
DISKRETNA MATEMATIKA

VJEŽBE

Doprinos:

Matija Bašić, Marko Božić, Mario Berljafa, Bruno Brščić, Marko Erceg, Ivan Gavran, Marcela Hanzer, Nina Kamčev, Ivan Krijan, Maroje Marohnić, Tomislav Pejković, Ivan Puljiz, Petar Sruk i dr.

Uredili:

Adrian Beker, Nina Kamčev, Ivan Novak.

24. rujna 2026.

Predgovor

Ova skripta služi kao priručnik studentima i nastavnicima, ali ne zamjenjuje samostalan rad i pohađanje vježbi. Komplementarna je s predavanjima, koja su uglavnom pokrivena u skripti I. Nakića.

Diskretna matematika je specifičan kolegij jer je uglavnom bazirana na zadacima, pogotovo prvo poglavlje o osnovama prebrojavanja. (Na većini ostalih kolegija naglasak je na razvoju teorije.) Nadalje, prvo poglavlje je većinom gradivo srednje škole. Iz tih dvaju razloga, kolegij zahtijeva puno samostalnog rada na rješavanju zadataka. U tu svrhu, svaki tjedan vježbi se sastoji od preliminarnih i *glavnih* zadataka. Od studenata se očekuje da su prije vježbi riješili preliminarne zadatke (po potrebi uz pomoć kolega, demonstratora i nastavnika). Korisno je i *pokušati* riješiti glavne zadatke kako bi mogli aktivno sudjelovati u vježbama.

Sadržaj

I	Osnovni principi prebrojavanja	3
1	Uvod	3
1.1	Ponavljanje i preliminarni zadaci	3
1.2	Glavni zadaci	4
2	Permutacije i kombinacije	7
2.1	Preliminarni zadaci	7
2.2	Glavni zadaci	10
2.3	Zadaci za vježbu	12
3	Kombinacije i permutacije s ponavljanjem	13
3.1	Ponavljanje i preliminarni zadaci	13
3.2	Glavni zadaci	15
4	Permutacije i kombinacije: dokazivanje identiteta	17
4.1	Ponavljanje i preliminarni zadaci	17
4.2	Glavni zadaci	19
4.3	Daljnji zadaci	21
5	Sinteza 1 i uvod u rekurzije	22
5.1	Preliminarni zadaci	22
5.2	Glavni zadaci	22
5.3	Uvod u rekurzivno rješavanje zadataka	24
II	Rekurzije, funkcije izvodnice i formula uključivanja i isključivanja	26
6	Rekurzivne relacije	26
6.1	Ponavljanje i preliminarni zadaci	26
6.1.1	Homogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima	26
6.2	Glavni zadaci: homogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima	27
6.3	Nehomogene Linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima	28
6.4	Daljni zadaci	30
7	Sinteza II	31
7.1	Preliminarni zadaci	31
7.2	Motivacija za funkcije izvodnice	31
8	Funkcije izvodnice	32
8.1	Ponavljanje i preliminarni zadaci	32
8.2	Glavni zadaci	33
8.3	Daljnji zadaci	38
9	Formula uključivanja i isključivanja	38
9.1	Ponavljanje i preliminarni zadaci	38
9.2	Glavni zadaci	39

III	Teorija grafova	41
10	Osnove teorije grafova i stabla	41
10.1	Ponavljjanje i preliminarni zadaci	41
10.2	Glavni zadaci	43
10.3	Daljnji zadaci	46
11	Stabla	46
11.1	Ponavljjanje i preliminarni zadaci	46
11.2	Glavni zadaci	48
12	Planarni grafovi	51
12.1	Ponavljjanje i preliminarni zadaci	51
12.2	Glavni zadaci	52
12.3	Daljnji zadaci	55
13	Eulerovi i Hamiltonovi grafovi	55
13.1	Ponavljjanje i preliminarni zadaci	55
13.2	Glavni zadaci	57
13.3	Daljnji zadaci	60

Dio I

Osnovni principi prebrojavanja

U ovom poglavlju je bitan naglasak na zadacima, i potrebno je mnogo samostalne i grupne vježbe za savladavanje gradiva.

Na prvim vježbama ćemo proći nekoliko zadataka bez puno uvođenja terminologije – svrha toga je da studenti shvate da se većina zadataka može riješiti i bez sistematičnog znanja.

Zatim ćemo uvesti terminologiju permutacija i kombinacija s ponavljanjem.

1 Uvod

1.1 Ponavljjanje i preliminarni zadaci

Ključne riječi i notacija: princip sume, princip produkta, princip komplementa, bijekcija, princip kvocijenta, $n!$.

Broj elemenata nekog konačnog skupa A označavat ćemo s $|A|$. **Partitivni skup** $\mathcal{P}(A)$ je skup koji sadrži sve podskupove skupa A .

Koji se principi koriste u sljedećim primjerima?

Primjer 1.1. Iz grada A u grad B možemo doći brodom, autom ili avionom. Postoje dva morska, dva cestovna i tri zračna puta. Na koliko načina možemo doći iz grada A u grad B?

Rješenje. Označimo s AB skup svih puteva iz grada A u grad B, a s M , Z i C redom morske, zračne i cestovne putove. Jasno je da vrijedi

$$M \cap Z = Z \cap C = C \cap M = \emptyset,$$

stoga možemo primijeniti pravilo sume:

$$|AB| = |M \cup Z \cup C| = |M| + |Z| + |C| = 2 + 3 + 2 = 7.$$

Primjer 1.2. Da bismo iz grada A došli u grad D, moramo proći kroz gradove B i C. Iz grada A u grad B možemo doći na 2 načina, iz B u C na 5, a iz grada C u grad D na 3 načina. Na koliko načina možemo doći iz grada A u grad D?

Rješenje. Neka je AD skup svih puteva između gradova A i D, AB skup svih puteva između A i B, BC skup svih puteva između B i C, te CD neka je skup svih puteva između gradova C i D. Svakom $p \in AD$ možemo

bijektivno pridružiti uređenu trojku (p_1, p_2, p_3) , gdje je $p_1 \in AB$, $p_2 \in BC$, $p_3 \in CD$. Sada primjenom principa bijekcije i pravila produkta dobivamo da je

$$|AD| = |AB \times BC \times CD| = |AB| \cdot |BC| \cdot |CD| = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30.$$

Zadatak 1.3. Odredite broj prirodnih djelitelja broja 600.

[Rj. 24]

Uputa. Broj prirodnih djelitelja prirodnog broja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ prikazanog u raspisu na proste faktore je $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$. Dokažite!

Zadatak 1.4. Odredite broj uređenih parova nenegativnih cijelih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju nejednadžbu

$$x^2 + y^2 \leq 5.$$

[Rj. 8]

Uputa. Ukoliko je $x \geq 3$ jasno je da rješenja ne postoje, dakle, preostaje promotriti slučajeve kada je $x \in \{0, 1, 2\}$. Kako bi došli do konačnog rješenja, je li potrebno broj rješenja u svakom pojedinom slučaju pomnožiti ili zbrojiti?

Još jedan način je da promotrimo skupove definirane sa $S_i = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 = i\}$, $i \in \{0, 1, \dots, 5\}$. Je li potrebno pomnožiti ili zbrojiti međusobno brojeve elemenata skupova S_i ?

Zadatak 1.5. Na koliko načina možemo 6 vrsta voća kojeg imamo u neograničenim količinama podijeliti između 10 djece tako da svako dijete dobije po jednu voćku?

[Rj. 6¹⁰]

Napomena 1.1. Kada voća ne bismo imali u neograničenim količinama, zadatak bi bio puno složeniji.

Primjer 1.6. Koliko ima prirodnih brojeva manjih (strogo) od 10^n koji sadrže znamenku 4?

Rješenje. Jednostavnije nam je prebrojati koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^n koji *ne* sadrže znamenku 4. Prirodnih brojeva manjih od 10^n ima $10^n - 1$. Sve prirodne brojeve manje od 10^n možemo promatrati kao n -znamenaste (na početku može biti nekoliko nula, jedini koji nam “ne valja” je onaj koji sadrži samo nule). Dakle, prirodnih brojeva manjih od 10^n koji ne sadrže znamenku 4 ima $9^n - 1$, svaka znamenka može biti bilo koja osim 4, te još moramo odbaciti slučaj kada su sve znamenke jednake 0. Konačno, odgovor na pitanje zadatka je

$$(10^n - 1) - (9^n - 1) = 10^n - 9^n.$$

Pokušajte riješiti prethodni primjer bez principa komplementa za $n = 3$. Koje je rješenje jednostavnije?

Primjer 1.7. Koliko ima brojeva sastavljenih od znamenaka broja 1113333344455678?

Rješenje. Rješenje je $\frac{16!}{3!5!3!2!}$, koristeći princip kvocijenta.

Kasnije ćemo za ovakve poretke uvesti naziv *permutacije multiskupa*.

1.2 Glavni zadaci

Primjer 1.8. Neka su definirani skupovi $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ te

$$S = \{(a, b, c) : a, b, c \in X, a < b, a < c\}.$$

Koliko je $|S|$?

Rješenje. Broj a može biti bilo koji broj iz skupa $X \setminus \{100\}$, fiksiramo li broj a iz tog skupa, broj b i broj c

tada, zbog uvjeta možemo izabrati na $100 - a$ načina (bilo koji broj između $a + 1$ i 100 , uključivo). Konačno, traženi broj je

$$|S| = \sum_{a=1}^{99} (100 - a)^2 = \sum_{a=1}^{99} a^2 = \frac{99 \cdot 100 \cdot 199}{6} = 328350.$$

Koristili smo pravilo sume, i unutar sume, pravilo produkta.

Zadatak 1.9. Koliko ima permutacija (poredaka) skupa $\{1, 2, \dots, 7\}$ takvih da nikoja dva od $1, 2, 3$ nisu susjedni?

Rješenje. Poredajmo prvo brojeve $4, \dots, 7$ na $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ načina. Sada je potrebno ubaciti $1, 2, 3$ negdje između ta 4 broja. Broj mjesta je 5 (dozvoljeno je staviti znamenku na početak i na kraj). Odaberemo jedno mjesto za broj 1 (5 mogućnosti), 2 (4 mogućnosti) i 3 (3 mogućnosti). Konačno rješenje je

$$4! \cdot 60.$$

Napomenimo da se *princip kvocijenta* može prirodno iskazati i jezikom relacija ekvivalencije: uostalom, relacije ekvivalencije na skupu S točno odgovaraju particijama tog skupa. Naime, neka je C skup klasa ekvivalencije neke relacije $\sim$ na konačnom skupu S . Ako je svaka klasa ekvivalencije veličine r , onda vrijedi

$$|C| = \frac{|S|}{r}.$$

Primjer 1.10. (Prvi kolokvij 2016/2017, 1. zadatak)

(a) Koliko ima brojeva sastavljenih od znamenaka broja 1113333344455678 ?

(b) Koliko ima brojeva sastavljenih od znamenaka broja 1113333344455678 ako su znamenke 6 i 8 s različitih strana znamenke 7?

Rješenje: Za (a), rješenje je $\frac{16!}{3!5!3!2!}$.

Za (b), dat ćemo nekoliko različitih rješenja.

1. način: Rasporedimo znamenke broja 1113333344455 na $\frac{13!}{3!5!3!2!}$ načina. Sada je potrebno još ubaciti preostala 3 broja 6, 7, 8 između već raspoređenih 13 znamenaka. Možemo na 2 načina odlučiti hoće li 6 biti prije ili nakon 7. Nadalje, ako 7 stavimo na mjesto između $(k - 1)$ -te i k -te znamenke, $k \in \{1, 2, \dots, 14\}$, pri čemu 0. i 14. "znamenku" gledamo kao na prazninu, izbora mjesta za znamenku lijevu od 7 će biti k , a za znamenku desno od 7 će biti $(15 - k)$. Ukupan broj načina za ubaciti ta tri broja je

$$\sum_{k=1}^{14} k(15 - k) = 15 \cdot \frac{14 \cdot 15}{2} - \frac{14 \cdot 15 \cdot 29}{6} = 560.$$

Dakle, konačno rješenje je

$$\frac{13!}{3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 2 \cdot 560 = 807206400.$$

2. način Broj načina za ubaciti ta 3 broja smo mogli odrediti i koristeći metodu kuglica i štapića. Trebamo odabrati tri mjesta između, prije ili nakon tih 13 znamenki. Ako s x_0 označimo broj odabranih mjesta prije prve, s x_1 između prve i druge znamenke, $\dots$, s x_{13} nakon zadnje znamenke, vidimo da je dovoljno odrediti broj nenegativnih rješenja

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{13} = 3,$$

kojih znamo da je $\binom{3+13}{13} = \binom{16}{3} = 560$.

