

## GRUPE I KOMBINATORIKA

Matija Bašić  
5. travnja 2022.

**Pojmovi s predavanja** - video predavanje

simetrije trokuta, pojam grupe, rotacije - ciklička grupa, permutacije  $S_n$ , simetrije sfere, grupe  $GL(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SL(n)$ ,..., homomorfizam, simetrije kvadrata, prezentacija grupe, diedarska grupa, Cayley, podgrupa, Lagrange, red elementa, klasa konjugacije, djelovanje, orbita, stabilizator, Burnsideova lema

**Zadaci s predavanja**

1. Odredite grupu simetrija kocke.
2. Neka je  $p$  prost broj i neka je  $(F_n)$  Fibonaccijev niz. Dokažite da  $p$  dijeli  $F_{2p(p^2-1)}$ .
3. Na kružnicu stavljamo crvene i plave kuglice. Na početku se na kružnici nalaze samo dvije crvene kuglice. Dozvoljeni su sljedeći potezi:
  - i) dodati jednu crvenu kuglicu i promijeniti boju svake od dviju njoj susjednih kuglica (crvenu u plavu i obratno);
  - ii) maknuti jednu crvenu kuglicu i promijeniti boju svake od dviju njoj susjednih kuglica.

Možemo li nizom takvih poteza postići da na kružnici budu samo dvije plave kuglice?

4. Na koliko načina možemo obojati strane kocke u  $n$  boja, pri čemu dva bojanja smatramo identična ako se jedno iz drugog može dobiti rotacijom kocke?

**Domaću zadaću treba predati do petka 22. travnja 2022.**

**Potrebno je riješiti barem 7 zadataka.**

**Domaća zadaća**

1. Neka je  $G$  grupa čiji generatori  $a$  i  $b$  zadovoljavaju  $a^{-1}b^2a = b^3$ ,  $b^{-1}a^2b = a^3$ . Mora li  $G$  biti trivijalna?
2. Neka je  $A$  neprazan skup, te  $f: A^3 \rightarrow A$  preslikavanje koje zadovoljava:
  - $f(x, y, y) = x = f(y, y, x)$  za sve  $x, y \in A$ ;
  - $f(f(x_1, x_2, x_3), f(y_1, y_2, y_3), f(z_1, z_2, z_3)) = f(f(x_1, y_1, z_1), f(x_2, y_2, z_2), f(x_3, y_3, z_3))$  za sve  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \in A$ .

Dokažite da za proizvoljan fiksni  $a \in A$  operacija  $x + y := f(x, a, y)$  definira strukturu komutativne grupe  $(A, +)$ .

3. Koristeći teorem o orbiti i stabilizatoru dokažite **Cauchyevu lemu**: Neka je  $G$  konačna grupa i  $p$  prost broj koji dijeli red grupe  $|G|$ . Tada  $G$  ima element reda  $p$ .
4. Neka je  $p$  prost broj i  $G$  konačna grupa s točno  $n$  elemenata reda  $p$ . Dokažite da je  $n = 0$  ili  $p$  dijeli  $n + 1$ .

5. Neka je  $G$  podgrupa grupe permutacija  $S_n$  i pretpostavimo da za svaki  $\pi \in G$ ,  $\pi \neq id$  postoji jedinstveni  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  takav da  $\pi(k) = k$ . Dokažite da postoji  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  takav da je  $\pi(k) = k$  za sve  $\pi \in G$  (tj. da je taj  $k$  isti za sve  $\pi$ ).
6. Dokažite Burnsideovu lemu: Ako grupa  $G$  djeluje na konačnom skupu  $X$ , onda je

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

pri čemu je  $X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$  skup invarijanti od  $g$ .

7. Odredite broj bojanja ploče  $k \times k$  u  $n$  boja pri čemu identična smatramo bojanja koja se mogu dobiti rotacijom ili refleksijom ploče.
8. Svako od 9 polja  $3 \times 3$  ploče želimo obojati u  $n$  boja. Odredite ukupan broj bojanja ako identičnima smatramo bojanja koja se mogu dobiti permutacijom redaka i permutacijom stupaca.
9. Na ploči  $8 \times 8$  svako polje je obojeno crno ili bijelo tako da svaki red i svaki stupac imaju paran broj crnih polja. Dva bojanja smatramo identičnima ako se mogu dobiti rotacijom ili refleksijom ploče. Odredite broj različitih bojanja.
10. Uspon permutacije  $\sigma \in S_n$  je svaki indeks  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  takav da je  $\sigma(j) < \sigma(j+1)$ . Neka je  $E(n, k)$  broj permutacija  $\sigma \in S_n$  koje imaju točno  $k$  uspona. Kombinatorno dokažite rekurziju  $E(n, k) = (k+1)E(n-1, k) + (n-k)E(n-1, k-1)$ .  
*Usput, nije dio zadatke: prisjetite se definicija Stirlingovih brojeva prve i druge vrste i pripadnih rekurzija (dokažite ih kombinatorno!).*
11. Dokažite da su konjugacijske klase u  $S_n$  određene rastavom permutacija na cikluse, tj. dvije permutacije su konjugirane ako i samo ako imaju iste ciklusne tipove (tj. multi-skupove duljina ciklusa).

### Teži zadaci

12. Odredite grupu simetrija tetraedra, dodekaedra i ikozaedra, te odredite sve konačne podgrupe grupe izometrija 3-dimenzionalnog euklidskog prostora (pazite na simetrije prizmi koje nisu Platonova tijela!).
13. Postoji li konačna grupa  $G$  s normalnom podgrupom  $H$  takvom da za pripadne grupe automorfizama vrijedi  $|Aut(H)| > |Aut(G)|$ ?
14. Dokaži da postoji konstanta  $c > 0$  takva da u svakoj netrivialnoj konačnoj grupi  $G$  postoji niz duljine najviše  $c \ln |G|$  sa svojstvom da je svaki element od  $G$  produkt elemenata nekog podniza tog niza.