A i B kao $card(A)^{card(B)} = card(\{f | f : B \to A\})$. Iz toga posebno slijedi $0^0 = card(\emptyset)^{card(\emptyset)} = card(\{f | f : \emptyset \to \emptyset\}) = card(\{\emptyset\}) = 1$. Ovim smo primjerom ponovno željeli istaknuti važnost dogovora u matematici.

U teoriji skupova se definira da je skup A prebrojiv ako postoji barem jedna bijekcija $f : A \to \mathbf{N}$. No, primjerice u teoriji vjerojatnosti se definira da je skup prebrojiv ako je konačan ili ako postoji bijekcija s tog skupa na skup $\mathbf{N}$. Ovdje nije baš situacija sasvim analogna kao s pitanjem je li nula prirodan broj. U literaturi na engleskom jeziku beskonačan prebrojiv skup se naziva *denumerable set*, a skup koji može biti konačan ili pak postoji bijekcija s tog skupa na $\mathbf{N}$ naziva se *countable set*. Taj problem naziva tek se treba razriješiti u matematičkoj zajednici u RH.

Iskazivanje tvrdnji u matematici

Osnovne tvrdnje u matematici nazivaju se aksiomi. To su tvrdnje za koje su se matematičari dogovorili da ih smatraju istinitim, te se one ne dokazuju. Za ilustraciju navodimo Peanove aksiome. To su sljedeće formule:

(1) $x' = y' \to x = y$

(2) $0 \neq x'$

(3) $x + 0 = x$

(4) $x + y' = (x + y)'$

(5) $x \cdot 0 = 0$

(6) $x \cdot y' = x \cdot y + x$

(7) shema aksioma indukcije:

$$A(0) \to \big(\forall x(A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x)\big),$$

gdje je $A(x)$ proizvoljna formula.[2]

Teorija određena Peanovim aksiomima naziva se Peanova aritmetika, te se kratko označava sa $\mathtt{PA}$. Peanovi aksiomi implicitno definiraju skup prirodnih brojeva i osnovne operacije na njemu. Matematičari su nakon puno rada sa skupom $\mathbf{N}$ odlučili da upravo navedene tvrdnje smatramo istinitim, te da bi one trebale biti dovoljne da s pomoću njih dokazujemo sve istinite tvrdnje o prirodnim brojevima.[3]

Tvrdnje u matematici, koje nisu aksiomi, obično imaju jedan od sljedećih naziva: lema, teorem, propozicija i korolar. U postojećim udžbenicima matematike za osnovnu školu u RH sve važne tvrdnje se ističu pod nazivom “poučak”. Smatramo da je to dobro. U stranim udžbenicima, koje smo pregledali, analogna je situacija. U njemačkim udžbenicima važne tvrdnje su u pravilu označene kao *Satze*, a u engleskim i američkim udžbenicima kao *Theorem*. Treba još istaknuti da se u stranim udžbenicima poučci izriču u strogom matematičkom obliku, Primjerice, u našim udžbenicima S-S-S poučak o sličnosti trokuta obično se izriče u sljedećem obliku:

Dva su trokuta slična ako su im duljine odgovarajućih stranica proporcionalne.

U stranim udžbenicima taj isti teorem je izrečen ovako:

Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ trokuti čije su duljine stranica a, b i c, odnosno a', b' i c'. Ako vrijedi $a : a' = b : b' = c : c'$ onda su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ slični.

Svakako preporučamo izricanje tvrdnji u obliku: “ako ... onda” (vidi i [9]). Na taj način se jasno

[2] Za potpuno razumijevanje Peanovih aksioma potrebno je nešto znanja matematičke logike. Primjerice, treba definirati pojam formule. Sve detalje možete vidjeti u [18]. Spomenut ćemo samo da je ciljana interpretacija simbola $+$ operacija zbrajanja, a simbola $\cdot$ je operacija množenja. Ciljana interpretacija simbola $'$ je tzv. funkcija sljedbenika, tj. funkcija Sc $: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, koja je definirana sa $\mathrm{Sc}(n) = n + 1$.