3. način Ovaj zadatak se može riješiti korištenjem pogodne relacije ekvivalencije (tj. pogodne particije brojeva sa znamenkama 1113333344455678).

Za dva rasporeda 16 znamenaka 1113333344455678 recimo da su *ekvivalentna* ako se jedan iz drugog može dobiti s konačno mnogo zamjena mjesta znamenkama 6, 7, 8. Ovo je očito relacija ekvivalencije pa se skup svih permutacija raspada na klase po ovoj relaciji. Primijetimo da svaka klasa ima $3!$ elemenata - ekvivalentni rasporedi nekom fiksnom su svi oni gdje 6, 7, 8 'pomiješamo' na proizvoljan način, a ostale znamenke ostavimo na svom mjestu. Uočimo također da će svaka klasa imati točno 2 dobra rasporeda - ona gdje je 7 između

znamenaka 6 i 8. Dakle, konačno rješenje zadatka će biti dvostruko veće od broja klasa. No, kako svaka klasa ima 6 elemenata vrijedi

$$6 \cdot \text{broj klasa} = \text{ukupan broj rasporeda} = \frac{16!}{3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2!}.$$

Dakle, konačno rješenje je

$$2 \cdot \frac{16!}{6 \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2!} = 807206400.$$

Primjer 1.11. Koliko ima parnih brojeva između 20000 i 70000 takvih da su znamenke svakog broja međusobno različite.

Rješenje. Na prvom mjestu može se nalaziti bilo koja znamenka iz skupa $\{2, 3, \dots, 6\}$. Moramo posebno promotriti slučaj kada je prva znamenka parna, te kada je neparna.

- 1° Ukoliko je prva znamenka parna, nju možemo izabrati na 3 načina. Zadnju znamenku tada možemo izabrati na 4 načina (bilo koja parna znamenka osim one koja je već odabrana kao prva), a preostale tri znamenke na $8 \cdot 7 \cdot 6$ načina. Dakle, u ovom slučaju imamo $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ načina.
- 2° Ukoliko je prva znamenka neparna, nju možemo izabrati na 2 načina, zadnju na 5, a preostale 3 opet na $8 \cdot 7 \cdot 6$, što nam daje još $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

Dakle, konačno rješenje je $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot (3 \cdot 4 + 2 \cdot 5) = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 22 = 7392$.

Zadatak 1.12.

- (a) S koliko nula završava broj $100!$?
- (b) S kojim eksponentom prost broj p ulazi u rastav broja $n!$ na proste faktore?

Rješenje.

- (a) Primijetimo da će broj $100!$ završiti s onoliko nula koliko puta se broj 5 pojavljuje u njegovom raspisu na proste faktor. (Za svaki par brojeva 2 i 5 u raspisu broja $n!$ na proste faktore dobijemo jednu nulu na njegovom kraju, ali broj 2 se sigurno pojavljuje više puta od broja 5.) Konačno, broj $100!$ završava s $\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 24$ nule. (U (b) dijelu zadatka je objašnjeno zašto vrijedi korištena formula.)
- (b) Prost broj p se u raspisu broja $n!$ na proste faktore pojavljuje onoliko puta koliko ulazi u raspis svakog od brojeva iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ na proste faktore. Broj p se u svim brojevima koji su djeljivi s p , a nisu djeljivi s p^2 pojavljuje jednom, u svim onima koji su djeljivi s p^2 , ali nisu s p^3 još jednom, itd. Dakle, ukupni broj pojavljivanja prostog broja p u raspisu broja $n!$ na proste faktore je $\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Napomena 1.2. Suma $\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ je konačna, jer za sve prirodne brojeve k takve da je $p^k > n$ vrijedi $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$.

Primjer 1.13. Na svako polje ploče $n \times n$ upisan je broj koji je jednak broju pravokutnika koji sadrže to polje i koji su sastavljeni od polja ploče. Odredite sumu svih upisanih brojeva.

Rješenje. Prije samog rješavanja promotrimo kako ploča izgleda u slučajevima $n = 2$ i $n = 3$:

4	4	
4	4	

,

9	12	9
12	16	12
9	12	9

.

Uvedimo koordinatni sustav kao na slici.

n						
$\vdots$						
j				b		
$\vdots$						
2						
1						
	1	2	...	i	...	n

Svakom polju s brojem b odgovara točno b pravokutnika koji sadrže to polje. Zato je suma svih brojeva b jednaka sumi površine svih pravokutnika na ploči. Svaki pravokutnik je jednoznačno određen svojim dimenzijama i pozicijom donjeg lijevog polja. x koordinatu donjeg lijevog polja pravokutnika dimenzija $i \times j$ možemo odabrati na $n - i + 1$ načina (bilo koji broj između 1 i $n - i + 1$, uključivo), analogno, y koordinatu možemo odabrati na $n - j + 1$ načina. Dakle, pravokutnika dimenzija $i \times j$ na danoj ploči ima $(n - i + 1)(n - j + 1)$. Konačno, traženo rješenje je

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n [(n - i + 1)(n - j + 1) \cdot i \cdot j] \right\} &= \sum_{i=1}^n \left\{ [(n - i + 1) \cdot i] \cdot \sum_{j=1}^n [(n - j + 1) \cdot j] \right\} \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^n [(n + 1) \cdot i - i^2] \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n [(n + 1) \cdot j - j^2] \right\} \\
 &= \left[(n + 1) \cdot \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n i^2 \right]^2 \\
 &= \left[(n + 1) \cdot \frac{n(n + 1)}{2} - \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \right]^2 \\
 &= \left[\frac{n(n + 1)(n + 2)}{6} \right]^2.
 \end{aligned}$$

Napomena. Alternativno, zadatak možemo riješiti direktnim brojanjem. Zaista, broj pravokutnika koji sadrže polje (i, j) jednak je $ij(n - i + 1)(n - j + 1)$ (faktori su redom brojevi načina za izabrati x i y koordinatu donjeg lijevog te gornjeg desnog vrha) pa odgovor dobivamo sumiranjem na isti način kao i prije.

2 Permutacije i kombinacije

Ključne riječi i notacija: permutacija, k -permutacija, kombinacija, $n!$, $\binom{n}{k}$.

2.1 Preliminarni zadaci

Zadatak 2.1. Dokažite indukcijom da za konačan skup S i $|S| = n$ vrijedi $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

Primjer 2.2. Neka je $A = \{a, b, c, d\}$. Napišite sve 2-permutacije skupa A .

Rješenje. Iz definicije odmah slijedi da je rješenje $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$.

Primijetite da aa, bb, cc, dd nisu permutacije, već *permutacije s ponavljanjem*. Također poredak nam je bitan, pa npr. $ba \neq ab$. Ukoliko poredak nije bitan riječ je o kombinacijama, no o tome više u sljedećem poglavlju. Sada ćemo odrediti koliko ima k -permutacija skupa od n elemenata. Prisjetimo se definicije faktorijela:

Primjer 2.3. Odredite sve 2-kombinacije skupa $\{a, b, c, d\}$.

Rješenje. $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$

Napomena 2.1. Sada je, naravno, $\{a, b\} = \{b, a\}$, tj. kod kombinacija nam za razliku od permutacija nije bitan poredak. Kao i kod permutacija elementi se ne smiju ponavljati pa $\{a, a\}$ nije kombinacija već *kombinacija s ponavljanjem* (vidi iduće poglavlje).

Prisjetimo se, broj k -permutacija n -članog skupa je

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Broj k -kombinacija skupa od n elemenata jednak je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Napomena 2.2. Za $k > n$ definiramo $\binom{n}{k} = 0$.

Dakle, ako biramo k elemenata iz n -članog skupa, ovisno o uvjetima zadatka, broj odabira možemo sistematizirati uz pomoć sljedeće tablice.

	redoslijed važan	redoslijed nevažan (kombinacije)
s ponavljanjem	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
bez ponavljanja	$n(n-1) \dots (n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

Za gornje desno polje, odgovor je malo kompliciraniji – metodom kuglica i štapića ćemo se detaljnije baviti za nekoliko tjedana. Za zagrijavanje, postavljamo pitanje za posebne slučajeve (bez korištenja formule!).

Zadatak 2.4. Imamo neograničenu zalihu voća n različitih vrsta. Na koliko načina možemo odabrati k voćki

- (a) za $n = 2$ ili $n = 3$,
- (b) za $k = 2$, ili $k = 3$?

Primjer 2.5. Koliko se nizova slova duljine 5 može sastaviti iz hrvatske abecede, tako da su na prvom i petom mjestu različiti samoglasnici, a na ostala tri mjesta međusobno različiti suglasnici. (Hrvatska abeceda ima 30 slova, od kojih su 5 samoglasnici, a ostalo suglasnici.)

Rješenje. Na prvo mjesto možemo postaviti bilo koji od 5 samoglasnika, pa nam za peto mjesto ostaju 4 izbora, točnije, postoji $P(5, 2)$ načina za popuniti prvo i peto mjesto. Drugo, treće i četvrto mjesto možemo popuniti na ukupno $P(25, 3)$ načina. Sada, za bilo koji način popunjavanja prvog i petog mjesta, postoji $P(25, 3)$ načina popunjavanja preostala tri mjesta. Dakle, konačno rješenje je

$$P(5, 2) \cdot P(25, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 276000.$$

Primjer 2.6. Na zabavi je 7 mladića i 3 djevojke. Na koliko načina ljude možemo posložiti u red tako da

- (a) djevojke se nalaze na prva tri mjesta;
- (b) tri djevojke čine jedan blok;
- (c) mladići se nalaze na prvoj i posljednjoj poziciji i nema susjednih djevojaka.

Rješenje.

- (a) Djevojke mogu stati u red na $3!$ načina, a mladići na $7!$ načina pa je konačno rješenje $3! \cdot 7!$. Zašto smo koristili princip produkta, a ne princip sume?

- (b) Blok od tri djevojke možemo postaviti na 8 različitih mjesta (tako da je prva djevojka u bloku na jednom od 1. do 8. mjesta u redu, uključivo). Djevojke unutar toga bloka možemo rasporediti na $3!$ načina. Mladiće moramo rasporediti na preostalih 7 mjesta, što možemo učiniti na $7!$ načina. Dakle, rješenje je $8 \cdot 3! \cdot 7! = 3! \cdot 8!$.
Alternativan, ali sličan argument: shvatimo blok od 3 djevojke kao jednu osobu te rasporedimo $7 + 1 = 8$ osoba u niz na $8!$ načina. Zatim još permutiramo djevojke unutar bloka na $3!$ načina.
- (c) Rasporedimo najprije mladiće u red, to možemo učiniti na $7!$ načina. Sada u red moramo smjestiti još 3 djevojke. Prvu djevojku možemo smjestiti između prvog i drugog, drugog i trećeg, itd. šestog i sedmog mladića. Dakle, za prvu djevojku imamo 6 načina, slično, nakon što smo smjestili prvu djevojku, za drugu imamo 5 načina, a konačno za treću 4 načina. Rješenje je $7! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Primjer 2.7. Na koliko načina možemo odabrati grupu od 5 osoba iz grupe od 4 profesora i 7 studenata

- (a) ako nema restrikcija,
(b) tako da u grupi budu točno 2 profesora,
(c) tako da u grupi budu barem 3 profesora,
(d) tako da određeni profesor i student ne budu u grupi?

Rješenje.

- (a) Iz grupe od $4 + 7 = 11$ ljudi moramo izabrati 5, odgovor je $\binom{11}{5}$ načina.
(b) 2 profesora možemo izabrati na $\binom{4}{2}$ načina, a preostalih troje ljudi na $\binom{7}{3}$, rješenje je $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3}$.
(c) Posebno promatramo dva (disjunktna!) slučaja.

