| 1a | 1b |
| --- | --- |
| | |

JMBAG

IME I PREZIME

# Diferencijalni i integralni račun 2

## drugi kolokvij, 04.02.2019.

**Napomene:** Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 17 bodova)

   (a) (9 bodova) Ispitajte tip lokalnih ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane s

   $$f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(2xy + y^2).$$

   (b) (8 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije $g(x, y) = x - 2y$ na području $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ koje je trokut s vrhovima $(1, 1), (4, 2), (2, 3)$.

| 2a | 2b |
| --- | --- |
| | |

JMBAG

IME I PREZIME

# Diferencijalni i integralni račun 2

## drugi kolokvij, 04.02.2019.

2. (ukupno 17 bodova)

(a) (9 bodova) Neka je $S$ dio ravnine omeđen krivuljama $y = 4x - x^2$ i $y = x + 2$ te pozitivnim dijelom $y$-osi. Odredite granice integracije u integralima

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{i} \quad \iint_S f(x,y)\,dy\,dx.$$

Odredite površinu skupa $S$.

(b) (8 bodova) Izračunajte trostruki integral

$$\iiint_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

pri čemu je $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \le 4y,\ 0 \le z \le \frac{3\pi}{4}\}$.

| $3a$ | $3b$ |
|---|---|
| | |

JMBAG

IME I PREZIME

# Diferencijalni i integralni račun 2

## drugi kolokvij, 04.02.2019.

3. (ukupno 16 bodova)

   (a) (9 bodova) Nađite realne parametre $a, b$ takve da je vektorsko polje

   $$f(x,y) = (ae^{x^2+3y}xy^2, be^{x^2+3y}y^2 + 2e^{x^2+3y}y)$$

   zatvoreno. Za takve $a, b$ izračunajte integral tog polja duž bilo koje krivulje koja spaja točke $(e, 0)$ i $(0, 1)$.

   (b) (7 bodova) Neka je $\Omega$ područje u koordinatnoj ravnini omeđeno parabolom $y^2 = x+2$ slijeva i $y$-osi zdesna, a $C$ njegov pozitivno orijentirani rub. Koristeći Greenov teorem izračunajte

   $$\int_C \left(2xy\sin(x^2) - y^2\right)\, dx + \left(xy - \cos(x^2)\right)\, dy.$$

| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

JMBAG

IME I PREZIME

PROFESOR

# Diferencijalni i integralni račun 2

## drugi kolokvij, 04.02.2019.

4. (10 bodova) Dajte primjer plohe $f(x,y,z) = 0$ takve da je vektor $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ okomit na tangencijalnu ravninu plohe u točki $(0,0,0)$.

5. (10 bodova) Opišite pomoću $(x,y)$–koordinata i skicirajte područje integracije uzastopnog integrala

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\theta} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

te izračunajte isti.

6. (10 bodova) Neka je $T$ tijelo volumena

$$V = \iiint_T \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^3 \int_0^{6-x} \int_0^{2x} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Napišite formulu za volumen $V$ u obliku

$$V = \int_\square^\square \int_\square^\square \int_\square^\square \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

7. (10 bodova) Volumen tijela $T$ u cilindričnim koordinatama je dan s

$$V = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

Skicirajte $T$ i opišite ga u pravokutnim koordinatama.

8. (10 bodova) Dajte primjer dvije orijentirane krivulje $C_1$, $C_2$ od $(1,0)$ do $(0,1)$ za koje

$$\int_{C_1} \frac{-y}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \neq \int_{C_2} \frac{-y}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y.$$

| $1a$ | $1b$ |
| --- | --- |
| | |

JMBAG

IME I PREZIME

# Diferencijalni i integralni račun 2

## drugi kolokvij, 04.02.2019.

**Napomene:** Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 17 bodova)

   (a) (9 bodova) Ispitajte tip lokalnih ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane s

   $$f(x, y) = e^{\frac{y}{2}}(2x^2 + xy).$$

   (b) (8 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije $g(x, y) = y - 2x$ na području $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ koje je trokut s vrhovima $(1, 1), (4, 2), (2, 3)$.

| $2a$ | $2b$ |
|---|---|
| | |

JMBAG

IME I PREZIME

# Diferencijalni i integralni račun 2

## drugi kolokvij, 04.02.2019.

2. (ukupno 17 bodova)

   (a) (9 bodova) Neka je $S$ dio ravnine omeđen krivuljama $y = x^2 - 4x$ i $y = -x - 2$ te negativnim dijelom $y$-osi. Odredite granice integracije u integralima

   $$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{i} \quad \iint_S f(x,y)\,dy\,dx.$$

   Odredite površinu skupa $S$.

   (b) (8 bodova) Izračunajte trostruki integral

   $$\iiint_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

   pri čemu je $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq -4y,\ \frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{3\pi}{2}\}$.

| 3a | 3b |
| --- | --- |
| | |

JMBAG

IME I PREZIME

# Diferencijalni i integralni račun 2

## drugi kolokvij, 04.02.2019.

3. (ukupno 16 bodova)

   (a) (9 bodova) Nađite realne parametre $A, B$ takve da je vektorsko polje

   $$f(x,y) = (Ae^{y^2+2x}x^3 + 3e^{y^2+2x}x^2, Be^{y^2+2x}yx^3)$$

   zatvoreno. Za takve $A, B$ izračunajte integral tog polja duž bilo koje krivulje koja spaja točke $(1,0)$ i $(0,e)$.

   (b) (7 bodova) Neka je $\Omega$ područje u koordinatnoj ravnini omeđeno parabolom $x^2 = y+2$ odozdo i $x$-osi odozgo, a $C$ njegov pozitivno orijentirani rub. Koristeći Greenov teorem izračunajte

   $$\int_C \left(\sin(y^2) - xy\right)\, dx + \left(2xy\cos(y^2) - x^2\right)\, dy.$$

| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

JMBAG ____ IME I PREZIME ____ PROFESOR ____

# Diferencijalni i integralni račun 2

## drugi kolokvij, 04.02.2019.

4. (10 bodova) Dajte primjer plohe $z = f(x, y)$ takve da je vektor $\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ okomit na tangencijalnu ravninu plohe u točki gdje je $(x, y) = (0, 0)$.

5. (10 bodova) Opišite pomoću $(x, y)$–koordinata i skicirajte područje integracije uzastopnog integrala

$$\int_0^{\pi/3} \int_0^{1/\sin\theta} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

te izračunajte isti.

6. (10 bodova) Neka je $T$ tijelo volumena

$$V = \iiint_T \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{9-x^2} \int_0^{2-x} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Napišite formulu za volumen $V$ u obliku

$$V = \int_\square^\square \int_\square^\square \int_\square^\square \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

7. (10 bodova) Volumen tijela $T$ u cilindričnim koordinatama je dan s

$$V = \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

Skicirajte $T$ i opišite ga u pravokutnim koordinatama.

8. (10 bodova) Dajte primjer dvije orijentirane krivulje $C_1$, $C_2$ od $(1, 0)$ do $(0, 1)$ za koje

$$\int_{C_1} \frac{-y}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \neq \int_{C_2} \frac{-y}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y.$$