[3] K. Gödel je 1931. dokazao da za svaki aksiomatski sustav koji proširuje $\mathtt{PA}$ postoji istinita tvrdnja koja se ne može dokazati s pomoću Peanovih aksioma. To je tzv. Gödelov prvi teorem nepotpunosti. Popularan prikaz Gödelovih teorema nepotpunosti možete čitati u [16]. Zgodan primjer vezan uz Gödelov prvi teorem nepotpunosti dan je u [17].

ističe što su pretpostavke, a što zaključak. Zatim, taj oblik omogućava da se u kasnijem školovanju može govoriti o: nužnim i dovoljnim uvjetima, ekvivalenciji, obratu po kontrapoziciji, suprotnoj tvrdnji... U sljedećoj tablici navodimo nekoliko primjera tvrdnji, te dajemo naše preporuke iskaza.

Primjeri tvrdnji	Naša preporuka iskaza
Razlika cijelih brojeva je djeljiva s nekim brojem ako je svaki član razlike djeljiv tim brojem.	*Neka su a, b i c cijeli brojevi. Ako broj c dijeli a i broj c dijeli b tada broj c dijeli razliku $a - b$.*
U svakom trokutu nasuprot dviju stranica jednakih duljina leže kutovi jednakih veličina.	*Ako su u trokutu dvije stranice jednakih duljina tada su kutovi nasuprot tih stranica jednakih veličina.*
U rombu su dijagonale okomite.	*Ako je dani četverokut romb, tada su mu dijagonale okomite.*

Zaključak

Prije završnih rečenica prvo navodimo shemu aksiomatske izgradnje geometrije. Na taj način još jednom želimo istaknuti vezu znanosti i nastave.

Općenito	Primjer (geometrija)
Osnovni pojmovi	*točka, pravac, ravnina*
Aksiomi	*Na svakom pravcu su barem tri različite točke.*
Definicije	*okomiti pravci, trokut, kružnica*
Poučci	*Pitagorin poučak, S-S-S poučak o sukladnosti trokuta*

Matematički jezik je važan u nastavi matematike. Važno je koristiti pravilne simbole. Još je važnije isticati u nastavi samo definicije, a opisi pojmova ne smiju biti posebno istaknuti. Poučke treba iskazivati u pravilnom obliku.

LITERATURA

1/ L. Bunjački, V. Bobinski, *Simboli i oznake u udžbenicima osnovne škole*, Zbornik radova 1. kongresa nastavnika matematike, 2000., 37–47.

2/ B. Čulina, *Govoriš li matematički?*, Matka 6 (1997./98.), br. 23, 122–126.

3/ D. Glasnović Gracin, L. Cvikić, *Matematika i hrvatski standardni jezik*, MIŠ, br. 73, 2014., 101–109.

4/ I. Gusić, *Tri razine obrade matematičkih pojmova*, MIŠ, br. 8, 2001, 111–118.

5/ I. Gusić, *Matematički rječnik*, Element, Zagreb, 1995.

6/ Z. Kurnik, *Matematički pojam*, MIŠ, br. 11, 2001., 8–16.

7/ Z. Kurnik, *Metodika uvođenja novih pojmova*, MIŠ, br. 12, 2001., 55–59.

8/ Z. Kurnik, *Jezik u nastavi matematike*, MIŠ, br. 33, 2006., 99–105.

9/ Z. Kurnik, *Oblici matematičkog mišljenja*, Element, Zagreb, 2013.

10/ B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1.*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

11/ D. Popović, *Prijedlog simbola i oznaka za udžbenike osnovne škole*, Zbornik radova 1. kongresa nastavnika matematike, 2000., 278–280.

12/ Z. Šikić, *Definicije u matematici*, Matematika, stručno-metodički časopis, 1988., br. 1, 5–18.

13/ Z. Šikić, *Definicije u matematici – II dio*, Matematika, stručno-metodički časopis, 1989., br. 2, 19–36.

14/ Z. Šporer, *O definicijama u matematici,* Matematika, stručno-metodički časopis, 1987., br. 1, 5–11.

15/ G. Trupčević, D. Glasnović Gracin, *"Što bi bilo kad bi...?" Metodički razlozi ZA upotrebu pogodbenih rečenica u matematičkim zadatcima*, MIŠ, br. 74, 2014., 147–154.

16/ M. Vuković, *Gödelovi teoremi nepotpunosti*, MFL 206 (2002.), 74–79.

17/ M. Vuković, *Matematička indukcija i Goodsteinov teorem*, Poučak, 13 (2003.), 5–13.

18/ M. Vuković, *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2009.

19/ M. Vuković, M. Vuković, *U potrazi za skupovima*, Poučak, 41 (2010.), 61–67; 48–49.