1° Odabrana su točno 3 profesora, imamo $\binom{4}{3} \cdot \binom{7}{2} = 4 \cdot \binom{7}{2} = 84$ načina.

2° Odabrana su točno 4 profesora, imamo $\binom{4}{4} \cdot \binom{7}{1} = 7$ načina.

Dakle, imamo sveukupno 91 načina.

Napomena 2.3. Netočno bi bilo najprije odabrati 3 profesora, a zatim od preostalih 8 ljudi još dvije osobe. Više puta bi brojali istu situaciju u kojoj su sva četiri profesora izabrana. Zašto? Od pomoći vam može biti da pojednostavite zadatak tako da imate 2 profesora i jednog studenta te tražite dvočlanu grupu s barem jednim profesorom.

- (d) Kako ne smijemo izabrati jednog profesora i jednog studenta, preostaje nam 9 ljudi od kojih moramo izabrati grupu od 5 ljudi, odnosno, imamo $\binom{9}{5}$ načina.

Primjer 2.8. Na koliko načina možemo podijeliti 240 studenata u 3 jednakobrojne skupine tako da

- (a) prva skupina ide na vježbe iz Vjerojatnosti, druga na vježbe iz Diskretne matematike, a treća na Engleski,
(b) sve tri skupine idu na vježbe iz Diskretne matematike?

Rješenje.

- (a) Najprije odaberemo studente za prvu skupinu, zatim od ostatka studente za drugu skupinu, a preostale studente smjestimo u treću skupinu. što nam daje $\binom{240}{80} \cdot \binom{160}{80}$ načina.
- (b) Razmišljamo isto kao u (a) dijelu zadatka, samo što nam u ovom slučaju nije bitno u koju će prostoriju koja grupa ići (u svima se slušaju vježbe iz Diskretne matematike), pa je odgovor $\frac{\binom{240}{80} \cdot \binom{160}{80}}{3!}$ načina.

2.2 Glavni zadaci

Primjer 2.9. (Vjerojatnosti u pokeru) U pokeru, igrači dobivaju skup od 5 karata iz standardnog špila od 52 karte. Svaka karta ima jednu od 4 boje, i jedan od 13 brojeva. Radi jednostavnosti, recimo da su brojevi $\{1, 2, 3, \dots, 13\}$. Dobiveni skup od 5 karata se naziva *rukom*.

- (a) Koliko različitih poker ruku se može podijeliti iz standardnog špila od 52 karte?
- Želimo odabrati 5 karata iz špila od 52. Broj načina na koji to možemo napraviti je dan binomnim koeficijentom

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52!}{5!47!} = 2598960.$$

- (b) Koliko poker ruku je *boja* (flush)? (Boja je ruka u kojoj su sve karte iste boje, ali nisu nužno u nizu.)
- Moramo odabrati 5 karata iste boje. Budući da svaka boja ima 13 karata, broj načina za odabir 5 karata iz jedne boje je $\binom{13}{5} = \frac{13!}{5!(13-5)!} = 1287$. Budući da možemo odabrati bilo koju od 4 boje, ukupan broj ruku koje su boje je $4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$.
- (c) Koliko poker ruku su *dva para*? (Dva para je ruka gdje imamo 2 karte jednog broja, 2 karte drugog broja, i 1 kartu trećeg broja.)
- Biramo brojeve za dva para, $\binom{13}{2} = 78$ mogućnosti. Za svaki par brojeva, biramo 2 karte iz 4 dostupne boje, $\binom{4}{2} = 6$, pa je broj načina za odabir karata za dva para $6 \cdot 6 = 36$. Sada biramo broj za petu kartu. Preostalo je 11 brojeva, i biramo jednu kartu iz 4 dostupne s tim brojem, ukupno 44 opcije. Ukupan broj ruku s dva para je:

$$\binom{13}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 4 = 78 \cdot 36 \cdot 11 \cdot 4 = 123552.$$

- (d) Koliko poker ruku su *tris*? (Tris je ruka u kojoj imamo 3 karte jednog broja i 2 karte različitih ostalih brojeva.)
- Prvo biramo broj za tris (13 opcija). Zatim biramo 3 karte iz 4 dostupne u tom rangu (4 opcije). Sada biramo 2 različita broja za preostale dvije karte – 2 od preostalih 12 rangova, tj. $\binom{12}{2}$. Za svaki odabrani rang, biramo po jednu kartu iz 4 dostupne (4^2 opcija). Ukupan broj tris ruku je

$$13 \cdot 4 \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2 = 54912.$$

- (e) Koja je *otprilike* vjerojatnost za dva para, i za tris?
- Vjerojatnost za dva para je (pod pretpostavkom potpuno slučajnog miješanja) *otprilike* $\frac{125000}{2500000} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$. Za tris, računamo $\frac{50000}{2500000} = \frac{2}{100}$. Dakle, za dva para je oko 2,5 puta veća vjerojatnost.

Primjer 2.10. Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od $(0, 0)$ do $(m, n) \in \mathbb{N}^2$?

- (a) Bez dodatnih uvjeta.
- (b) Koji prolaze točkom (p, q) , gdje je $p \in \mathbb{N}$, $p < m$ i $q \in \mathbb{N}$, $q < n$.
- (c) Koji ne prolaze segmentom $[(p, q), (p+1, q)]$, gdje je $p \in \mathbb{N}$, $p < m-1$ i $q \in \mathbb{N}$, $q < n$.

Rješenje. Najprije primijetimo da su svi putevi koji se sastoje samo od kretanja desno i gore jednako dugi i da su to najkraći putevi. Svaki niz od $x \in \mathbb{N}_0$ slova ‘D’ (desno) i $y \in \mathbb{N}_0$ slova ‘G’ (gore) određuje točno jedan put od $(x_0, y_0) \in \mathbb{N}_0^2$ do $(x_0 + x, y_0 + y)$. Npr. “GGGDDGDGGDDDD” nam određuje put od (x_0, y_0) do $(x_0 + 6, y_0 + 6)$.

- (a) Nizova duljine $m + n$ koji sadrže m slova ‘D’ i n slova ‘G’ ima $\binom{m+n}{m}$ (izaberemo m mjesta na kojima će biti slovo ‘D’, a na preostalima tada mora biti slovo ‘G’), to je i odgovor u ovom slučaju.
- (b) Najprije iz $(0, 0)$ dođemo u (p, q) , a zatim iz njega u (m, n) . Prvi dio puta možemo izabrati na $\binom{p+q}{p}$ načina, a drugi na $\binom{m-p+n-q}{m-p}$ načina. Dakle, postoji $\binom{p+q}{p} \cdot \binom{m-p+n-q}{m-p}$ puteva.
- (c) U ovom slučaju ćemo od svih mogućih (najkraćih) puteva oduzeti one koji prolaze tim segmentom, a tim segmentom prolaze svi putevi koji vode od $(0, 0)$ u (p, q) , iz njega u $(p+1, q)$, a zatim u (m, n) . Ukupno ima $\binom{m+n}{m}$ puteva. “Loših” puteva ima $\binom{p+q}{p} \cdot \binom{m-p-1+n-q}{m-p-1}$. Konačno, rješenje je $\binom{m+n}{m} - \binom{p+q}{p} \cdot \binom{m-p-1+n-q}{m-p-1}$ puteva.

Primjer 2.11. Na koliko načina možemo rasporediti n bračnih parova oko okruglog stola? Dva rasporeda smatramo jednakim ako se jedan iz drugoga može dobiti rotacijom.

- (a) Bez dodatnih uvjeta.
- (b) Tako da Ana i Ivan sjede jedno do drugoga. ($n \geq 2$)
- (c) muškarci i žene alterniraju,
- (d) svaka žena sjedi do svog muža. ($n \geq 2$)

Rješenje.

- (a) Možemo razmišljati na dva načina. Najprije poslažemo ljude normalno u red, što možemo učiniti na $(2n)!$ načina. Sada, “krajeve” tog reda spojimo u krug, vidimo da se svaki raspored ponavlja točno $2n$ puta, dakle, odgovor je $(2n-1)!$. **Zapamtimo da je broj rasporeda m ljudi oko okruglog stola jednak $(m-1)!$.** Drugi način je da izaberemo jednu osobu i nju smatramo početkom, sada je jasno da preostale ljude možemo razmjestiti na $(2n-1)!$ načina.
- (b) Anu i Ivana možemo smatrati jednim blokom i ujedno njega smatrati početkom, Anu i Ivana unutar toga bloka možemo rasporediti na 2 načina, a preostalih $2n-2$ ljudi na $(2n-2)!$ načina. Dakle, odgovor je $2 \cdot (2n-2)!$.
- (c) Rasporeda n muževa oko okruglog stola ima $(n-1)!$. Između njih žene mogu sjesti na $n!$ načina. Slijedi da je traženo rješenje (zašto princip produkta?) $n! \cdot (n-1)!$.
- (d) Promatajmo bračne parove kao blokove. Tada ima $(n-1)!$ rasporeda bračnih parova oko okruglog stola. Svaki blok možemo permutirati na dva načina pa je rješenje (zašto princip produkta?) jednako $2^n \cdot (n-1)!$.

Primjer 2.12. Za prirodan broj n , neka je dan skup A s $2n$ elemenata. Sparivanje je particija skupa A na dvočlane podskupove. Odredite koliko ima različitih sparivanja skupa A .

Rješenje. Dat ćemo dva načina rješavanja.

- (i) Permutacija skupa A ima $(2n)!$. Permutacija jednog sparivanja skupa A ima $n!$. Dakle, iz svakog sparivanja skupa A možemo dobiti točno $2^n \cdot n!$ permutacija skupa A (svaki član sparivanja, koji je dvočlani skup, možemo “unutar sebe” permutirati 2 puta). Iz dva različita sparivanja nikako ne možemo dobiti dvije

jednake permutacije. Također, iz svih mogućih sparivanja dobiti ćemo sve permutacije. Dakle, svih mogućih sparivanja skupa A ima $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$.

- (ii) Najprije od $2n$ elemenata izaberemo 2, zatim od preostalih $2n - 2$ još 2, itd. zadnja preostala 2 “stavimo” u n -ti skup. No, nije nam bitan poredak tako dobivenih dvočlanih skupova, stoga je rješenje

$$\frac{\prod_{i=0}^{n-1} \binom{2n-2i}{2}}{n!} = \frac{1}{n!} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(2n-2i)(2n-2i-1)}{2} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

2.3 Zadaci za vježbu

Zadatak 2.13. Na koliko načina se može razmjestiti 8 kula na šahovku ploču tako da se nikoje dvije kule ne napadaju?

(a) Bez dodatnih uvjeta. [Rj. 8!]

(b) Tako da se kule razlikuju. [Rj. $(8!)^2$]

(Kula napada sva polja u istom retku i stupcu u kojem se nalazi.)

Zadatak 2.14. Neka je S skup prirodnih brojeva čije znamenke su iz skupa $\{1, 3, 5, 7\}$ takvih da se niti jedna znamenka ne ponavlja.

(a) Odredite $|S|$. [Rj. 64]

(b) Odredite $\sum_{n \in S} n$. [Rj. 117856]

Uputa. Pokušajte nekako „pametno” grupirati brojeve u skupu S .

Zadatak 2.15. n kandidata za neki posao se predstavlja pred tročlanom komisijom. Svaki od članova komisije rangira kandidate prema svom kriteriju. Pravilo je da će neki kandidat biti prihvaćen ako ga je barem dvoje članova komisije stavilo na prvo mjesto. Izračunajte u koliko će se posto slučajeva izabrati barem jedan kandidat.

$$\left[\text{Rj. } \left(\frac{n((n-1)!)^3}{(n!)^3} + \frac{n(n-1)\binom{3}{2}((n-1)!)^3}{(n!)^3} \right) \cdot 100\% = \frac{3n-2}{n^2} \cdot 100\% \right]$$

Uputa. Povoljne ishode, tj. one u kojima će netko biti izabran prebrojite tako da najprije prebrojite ishode u kojem su nekog kandidata izabrala točno dva člana komisije, a zatim i one u kojima su ga izabrala sva tri člana komisije.

Alternativno, možete brojiti nepovoljne slučajeve.

Zadatak 2.16. 10 majki vodi po jedno svoje dijete na kazališnu predstavu. Pred ulazom u kazalište stvorio se red. Na koliko načina je moguće posložiti red ako:

(a) svaka majka mora biti točno iza svog djeteta, [Rj. 10!]

(b) svaka majka mora biti iza svog djeteta, ali ne moraju biti susjedni? $\left[\text{Rj. } \frac{20!}{2^{10}} \right]$

Zadatak 2.17. Koliko poker ruku su *skale u boji*, *full house*, *par*? (Skala u boji je ruka gdje su svih 5 karata iste boje i u nizu. Full house je ruka u kojoj imamo 3 karte istog broja i 2 karte drugog broja.)

3 Kombinacije i permutacije s ponavljanjem

Ključne riječi: Multiskup, permutacija multiskupa.

3.1 Ponavljanje i preliminarni zadaci

Primjer 3.1. Ispišite sve 2-kombinacije s ponavljanjem skupa $S = \{a, b, c\}$.

Rješenje. $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, a\}, \{b, b\}, \{c, c\}$.

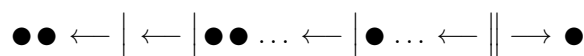
Danas ćemo se detaljnije baviti metodom koju smo vidjeli na prvom predavanju. Na koliko načina možemo odabrati k -kombinaciju s ponavljanjem (dakle, poredak tih k -elemenata je nebitan)?¹

Odgovor je ekvivalentan sljedećem pitanju.

Primjer 3.2. „Metoda kuglica i štapića.”

Na koliko načina možemo $k \in \mathbb{N}$ jednakih kuglica rasporediti u $n \in \mathbb{N}$ različitih kutija?

Rješenje.



Promatrajmo niz kuglica i pregrada kao na gornjoj slici. Kuglice lijevo od prve pregrade pripadaju prvoj kutiji, kuglice između prve i druge pregrade drugoj kutiji, itd. kuglice nakon zadnje pregrade zadnjoj kutiji. Dakle, imamo niz od k kuglica i $n - 1$ pregrada. Svaki niz određuje točno jedan raspored kuglica po kutijama. Pregrade možemo razmjestiti na $\binom{k+n-1}{n-1}$ načina, što je i odgovor na pitanje zadatka.

Primjer 3.3. U Bologni se prodaju tri vrste sendviča: sa šunkom, tunom i vegetarijanski. Na koliko načina student može naručiti 6 sendviča (nije bitan redoslijed naručivanja)?

Rješenje. Tražimo sve šesteročlane podskupove multiskupa $\{S^\infty, T^\infty, V^\infty\}$, odnosno broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Taj je broj jednak $\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2}$.

Primjer 3.4. $M = \{a, a, b, b, c, c, c\} = \{a^2, b^2, c^3\}$ Koliko ima permutacija multiskupa M ?

Rješenje. Možemo razmišljati na dva načina.

1. način. Broj permutacija 7-članog skupa je $7!$. Kako je M multiskup, više puta smo brojali neke permutacije (prvi a i drugi a ne razlikujemo). Svaka permutacija istih elemenata skupa rezultira istom permutacijom multiskupa M . Zato je traženi broj $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$.

2. način. Odabiremo najprije dva mjesta (od sedam) na koje ćemo *smjestiti* a -ove. To možemo učiniti na $\binom{7}{2}$ načina. c -ove zatim možemo rasporediti na $\binom{5}{3}$ načina, a za b -ove je preostao samo još jedan način $\binom{2}{2}$. Ukupno je broj permutacija multiskupa jednak $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$.

Analogno određujemo i broj permutacija općenitog multiskupa.

Napomena 3.1. Broj permutacija multiskupa $\{x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_k^{m_k}\}$, pri čemu je $\sum_{i=1}^k m_i = N$, jednak je

$$\frac{N!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!}$$

Zadatak 3.5. Odredi broj ternarnih nizova (nizovi nula, jedinica i dvojki) koji imaju 2 nule, 3 jedinice i 5 dvojki.

$$\left[\text{Rj. } \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} \right]$$

¹Formalno, koliko ima podmultiskupova skupa X veličine k ?

Primjer 3.6. Koliko ima peteroznamenastih brojeva kojima su znamenke elementi multiskupa $\{7^4, 2^2, 4^1, 6^1\}$?

Rješenje. Uočimo da bi zadatak bio znatno lakši da koristimo sve znamenke, odnosno da tražimo koliko ima osmeroznamenastih brojeva. Zadatak ćemo riješiti rastavljanjem na nekoliko slučajeva u ovisnosti o tome koliko istih znamenaka sadrži traženi peteroznamenasti broj. U opisu svakog slučaja navodimo multiskupove zbroja kratnosti 5 čiji će elementi biti znamenke traženog broja.

$$1^\circ \{7^4, 2^1\}, \{7^4, 4^1\}, \{7^4, 6^1\}$$

Broj permutacija svakog od triju multiskupova jednak je $\frac{5!}{4!}$, i zato je ukupan broj brojeva u prvom slučaju jednak $\#_1 = 3 \cdot \frac{5!}{4!} = 15$

$$2^\circ \{7^3, 2^1, 4^1\}, \{7^3, 2^1, 6^1\}, \{7^3, 6^1, 4^1\}$$

$$\#_2 = 3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$$

$$3^\circ \{7^3, 2^2\}$$

$$\#_3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

$$4^\circ \{7^2, 2^2, 4^1\}, \{7^2, 2^2, 6^1\}$$

$$\#_4 = 2 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1} = 60$$

$$5^\circ \{7^2, 2^1, 4^1, 6^1\}, \{7^1, 2^2, 4^1, 6^1\}$$

$$\#_5 = 2 \cdot \frac{5!}{2!} = 120$$

Dakle, takvih je brojeva ukupno $\# = \sum_{i=1}^5 \#_i = 265$

(Ovakav problem ne bismo mogli općenito riješiti — barem zasad)

Problemi distribucije

Nije naodmet još jednom ponoviti kako se permutacije i kombinacije s ponavljanjem i bez ponavljanja koriste u kombinatornim problemima.

- želimo odrediti broj rasporeda m različitih objekata u n različitih kutija tako da

- u svaku kutiju možemo staviti najviše jedan objekt:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1).$$

- svaka kutija može sadržavati proizvoljno mnogo objekata:

$$n^m.$$

Primijetite da poredak unutar kutija nije bitan; npr. $n = 1$ i $m = 2$.

- svaka kutija može sadržavati samo jedan objekt, a na raspolaganju je r_1 objekata prve vrste, $\dots, r_k$ objekata k -te vrste, gdje je $n = \sum_{i=1}^k r_i$:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot \dots \cdot r_k!}.$$

- svaka kutija može sadržavati proizvoljan broj objekata, ali poredak unutar kutije je bitan:

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+m-1).$$

- želimo odrediti broj rasporeda m identičnih objekata u n različitih kutija tako da

- u svaku kutiju stavimo najviše jedan objekt:

$$\binom{n}{m}.$$

(b) u svaku kutiju stavimo proizvoljan broj objekata:

$$\binom{n+m-1}{m}.$$

(c) niti jedna kutija ne bude prazna:

Tražimo broj cjelobrojnih rješenja jednačbe $r_1 + r_2 + \dots + r_n = m$, $r_i \geq 1$.

Uz supstituciju $s_i = r_i - 1 \Rightarrow s_1 + \dots + s_n = m - n$.

Rješenje je, stoga

$$\binom{m-n+n-1}{n-1} = \binom{m-1}{n-1}.$$

3.2 Glavni zadaci

Primjer 3.7. Koliko ima uređenih četvorki $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4$ takvih da je $x_1 x_2 x_3 x_4 = 9000$?

Rješenje. $9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$.

Svaki faktor broja 9000 je oblika $x_i = 2^{\alpha_i} \cdot 3^{\beta_i} \cdot 5^{\gamma_i}$; $\alpha_i, \gamma_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\beta_i \in \{0, 1, 2\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Da bi bilo $x_1 x_2 x_3 x_4 = 9000$, mora vrijediti

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3,$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 2,$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 3.$$

Postoji $\binom{6}{3}$ različitih rješenja prve jednačbe, $\binom{5}{3}$ druge, te $\binom{6}{3}$ zadnje. Odgovor na pitanje zadatka je $\binom{6}{3}^2 \cdot \binom{5}{2} = 4000$.

Primjer 3.8. Koliko ima k -podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ koji ne sadrže dva uzastopna broja?

Rješenje. Neka su

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$$

elementi jednog traženog podskupa. Definirajmo $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 - 1$, $\dots$, $b_k = a_k - k + 1$. Sada vrijedi

$$1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq n - k + 1.$$

(Očito gornje ima smisla samo u slučaju $k \leq n - k + 1$, što je i nužan uvjet da postoji traženi podskup.) Slično, ako nam je dana k -torka $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ s $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq n - k + 1$, možemo 'rekonstruirati' $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 + 1$, $a_3 = b_3 + 2$, $\dots$, $a_k = b_k + k - 1$, bez uzastopnih elemenata. Time smo uspostavili bijekciju između k -torki $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_k)$.

Dakle, potrebno je odgovoriti na koliko načina možemo odabrati k elemenata od njih $n - k + 1$. Odgovor je

$$\binom{n-k+1}{k}.$$

2. ideja (slično) Umjesto $b_1, \dots, b_k$, možemo promatrati uzastopne razlike. Neka su

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$$

elementi jednog traženog podskupa. Definirajmo $c_i = a_i - a_{i-1} - 2 \geq 0$ za $i = 2, \dots, k$, te $c_1 = a_1 - 1$ i $c_{k+1} = n - a_k$. Vrijedi $c_1 + \dots + c_{k+1} = n - 2k + 1$. Uspostavimo bijekciju između $(a_1, \dots, a_k)$ i $(c_1, \dots, c_{k+1})$, te prebrojimo izbore za $(c_1, \dots, c_{k+1})$ uz pomoć metode kuglica i štapića.

Primjer 3.9. Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednačbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$$

uz uvjete: $x_1, x_4, x_5 \geq 0$; $2 \leq x_3 \leq 7$; $x_2 \geq 2$

Rješenje. Uvest ćemo supstituciju $[y_1 = x_1, y_2 = x_2 - 2, y_3 = x_3 - 2, y_4 = x_4, y_5 = x_5]$, nakon čega početna jednačba glasi

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 46 \quad (1)$$

uz uvjete $y_i \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ i $y_3 \leq 5$

Jednostavnom supstitucijom svodimo uvjet $x \geq c, c \in \mathbb{N}$ na $x \geq 0$, što znamo riješiti. Uvjet $y_3 \leq 5$ također ćemo pokušati svesti na poznatu situaciju. Poslužiti ćemo se principom komplementa: broj cjelobrojnih rješenja jednačbe (1) uz uvjet $y_3 \leq 5$ jednak je razlici broja rješenja bez ikakvih dodatnih uvjeta i broja rješenja uz uvjet $y_3 > 5$, tj. $y_3 \geq 6$. Broj rješenja uz uvjet $y_3 \geq 6$ određujemo supstitucijom $z_3 = y_3 - 6$, te $z_i = y_i$, za $i = 1, 2, 4, 5$ pa govorimo o jednačbi $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 40$. Na kraju, broj cjelobrojnih nenegativnih rješenja početne jednačbe jednak je $\binom{46+5-1}{46} - \binom{40+5-1}{40} = \binom{50}{4} - \binom{44}{4}$.

Primjer 3.10. Pokažite da je broj $(4n)!$ djeljiv s 2^{3n} i 3^n

Rješenje. Promotrimo multiskup $M = \{a_1^4, a_2^4, \dots, a_n^4\}$. Broj permutacija tog multiskupa (**prirodan broj!**) je $\frac{(4n)!}{4! \cdot 4! \cdot \dots \cdot 4!} = \frac{(4n)!}{2^{3n} \cdot 3^n} \in \mathbb{N}$

Zadatak 3.11. Neka je dan skup $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

- Koliko ima bijekcija $f : A \rightarrow A$?
- Koliko ima bijekcija $f : A \rightarrow A$ koje su same sebi inverz i nemaju fiksnih točaka?
- Koliko ima rastućih funkcija $f : A \rightarrow A$?

Rješenje.

- Ovo je samo broj permutacija n -članog skupa kojih znamo da je $n!$.
- Ako je $f(i) = j$, tada je nužno $j \neq i$ jer f nema fiksnih točaka. Kako je f sam sebi inverz, mora vrijediti

$$i = (f \circ f)(i) = f(f(i)) = f(j),$$

tj. mora vrijediti $f(j) = i$. Zaključujemo da ako krenemo od takvog preslikavanja domenu moramo moći podijeliti u dvočlane podskupove. No, vrijedi i obratno – ako domenu podijelimo u dvočlane podskupove lako možemo doći do dobrog preslikavanja – ako smo uparili $\{i, j\}$, preslikavanje f definiramo tako da vrijedi $f(i) = j$ te $f(j) = i$. Dakle, ukupan broj takvih preslikavanja će biti jednak broju sparivanja n -članog skupa – ako je n neparan to je očito nemoguće pa je odgovor 0, a ukoliko je paran, već smo ustanovili da je rješenje

$$\frac{n!}{2^{n/2} \cdot (n/2)!}.$$

- Neka je $f : A \rightarrow A$ neka rastuća funkcija. Za $i = 1, \dots, n$ sa x_i označimo broj elemenata domene koji se preslikavaju u i . Drugim riječima, $x_i = |f^{-1}(\{i\})|$. Primijetimo da ti brojevi zadovoljavaju jednačbu

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n; \quad x_i \geq 0, \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, n.$$

Dakle, svakoj rastućoj funkciji možemo pridružiti jedno nenegativno cjelobrojno rješenje gornje jednačbe. No, možemo i obratno! Da bismo u potpunosti odredili rastuću funkciju, dovoljno je odrediti koliko se elemenata preslikava u svaki element kodomene – ako je $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jedno rješenje gornje jednačbe, onda će postojati jedinstvena rastuća funkcija kojoj se x_1 elemenata preslikava u 1, x_2 elemenata preslikava u 2, itd. Jasno, točno se $\{1, 2, \dots, x_1\}$ moraju preslikati u 1 (ili eventualno nijedan element ako je $x_1 = 0$), pa se onda sljedećih x_2 brojeva $x_1 + 1, x_1 + 2, \dots, x_1 + x_2$ mora preslikati u 2, itd. Ovo pridruživanje je bijekcija, pa je broj rastućih funkcija jednak broju rješenja gornje jednačbe, kojih znamo da ima $\binom{2n-1}{n}$ koristeći metodu kuglica i štapića.

Zadatak 3.12. Pauk ima po jednu cipelu i jednu čarapu za svaku od svojih 8 nogu. Na koliko načina se pauk može obući ako na svaku nogu najprije mora obući čarapu, a onda cipelu. Prebrojavamo procese oblačenja, a ne konačan rezultat!

Rješenje. Označimo s a_i radnju oblačenja čarape, a s b_i radnju oblačenja cipele na i -tu nogu, $i \in \{1, \dots, 8\}$. Kako se čarapa treba obući prije cipele, a_i uvijek trebamo izvršiti prije b_i . Tada tražimo broj permutacija skupa $S := \{a_1, \dots, a_8, b_1, \dots, b_8\}$ takvih da se za sve $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ element a_i nalazi u permutaciji prije elementa b_i . Ukupan broj permutacija tog skupa bez restikcija jednak je $16!$. Sada trebamo pronaći način kako izbaciti nepovoljne permutacije. Iz tog razloga uvedimo relaciju ekvivalencije na skupu permutacija prostora S s uvjetom da su dvije permutacije *ekvivalentne* ako se jedna može dobiti iz druge samo proizvoljnim zamjenom mjesta elemenata a_i i b_i (indeks mora biti isti). Konkretno, tada imamo da su permutacije

$$(a_3, b_3, a_1, a_4, a_7, b_1, a_2, b_2, b_4, a_5, a_6, b_6, b_7, a_8, b_5, b_8) \quad \text{i} \quad (a_3, b_3, b_1, a_4, a_7, a_1, b_2, a_2, b_4, a_5, a_6, b_6, b_7, b_8, b_5, a_8)$$

ekvivalentne (u drugoj permutaciji samo trebamo zamijeniti mjesta parovima (a_1, b_1) , (a_2, b_2) i (a_8, b_8)), dok permutacije

$$(a_3, b_3, a_1, a_4, a_7, b_1, a_2, b_2, b_4, a_5, a_6, b_6, b_7, a_8, b_5, b_8) \quad \text{i} \quad (a_1, b_3, a_3, a_4, a_7, b_1, a_2, b_2, b_4, a_5, a_6, b_6, b_7, a_8, b_5, b_8)$$

nisu ekvivalentne (trebali bismo zamijeniti mjesta elementima a_1 i a_3 što nije dopušteno). Nije teško provjeriti da smo gornjim pravilom uistinu zadali relaciju ekvivalencije. Promotrimo particiju skupa permutacija skupa S po zadanoj relaciji ekvivalencije. Lako je uočiti da svaki skup iz dane particije ima točno 2^8 elemenata (imamo 8 parova kojima možemo mijenjati mjesta), te da od tih 2^8 particija imamo točno jednu particiju koja odgovara uvjetima zadatka. Sada je jasno da smo s brojem $16!$ dali točno 2^8 puta veći broj, iz čega slijedi da je rješenje $\frac{16!}{2^8}$.

4 Permutacije i kombinacije: dokazivanje identiteta

4.1 Ponavljanje i preliminarni zadaci

Prvo navodimo algebarski dokaz dvaju identiteta s predavanja.

Teorem 4.1. Neka su n i k prirodni brojevi takvi da je $n \geq k$. Za binomne koeficijente vrijedi.

(1) **Simetrija.**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(2) **Pascalova formula.**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Na predavanjima smo pokazali kombinatorni dokaz, a ovdje navodimo algebarski.

(1)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot [n - (n-k)]!} = \binom{n}{n-k}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n}{k \cdot (n-k)} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$



U ovoj cjelini ćemo dokazivati identite metodom dvostrukog prebrojavanja. Pretpostavimo da želimo dokazati neki identitet $A = B$ pri čemu su izrazi A i B takvi da ih možemo kombinatorno interpretirati (sume i produkti binomnih koeficijenata, faktorijskih, Stirlingovih ili Fibonaccijevih brojeva, itd.) Metoda se sastoji od tri koraka. Najprije definiramo skup S kojem ćemo odrediti broj elemenata na dva različita načina. U drugom koraku dokazujemo da je $A = |S|$. Najčešće je ovaj korak ide direktno iz definicije skupa S (izraz A nam daje ideju kako definirati S). Posljednji korak je dokazivanje $B = |S|$ iz čega zaključujemo da vrijedi $A = B$.

Formalno, u dokazu da je $|S| = B$ se često konstruira bijekcija sa skupa S na pogodan skup S' za koji je jasno da je $|S'| = B$.

Umjesto preliminarnih zadataka, očekuje se da su studenti shvatili, ili idealno, samostalno dokazali identitete s predavanja. Neki od tih identiteta (npr. (c) i (d)) su ponovljeni u nastavku jer će nekim čitateljima možda pomoći slikovitija interpretacija.

Broj k -permutacija n -elementnog skupa označavamo s $P(n, k)$.

Zadatak 4.1. Dokažite tvrdnje koristeći kombinatorne argumente, tj. metodom dvostrukog prebrojavanja.

(a) $P(n, k) = nP(n-1, k-1)$

Neka je S skup svih k -permutacija skupa X od n elemenata. Na lijevoj strani jednadžbe je broj elemenata skupa S prema Problemu 2.4. Na desnoj strani je isti broj zapisan na drugi način. Svaka k -permutacija određuje i određena je elementom x_1 na prvom mjestu i $(k-1)$ -permutacijom preostalih $n-1$ elemenata skupa $X' = X \setminus \{x_1\}$. Element na prvom mjestu možemo odabrati na n načina, a preostali niz od $k-1$ elemenata iz $(n-1)$ -članog skupa X' možemo odabrati na $P(n-1, k-1)$ načina

(b) $P(n+1, k) = P(n, k) + kP(n, k-1)$

Neka je S skup svih k -permutacija skupa X od $n+1$ elemenata. Na lijevoj strani jednadžbe je broj elemenata skupa S prema Problemu 2.4. Fiksirajmo neki element x iz skupa X . Skup svih k -permutacija od X možemo podijeliti u dva disjunktne skupa ovisno o tome pojavljuje li se element x u permutaciji ili ne. Broj permutacija u kojima se x pojavljuje je $kP(n, k-1)$ jer moramo odabrati jednu od n pozicija za element x i na preostale pozicije odabrati $(k-1)$ -torku iz n -članog skupa $X \setminus \{x\}$. Broj permutacija u kojima se ne pojavljuje x je jednostavno broj k -permutacija n -članog skupa $X \setminus \{x\}$.

(c) $\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$

Neka je X skup od n elemenata i neka je S skup svih uređenih parova (Y, Z) takvih da je $Z \subseteq Y \subseteq X$ i $|Z| = r, |Y| = m$. Podskup $Y \subseteq X$ takav da je $|Y| = m$ možemo odabrati na $\binom{n}{m}$ načina, a jednom kad smo odabrali skup Y podskup $Z \subseteq Y$ takav da je $|Z| = r$ možemo odabrati na $\binom{m}{r}$ načina. Zato je broj traženih parova (Y, Z) jednak lijevoj strani identiteta. S druge strane, skup S je u bijekciji sa skupom svih uređenih parova (Y', Z) pri čemu je $Z \subseteq X, |Z| = r, Y' \subseteq X \subseteq Z, |Y'| = m-r$. Bijekcija je dana s $Y' = Y \setminus Z$. Podskup $Z \subseteq X$ takav da je $|Z| = r$ možemo odabrati na $\binom{n}{r}$ načina. Jednom kad smo odabrali skup Z podskup $Y' \subseteq X \subseteq Z$ takav da je $|Y'| = m-r$ možemo odabrati na $\binom{n-r}{m-r}$ načina. Ovo pokazuje da je broj elemenata skupa S jednak desnoj strani identiteta.

Dat ćemo slikovitiju interpretaciju. Pretpostavimo da promatramo izbor za najljepšu pudlicu svijeta. Tada je na lijevoj strani broj načina na koji od n pudlica možemo izabrati m njih koje idu u polufinale, a zatim od pudlica u polufinalu odabrati r njih koje idu u finale. Na desnoj strani prvo od n natjecateljica odabiremo r njih za finale, a onda od preostalih $n-r$ mjesta odabiremo njih $m-r$ koje su u polufinalu. Ovdje smo brojali uređene parove skupova pudlica koje idu u polufinale i finale.

(d) $\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

Ponovno ćemo ponuditi slikovito rješenje zadatka. Prebrojimo skup S svih mogućih odabira r -člane ekipe za matematičku olimpijadu s kandidatima od kojih je m mladića i n djevojaka. S desne strane je broj načina na koji možemo od tih $m+n$ osoba odabrati r članova ekipe, tj. broj elemenata skupa S . Primijetimo da skup S možemo podijeliti na disjunktne skupove u ovisnosti o broju k koji predstavlja broj mladića u ekipi i može biti $0, 1, 2, \dots, n$. Tih k mladića možemo odabrati na $\binom{m}{k}$ načina, a jednom kad smo odabrali mladiće ekipu možemo dopuniti s $r-k$ djevojaka na $\binom{n}{r-k}$ načina. Zato lijeva strana također daje broj elemenata skupa S .

Preciznije, neka su X i Y disjunktne skupove takvi da je $|X| = n$ i $|Y| = m$. Ako je S skup svih podskupova

$Z \subseteq X \cup Y$ takvih da je $|Z| = r$, onda desna strana označava broj elemenata skupa S . Primijetite da je skup S u bijekciji s unijom disjunktih skupova S_k , $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, pri čemu su elementi skupa S_k uređeni parovi (P, R) takvi da je $P \subseteq X, R \subseteq Y$ i $|R| = k, |P| = r - k$. Bijekcija je dana s $Z = P \cup R$ i $P = Z \cap X, R = Z \cap Y$. Upotpunite sve detalje ovog rješenja.

$$(e) \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n2^{n-1}$$

Zamislimo ovakvu situaciju: iz skupine od n vatrogasaca izdvojen je jedan kojeg nazivamo kapetan i on mora odabrati po volji mnogo ostalih ljudi koji s njim idu u misiju. Budući da kapetana možemo odabrati na n načina i on za svakog od preostalih $n - 1$ ljudi odlučuje ide li ili ne ide u misiju, desna strana je broj načina da se formira takva vatrogasna ekipa. Svaka takva ekipa može se formirati tako da odaberemo i od n vatrogasaca koji idu u misiju i među njima (dakle, na i načina) odaberemo kapetana. Budući da je veličina ekipe proizvoljna zbrajamo brojeve $i \binom{n}{i}$ za sve vrijednosti i od 0 do n .

Preciznije, za n -člani skup X desna strana broji elemente skupa S svih uređenih parova (x, Y) pri čemu je $x \in X$ i $Y \subseteq X \setminus \{x\}$. Skup S je u bijekciji s unijom disjunktih skupova S_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, pri čemu su elementi skupa S_i uređeni parovi (x, Z) takvi da je $Z \subseteq X$ i $x \in Z$. Bijekcija je dana s $Z = Y \cup \{x\}, Y = Z \setminus \{x\}$. Dovožite rješenje za vježbu.

4.2 Glavni zadaci

Zadatak 4.2. Dokažite da za $n \geq 4$ vrijedi

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3 \binom{n}{4} + 3 \binom{n}{3}.$$

Rješenje. Lijeva strana predstavlja broj dvočlanih podskupova skupa svih dvočlanih podskupova od $X = \{1, 2, \dots, n\}$, odnosno kardinalitet skupa

$$S = \{ \{ \{a, b\}, \{c, d\} \} : a \neq b, c \neq d, \{a, b\} \neq \{c, d\}, a, b, c, d \in X \}.$$

Primijetimo da je moguće da je $|\{a, b\} \cap \{c, d\}|$ jednako 1 ili 0. Npr. skup $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ se nalazi u S . Rastavljamo na ta dva slučaja:

- (a) Ako je $|\{a, b\} \cap \{c, d\}| = 0$, tada su $a, b, c, d \in X$ svi različiti. Možemo ih odabrati na $\binom{n}{4}$ načina. Sada treba odrediti koliko različitih elemenata iz S možemo sklopiti od ta četiri elementa. Primijetimo da se radi o podskupovima, tako da nam nije bitan poredak elemenata unutar skupova! Postoje 3 različita elementa iz S koje možemo dobiti pomoću a, b, c, d , a to su

$$\{ \{a, b\}, \{c, d\} \}, \quad \{ \{a, c\}, \{b, d\} \}, \quad \{ \{a, d\}, \{b, c\} \}.$$

Dakle, konačan broj elemenata od S u ovom slučaju je $3 \binom{n}{4}$.

- (b) Ako je $|\{a, b\} \cap \{c, d\}| = 1$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $b = d$. Tada $\{a, b, c\}$ možemo odabrati na $\binom{n}{3}$ načina, a elementa iz S koje možemo dobiti pomoću njih je opet 3, to su:

$$\{ \{a, b\}, \{a, c\} \}, \quad \{ \{a, c\}, \{b, c\} \}, \quad \{ \{a, b\}, \{b, c\} \}.$$

Dakle, broj elemenata iz S u ovom slučaju je $3 \binom{n}{3}$.

Kako su ovi slučajevi disjunkt, dobivamo $|S| = 3 \binom{n}{4} + 3 \binom{n}{3}$, što je točno desna strana.

Zadatak 4.3. Za nenegativne cijele brojeve m i n , pronađite zatvorenu formulu za sumu

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$$

i dokažite tu formulu pomoću kombinatornih argumenata.

Rješenje. Za svaki k , neka je

$$S_k = \{ (A, B) : |A| = k, |B| = m, A \subset B \subset [n] \}$$

(ili neformalno, izbor k -članog "povjerenstva" A i onda dopunjavanja do m -članog tima B). Vrijedi $|S_k| = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$.

Neka je $S = \bigcup_{k \geq 0} S_k$. Drugi način za specificirati element skupa S je izabrati prvo skup B ($\binom{n}{m}$ mogućnosti), i onda podskup $\bar{A}$, (2^m mogućnosti). Dakle, vrijedi

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = |S| = \binom{n}{m} 2^m.$$

Zadatak 4.4. Dokažite kombinatornim argumentom da za $n, r \in \mathbb{N}$ takve da je $r \leq n$ vrijedi

$$\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r} 2^k = 2^r 3^{n-r} \binom{n}{r}.$$

Rješenje. Neka je $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Definirajmo S kao skup particija X na pet međusobno disjunktih skupova (A, B, C, D, E) takvih da je $A \cup B = r$.² Tada je:

$$|S| = \underbrace{\binom{n}{r}}_{\text{biramo } A \cup B} \cdot \underbrace{2^r}_{\text{biramo } A} \cdot \underbrace{3^{n-r}}_{\text{biramo } (C, D, E)},$$

pri čemu posljednje vrijedi jer za svaki od preostalih $n - r$ elemenata biramo točno jedan od skupova C, D, E . Za lijevu stranu, definirajmo

$$S_k = \{(A, B, C, D, E) \in S : |A \cup B \cup C \cup D| = k\}.$$

Kako $A \cup B \cup C \cup D$ uvijek ima minimalno r elemenata, ovaj skup ima smisla za $k = r, r+1, \dots, n$. Standardno,

$$S = \bigcup_{k=1}^n S_k \quad \text{ i } \quad S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i \neq j,$$

pa je $|S| = \sum_{k=r}^n |S_k|$. Vrijedi

$$|S_k| = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{biramo } A \cup B \cup C \cup D} \cdot \underbrace{\binom{k}{r}}_{\text{biramo } A \cup B} \cdot \underbrace{2^r}_{\text{biramo } A} \cdot \underbrace{2^{k-r}}_{\text{biramo } (C, D)} = \binom{n}{k} \binom{k}{r} 2^k.$$

Ovime je zadatak riješen.

Primijetimo da je razlika između prvog i drugog načina prebrojavanja jedino ta što u drugom pristupu prvo odmah izbacimo elemente koji će se nalaziti u E – oni su nam ranije dali broj 3^{n-r} . Sada preostalih $k - r$ elemenata *moramo* rasporediti po C i D što nam daje samo dvije opcije za svaki element (jer je $C \cap D = \emptyset$).

Zadatak 4.5.

Dokažite da za $0 \leq m < n$ vrijedi

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} \binom{2k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m-1}.$$

Rješenje. Neka je $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Krenimo sada od lijeve strane (izraz s desne strane na prvu ruku izgleda teško za kombinatorno interpretirati – što bi trebao predstavljati član 2^{n-m-1} ?). Za $k \geq 0$ (gledamo samo one za koje ova suma ima smisla, tj. $m \leq 2k \leq n$) definirajmo

$$S_k = \{(A, B) : A, B \subseteq X, |A| = 2k, B \subseteq A, |B| = m\}.$$

²Te particije možemo zamisliti kao podjelu n osoba u pet timova, pri čemu prva dva tima sadrže r osoba.

Tada je $|S_k| = \binom{n}{2k} \binom{2k}{m}$ jer prvo odaberemo A na $\binom{n}{2k}$ načina, a zatim iz tih $2k$ elemenata biramo B na $\binom{2k}{m}$ načina. Primijetimo da jedino što ovisi o k u definiciji skupa S_k je kardinalitet skupa A . Zato će vrijediti

$$S = \bigcup_{k \geq 0} S_k = \{ (A, B) : A, B \subseteq X, |A| \text{ je paran}, B \subseteq A, |B| = m \}.$$

Sada možemo direktno doći do kardinaliteta skupa S . Naime, prvo odaberemo B na $\binom{n}{m}$ načina, a onda za svaki od preostalih elemenata (označimo ih s $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-m}\}$) biramo hoćemo li ih staviti u A ili ne, ali tako da na kraju A ima paran broj elemenata. Dakle, ovisno o parnosti m , zanima nas broj podskupova $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-m}\}$ parnog kardinaliteta, ili broj podskupova $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-m}\}$ neparnog kardinaliteta. No, iz predavanja znamo da je

$$|\{C \subset \{x_1, x_2, \dots, x_{n-m}\} : |C| \equiv 0 \pmod{2}\}| = |\{C \subset \{x_1, x_2, \dots, x_{n-m}\} : |C| \equiv 1 \pmod{2}\}| = 2^{n-m-1}.$$

Dakle, neovisno o parnosti broja m , imamo 2^{n-m-1} izbora za skup $A \setminus B$. Dakle,

$$\{C \subset \{x_1, x_2, \dots, x_{n-m}\} : |C| \equiv 0 \pmod{2}\} = 2^{n-m-1}.$$

$|S| = \binom{n}{m} 2^{n-m-1}$, a s druge strane

$$|S| = \sum_{k \geq 0} |S_k| = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} \binom{2k}{m}.$$

Napomena. $\{C \subset \{x_1, x_2, \dots, x_{n-m}\} : |C| \equiv 0 \pmod{2}\}$ možemo prebrojiti i na standardan način: primijetimo da $x_1, x_2, \dots, x_{n-m-1}$ možemo ili staviti ili ne u C (dviije opcije za svaki od tih $n-m-1$ elemenata), no za x_{n-m} onda više nemamo pravo izbora – ako je trenutni broj elemenata u C neparan onda x_{n-m} **nužno** moramo staviti u C , a ako je taj broj paran onda x_{n-m} ne smijemo staviti u C .

Zadatak 4.6. (Prvi kolokvij 2014/2015, 7.zadatak)

Dokažite da vrijedi

$$\sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n}.$$

Rješenje. Neka su X i Y dva skupa takva da je $|X| = |Y| = n$ i $X \cap Y = \emptyset$. Definirajmo

$$S = \{ (a, b, A) : a \in X, b \in Y, A \subseteq (X \cup Y) \setminus \{a, b\}, |A| = n \}.$$

Tada je $|S| = n^2 \binom{2n-2}{n}$ jer svakog od a i b možemo izabrati na n načina, a zatim od preostalih $2n-2$ elemenata biramo njih n koje ćemo staviti u A na $\binom{2n-2}{n}$ načina. Lijevo stranu možemo dobiti tako da fiksiramo broj elemenata iz A koje smo uzeli iz X . Neka je

$$S_k = \{ (a, b, A) \in S : |A \cap X| = k \}.$$

Ovi skupovi imaju smisla za $k = 0, 1, \dots, n$. Tada je $|S_k| = k(n-k) \binom{n}{k}^2$ jer $A \cap X$, odnosno k elemenata iz X koji se nalaze u A , možemo izabrati na $\binom{n}{k}$ načina, a zatim preostalih $n-k$ elemenata koji nam nedostaju za A biramo iz Y (točnije, sada biramo skup $A \cap Y$), i to možemo učiniti na $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ načina. Time smo odabrali $A = (A \cap X) \cup (A \cap Y)$. Još preostaje odabrati a kao neki od preostalih $n-k$ elemenata iz X i b kao neki od preostalih $n - (n-k) = k$ elemenata iz Y na $(n-k)k$ načina. Tvrdnja zadatka slijedi iz $|S| = \sum_{k=0}^n |S_k|$.

4.3 Daljnji zadaci

Zadatak 4.7. Dokažite kombinatornim argumentom

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}.$$

Zadatak 4.8. Dokažite kombinatornim argumentom da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 2^{k-1} = 3^{n-2} n(2n+1).$$

Zadatak 4.9. Neka je B_n broj particija skupa $\{1, \dots, n\}$. Dokažite da je broj particija skupa $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ koje imaju svojstvo da se susjedni brojevi nikada ne javljaju u istom članu particije dan s B_{n-1} .

Zadatak 4.10. Neka je $s(n, m)$ broj permutacija n -članog skupa koje se sastoje od k ciklusa. Kombinatornim argumentom dokažite

$$\sum_{k=m}^n s(k, m) \frac{n!}{k!} = s(n+1, m+1),$$

gdje je $n \geq m \geq 0$.

5 Sinteza 1 i uvod u rekurzije

Za ove vježbe, provizorni plan je da se prvi sat radi ponavljanje dosadašnjeg gradiva, a drugi sat uvod u rekurzije.

5.1 Preliminarni zadaci

Preporučamo studentima da detaljno prorade zadatke iz prethodnih poglavlja i postavbe vezana pitanja.

Napomenimo da smo već susreli nekoliko nizova koji se prirodno definiraju uz pomoć rekurzivnih formula, budući da su takvi nizovi tema sljedećeg poglavlja. Primjerice,

$$P(n, k) = nP(n-1, k-1) \quad \text{i}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

mogu poslužiti kao rekurzivne definicije danih nizova.

Zadatak 5.1. Postavite rekurzivnu relaciju za a_n , broj podskupova n -članog skupa. Radi li se o linearnoj rekurziji?

Rješenje. $a_n = 2a_{n-1}$ za $n \geq 1$, uz $a_0 = 1$. Radi se o (homogenoj) linearnoj rekurziji.

Zadatak 5.2. U nekoj populaciji se širi virus. Nultog dana, broj zaraženih je $b_0 = 1$. Svakog dana, svaka zaražena osoba zarazi 2 nove osobe. Koliki je broj zaraženih u n -tom danu (označen s b_n)?

Rješenje. $b_n = 3^n$.

5.2 Glavni zadaci

(Dio zadataka se može ostaviti za 7. sat).

Zadatak 5.3. (Prvi kolokvij 2013/2014, 4.zadatak)

10 zatvorenika odlazi na kino projekciju u pratnji 20 policajaca. Za svakog zatvorenika zadužena su točno dva određena policajca. Pred ulazom u kino napravio se red (jedan po jedan). Neposredno iza svakog zatvorenika mora doći jedan od za njega zaduženih policajaca, dok drugi mora biti negdje iza njih (ali ne nužno neposredno iza). Na koliko načina se može zatvorenike i policajce posložiti u red?

Rješenje. Dajemo dva različita rješenja.

1. način Prvo za svakog zatvorenika odaberemo jednog policajca koji se nalazi neposredno iza njega na 2^{10}

načina. Promatramo sada rasporede 10 odabranih blokova (zatvorenik-policajac) i 10 preostalih policajaca. Za dva rasporeda recimo da su ekvivalentna ako se mogu dobiti s konačno mnogo zamjena mjesta nekog odabranog bloka i preostalog policajca koji je odgovoran za zatvorenika u tom bloku. Ovo je relacija ekvivalencije, svaka klasa ima 2^{10} elemenata jer za svaki fiksni raspored, sve njemu ekvivalentne rasporede možemo dobiti tako da za svaki par (blok-preostali policajac) biramo hoćemo li mu zamijeniti mjesta ili ne. Dakle, imamo

$$2^{10} \cdot \text{broj klasa} = \text{broj svih permutacija} = 20!.$$

Svaka klasa ima točno 1 dobar raspored – onaj gdje svaki blok u rasporedu dolazi prije preostalog policajca, pa je konačan broj rasporeda za fiksni odabir blokova jednak broju klasa koji iznosi $\frac{20!}{2^{10}}$. No, mi smo prvo fiksirali te blokove pa je konačno rješenje

$$2^{10} \cdot \frac{20!}{2^{10}} = 20!.$$

2. način Prvo rasporedimo svih 20 policajaca u red na $20!$ načina. Sada preostaje ubaciti 10 zatvorenika na mjesta između policajaca. No, za fiksni raspored policajaca, položaj svakog zatvorenika je jedinstveno određen – moramo ga staviti neposredno ispred prvog policajca u redu koji je zadužen za njega, tako da ovdje nemamo nikakvih izbora. Konačno rješenje je stoga samo $20!$.

Zadatak 5.4. Neka je X skup s n elemenata.

- Koliko ima surjekcija $f : X \rightarrow X$ takvih da je $f(f(x)) = f(x)$ za svaki $x \in X$?
- Dokažite da je broj funkcija $f : X \rightarrow X$ takvih da je $f(f(x)) = f(x)$ za svaki $x \in X$ jednak

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

Rješenje.

- Postoji jedna takva surjekcija – identiteta $f(x) \equiv x$. Naime, za svaki y u slici funkcije f vrijedi

$$y = f(x) \Rightarrow f(y) = f(f(x)) = f(x) = y.$$

- Koristeći prethodnu implikaciju, broj takvih funkcija s $|Im(f)| = S$, $|S| = k$ je

$$k^{n-k}$$

(elementi skupa S su fiksni, za ostalih $n - k$ proizvoljno biramo sliku.) Sumiranjem po S i k dobivamo željenu formulu.

Zadatak 5.5. (Prvi kolokvij 2015/2016, 6. zadatak)

Neka je $S(n, m)$ broj particija n -članog skupa na m nepraznih dijelova³. Za $m > n$ kombinatorno dokažite

$$m^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) \binom{m}{k} k!.$$

Rješenje. Lijeva strana predstavlja broj funkcija s n -članog u m -člani skup, odnosno kardinalitet skupa

$$S = \{f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\} : f \text{ je funkcija}\}.$$

Za $k = 1, 2, \dots, n$ stavimo

$$S_k = \{f \in S : |\mathcal{R}(f)| = k\}.$$

Kako je $m > n$ imamo

$$S = \bigcup_{k=1}^n S_k \quad \text{ i } \quad S_i \cap S_j = \emptyset, \forall i \neq j,$$

³tj. $(S(n, m))$ je Stirlingov broj druge vrste.

pa je $|S| = \sum_{k=1}^n |S_k|$. Da bismo izračunali $|S_k|$, prvo odredimo k elemenata slike od f na $\binom{m}{k}$ načina, označimo te elemente s $x_1, \dots, x_k$. Da bismo u potpunosti odredili f dovoljno je odrediti skupove $f^{-1}(\{x_1\}), \dots, f^{-1}(\{x_k\})$. Kako su po pretpostavci ti skupovi neprazni, vidimo da je

$$\{f^{-1}(\{x_1\}), \dots, f^{-1}(\{x_k\})\}$$

jedna k -particija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Sada možemo gledati obrnuto, krenemo od neke k -particije tog skupa, koju možemo izabrati na $S(n, k)$ načina, označimo ju s $\{A_1, \dots, A_k\}$. Još je jedino preostalo odrediti element x_i čija praslika daje A_1 , neki drugi element čija praslika daje A_2 , itd. To možemo učiniti na $k!$ načina. Dakle, $|S_k| = S(n, k) \binom{m}{k} k!$. Sada imamo

$$m^n = |S| = \sum_{k=1}^n |S_k| = \sum_{k=1}^n S(n, k) \binom{m}{k} k!.$$

5.3 Uvod u rekurzivno rješavanje zadataka

Zadatak 5.6. Na koliko maksimalno područja n pravaca dijeli ravninu?

Rješenje. Zanima nas maksimalni broj, stoga možemo pretpostaviti da nikoja dva pravca nisu paralelna i da se nikoja tri ne sijeku u istoj točki. Označimo s a_n traženi broj. Kada na $n - 1$ pravac dodamo još jedan, dobivamo n dijelova ravnine više no što smo imali. Očito je $a_1 = 2$, dakle, trebamo riješiti

$$a_n = a_{n-1} + n; \quad a_1 = 2.$$

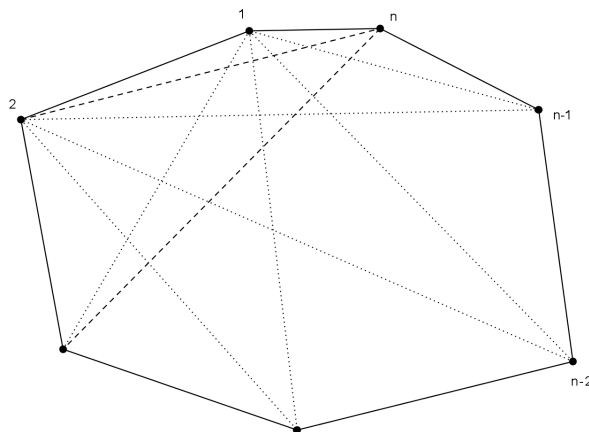
Iteracijom ove relacije, dobivamo

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n = [a_{n-2} + (n-1)] + n = \dots \\ &= 2 + 2 + 3 + \dots + n = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Ova tehnika se često naziva *teleskopiranjem*. Može se iskoristiti za bilo koju linearnu relaciju *prvog stupnja* (tj. relaciju koja "ide samo jedan korak unazad").

Zadatak 5.7. Neka je r_n broj djelova na koje dijagonale konveksnog n -terokuta dijele njegovu unutrašnjost. Pretpostavimo da se nikoje 3 dijagonale ne sijeku u istoj točki. Nađite rekurziju i zatvorenu formulu za r_n .

Rješenje. Dodamo n -tu točku i prebrojimo koliko novih djelova dobijemo. To radimo na taj način da tu novu točku spajamo s preostalima i to jednu po jednu i gledamo koliko smo novih djelova dobili u svakom koraku.



Tražena rekurzija je

$$r_n = r_{n-1} + \binom{n-1}{3} + n - 2 = r_{n-1} + \frac{n^3 - 6n^2 + 17n - 18}{6}, \quad \forall n \geq 4, r_3 = 1,$$

koju lako rješavamo teleskopiranjem. Rješenje je

$$r_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 24}{24}.$$

U sljedećem zadatku ne morate naći zatvorenu formulu, već samo relevantnu rekurzivnu relaciju s početnim uvjetima.

Primjer 5.8.

- Odredite rekurzivnu relaciju za a_n = broj podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ koji nemaju susjednih elemenata. Odredite prvih pet članova niza (a_n) .
- Odredite rekurzivnu relaciju za broj binarnih nizova duljine n koji nemaju susjednih jedinica.

Rješenje. Odmah vidimo da je pod (a) i pod (b) jednak odgovor. Naime, prisjetimo se bijekcije između $\mathcal{P}([n])$ i $\{0, 1\}^n$ (podskupova i binarnih nizova). Ista bijekcija pridružuje skupove opisane pod (a) i binarnim nizovima opisanim pod (b) i obratno.

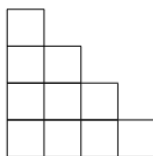
Označimo s a_n traženi broj. Na zadnje mjesto u nizu možemo staviti ili 0 ili 1 (ili ćemo uzeti n -ti element ili nećemo). Ukoliko je 0, onda očito imamo a_{n-1} načina za upotpuniti niz, a ukoliko je to 1, onda na $(n-1)$ -vom mjestu ne smije biti 1, pa imamo a_{n-2} načina. Dakle, dobili smo rekurziju

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

s početnim uvjetima $a_1 = 2, a_2 = 3$.

(I možemo zaključiti da je a_n jednak Fibonaccijevom broju F_{n+2}).

Zadatak 5.9. (Prvi kolokvij 2012/2013, 4. zadatak) Neka su k i n prirodni brojevi i neka je $k \leq n$. Neka je B_n ploča koja ima n redaka i u i -tom retku ima i polja. Npr. B_4 je



Dokažite da je Stirlingov broj druge vrste $S(n, k)$ jednak broju načina da stavimo $n - k$ topova koji se ne napadaju na ploču B_{n-1} .

Rješenje. Rekurzija za Stirlingove brojeve glasi $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$ uz početne uvjete $S(n, 0) = 0, S(n, 1) = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Označimo s $a(n, k)$ broj rasporeda $n - k$ topova na ploču B_{n-1} . Pokazat ćemo da ovi brojevi zadovoljavaju istu rekurziju kao i Stirlingovi brojevi, uz iste početne uvjete, iz čega će slijediti tvrdnja zadatka.

Očito je $a(n, 1) = 1$ jer je jedini način da postavimo $n - 1$ topova na B_{n-1} taj da u i -tom retku jednog topa stavimo na i -to mjesto. Također, nemoguće je staviti n nenapadajućih topova na B_{n-1} pa je $a(n, 0) = 0$. Izvedimo sada rekurzivnu relaciju za $a(n, k)$. Rastavimo sve rasporede $n - k$ nenapadajućih topova na B_{n-1} na 2 slučaja:

- Ako u posljednjem retku nije nijedan top, onda moramo rasporediti $n - k$ topova na ploču B_{n-2} , a to možemo učiniti na $a(n-1, k-1)$ načina jer je $n-1-(k-1) = n-k$.
- Ako je u posljednjem retku točno jedan top, krenimo od toga da prvo rasporedimo $n - k - 1$ topova na B_{n-2} , što možemo učiniti na $a(n-1, k)$ načina. Time smo zauzeli $n - k - 1$ stupaca, pa će u posljednjem retku ostati $n-1-(n-k-1) = k$ mjesta za postaviti zadnji top. Dakle, u ovom slučaju imamo ukupno $k \cdot a(n-1, k)$ načina.

Zbrajanjem vidimo da je $a(n, k) = a(n-1, k-1) + k \cdot a(n-1, k)$, čime je zadatak riješen.

Dio II

Rekurzije, funkcije izvodnice i formula uključivanja i isključivanja

6 Rekurzivne relacije

Usvojiti ćemo usvojiti sistematičnu metodu za rješavanje linearnih rekurzija s konstantnim koeficijentima.

Uz to, ponovit ćemo sumaciju redova (iz Matematičke analize), jer nam je to gradivo ključno za sljedeća dva poglavlja.

U svim zadacima koji slijede, vrijedi ispisati prvih nekoliko članova niza, što pomaže u pogađanju i/ili provjeri rješenja.

6.1 Ponavljanje i preliminarni zadaci

Zadatak 6.1. Odredite sume *formalnog* reda $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (dakle, bez brige o konvergenciji), za

a) $a_n = 1$,

b) $a_n = n$,

c) $a_n = 3n + 5$,

d) $a_n = 2^n$,

e) $a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ paran,} \\ 1, & n \text{ neparan.} \end{cases}$

f) $a_n = \frac{1}{n+2}$.

Rješenje. a) U ovom slučaju formulu za funkciju $f_1(x)$ direktno dobijemo korištenjem formule za sumu geometrijskog reda: $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

b) Funkcija je dana redom $f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$. Krenut ćemo od geometrijskog reda (tj. reda iz a) dijela), koji ćemo najprije derivirati, te potom pomnožiti s x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \implies \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \implies \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} = f_2(x).$$

c) Očito za traženu funkciju $f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (3n+5)x^n$ vrijedi

$$f_3(x) = 3f_2(x) + 5f_1(x) = \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{5}{1-x}.$$

d) I ovdje ćemo se poslužiti geometrijskim redom:

$$f_4(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}.$$

e) I ovdje se postupak svodi na korištenje formule za sumu geometrijskog reda:

$$f_5(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{x}{1-x^2}.$$

f) Opet krećemo od geometrijskog reda, koji ćemo najprije pomnožiti s x , potom integrirati (po x), te na koncu podijeliti s x^2 :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} &\implies \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \int \frac{x}{1-x} dx = -x - \ln(1-x) \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{x - \ln(1-x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Zadatak 6.2. Nađite zatvorenu formulu za sljedeće nizove.

(a) $a_{n+1} = 5a_n$, $a_0 = 2$,

(b) $b_{n+1} = b_n + 2^n$, $b_0 = 1$,

(c) $c_{n+1} = c_n + n \cdot 3^n$, $c_0 = 0$.

(d) $d_n = 3d_{n-1} - d_{n-3}$, s uvjetima $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = 26$.

6.1.1 Homogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima

Ponavljamo metodu koju smo uveli na predavanjima. Radi se o jednostavnom *receptu*, ali je ključno da studenti samostalno riješe nekoliko zadataka kako bi usvojili ovu metodu.

Izraz oblika $c_r a_{n+r} + c_{r-1} a_{n+r-1} + \dots + c_0 a_n = 0$ nazivamo **homogena linearna rekurzija s konstantnim koeficijentima reda r** .

Na predavanjima smo naučili rješavati homogene linearne rekurzije uz pomoć sljedećeg teorema.

Teorem 6.1. Ako su rješenja karakteristične jednačbe $x_1, \dots, x_m$ s kratnostima $k_1, \dots, k_m$, onda je opće rješenje rekurzije dano formulom

$$\begin{aligned} a_n &= (A_{11} + A_{12}n + \dots + A_{1k_1}n^{k_1-1})x_1^n \\ &+ (A_{21} + A_{22}n + \dots + A_{2k_2}n^{k_2-1})x_2^n \\ &\vdots \\ &+ (A_{m1} + A_{m2}n + \dots + A_{mk_m}n^{k_m-1})x_m^n. \end{aligned}$$

Napomena 6.2. Uočite da za $k_i = 1, i = 1, \dots, m$, dobivamo poseban slučaj $a_n = A_1x_1^n + \dots + A_mx_m^n$.

Primjer 6.3. Riješite rekurziju:

$$a_n - 7a_{n-1} + 15a_{n-2} - 9a_{n-3} = 0; \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 3.$$

Rješenje. Karakteristična jednačba: $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0 \implies x_1 = 1, x_2 = x_3 = 3$, sada je opće rješenje

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 3^n + C \cdot n \cdot 3^n.$$

Iz početnih uvjeta imamo

$$\left. \begin{aligned} 1 &= a_0 = A + B \\ 2 &= a_1 = A + 3B + 3C \\ 3 &= a_2 = A + 9B + 18C \end{aligned} \right\} \implies A = 0, \quad B = 1, \quad C = -\frac{1}{3}.$$

Uvrstimo u opće rješenje i imamo $a_n = \left(1 - \frac{n}{3}\right) \cdot 3^n$.

Napomena 6.3. Fibonaccijev niz je definiran s $F_1 = F_2 = 1$, te $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 3$. Zatvorena formula za Fibonaccijeve brojeve dana je s

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 6.4. Dokažite prethodnu formulu indukcijom (dakle, algebarski).

6.2 Glavni zadaci: homogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima

Zadatak 6.5. Nađite zatvorenu formulu za niz zadan s $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, s $a_0 = 5, a_1 = 12$.

[Rj. $a_n = 7 \cdot 2^n - 2$]

Zadatak 6.6. Odredite rekurzivnu relaciju za broj ternarnih nizova duljine n , a_n , koji ne sadrže podniz 012.

Rješenje. Rastavimo zadatak na disjunktne slučajeve ovisno koji se broj nalazi na prvom mjestu, s posebnim oprezom kad je to 0. Rješenje je dano s

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} - a_{n-3} \\ a_1 &= 3, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 26 \end{aligned}.$$

Ovisno o tome koliko je jasan "recept", riješiti jedan od sljedećih dvaju zadataka.

Zadatak 6.7. Riješite rekurziju

$$a_n + a_{n-2} = 0; \quad a_0 = 1, a_1 = 1.$$

$$\left[\text{Rj. } a_n = \frac{1-i}{2} \cdot i^n + \frac{1+i}{2} \cdot (-i)^n \right]$$

Zadatak 6.8. Neka je a_n broj načina na koji možemo ploču $2 \times n$ popločati pločicama dimenzija 1×1 i 1×2 ? (rotiranje pločica je dozvoljeno). Odredite linearnu rekurzivnu relaciju za niz (a_n) i početne uvjete.

Uputa. Označimo s a_n traženi broj, a s b_n broj načina na koji možemo popločati „krunu” ploču $2 \times n$ (ploči $2 \times n$ maknemo jedno krajnje polje 1×1). Analizom mogućih pločica koje mogu doći na jedno fiksno krajnje polje (ili na „istureno” polje u slučaju krunje ploče) dobivamo sustav rekurzija

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + b_n + b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} + b_{n-1} \end{aligned},$$

Iz druge relacije teleskopiranjem dobijemo $b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + b_1 + a_1 = b_1 + S_{n-1}$, gdje je $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, pa je $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + S_{n-1} + S_{n-2} + 2$. Iskoristimo tu relaciju za izračunati

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2} + S_{n-1} + S_{n-2} + 2 - (a_{n-2} + a_{n-3} + S_{n-2} + S_{n-3} + 2) = 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}.$$

iz čega slijedi $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$. Još je preostalo odrediti početne uvjete a_1, a_2, a_3 i onda je a_n jedinstveno određen.

6.3 Nehomogene Linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima

Prisjetimo se još jednom rješenja za homogenu linearnu rekurziju, oblika $c_r a_{n+r} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0$.

Ako su rješenja karakteristične jednadžbe $x_1, \dots, x_m$ s kratnostima $k_1, \dots, k_m$, onda je opće rješenje rekurzije dano formulom

$$\begin{aligned} a_n &= (A_{11} + A_{12}n + \dots + A_{1k_1}n^{k_1-1})x_1^n \\ &+ (A_{21} + A_{22}n + \dots + A_{2k_2}n^{k_2-1})x_2^n \\ &\vdots \\ &+ (A_{m1} + A_{m2}n + \dots + A_{m,k_m}n^{k_m-1})x_m^n. \end{aligned}$$

Koeficijenti $A_{11}, \dots, A_{m,k_m}$ (ukupno r koeficijenata!) se određuju iz početnih uvjeta.

Izraz oblika $c_r a_{n+r} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n)$, gdje je f neka funkcija od n , nazivamo (**nehomogena**) **linearna rekurzija s konstantnim koeficijentima r -tog reda**.

Postupak za rješavanje:

- (1) Nalazimo opće rješenje pripadne homogene jednadžbe a_n^H .
- (2) Tražimo partikularno rješenje a_n^P prema teoremu koji slijedi.
- (3) Opće rješenje je $a_n = a_n^H + a_n^P$, a koeficijente određujemo iz početnih uvjeta.

Primjer 6.9. Riješite rekurziju $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 10 \cdot 3^{n-2}$, s $a_0 = 3, a_1 = 10$.

Rješenje. Primijetimo da smo pripadnu homogenu relaciju riješili u sklopu Zadatka 6.2.

Tražimo partikularno rješenje. Ovdje je $f(n) = 10 \cdot 3^{n-2}$, eksponencijalna funkcija, pa pogađamo eksponencijalnu funkciju, tj.

$$a_n^P = B \cdot 3^n.$$

Ako je to rješenje tog oblika, $a_{n-1} = B \cdot 3^{n-1}$, $a_{n-2} = B \cdot 3^{n-2}$. Potrebno nam je $B \cdot 3^n = 3B \cdot 3^{n-1} - 2B \cdot 3^{n-2} + 10 \cdot 3^{n-2}$. Dijeljenjem s 3^{n-2} dobivamo $9B = 9B - 2B + 10$, pa je $B = 5$. Naše partikularno rješenje je $a_n^P = 5 \cdot 3^n$.

Zatim, kao u Zadatku 6.2, opće rješenje homogene jednadžbe je $a_n^H = A_1 + A_2 \cdot 2^n$. Opće rješenje nehomogenog problema je

$$a_n = A_1 + A_2 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n.$$

Konačno, u ovoj fazi (i ne ranije!), koristimo početne uvjete za rješavanje za A_1 i A_2 . Kada je $n = 0$, imamo $3 = A_1 + A_2 + 5$, a kada je $n = 1$, imamo $10 = A_1 + 2A_2 + 15$. Rješenje je $A_2 = -3$, $A_1 = 1$. Rješenje rekurzije s početnim uvjetima je $a_n = 5 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n + 1$.

Sljedeći teorem nam daje općeniti oblik partikularnog rješenja.

Teorem 6.4. Dana je rekurzija $c_r a_{n+r} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = C \cdot p(n) \cdot b^n$, pri čemu su C i b neke konstante, i p je polinom m -tog stupnja. Ako je b korijen karakteristične jednadžbe kratnosti k , onda je partikularno rješenje rekurzije dano s

$$a_n^P = n^k p_1(n) b^n,$$

pri čemu je p_1 polinom stupnja m s neodređenim koeficijentima.

Napomena 6.5. Obično su nam relevantni (i intuitivniji) posebni slučajevi prethodnog teorema:

- $p(n) \equiv 1$ i $k = 0$,
- $p(n) \equiv 1$,
- $b = 1$,
- $k = 0$.

Kako izgleda a_n^P u tim slučajevima?

Primjer 6.10. Riješite rekurziju

$$a_{n+1} - 5a_n = 4n^2 + 2n + 6; \quad a_1 = 1.$$

Rješenje. Rješavanjem karakteristične jednadžbe pripadne homogene rekurzije dobivamo $a_n^H = A \cdot 5^n$. Dalje, vidimo da partikularno rješenje moramo tražiti u obliku $a_n^P = Bn^2 + Cn + D$, uvrštavanjem u danu rekurziju dobivamo

$$B(n+1)^2 + C(n+1) + D - 5Bn^2 - 5Cn - 5D = 4n^2 + 2n + 6$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-4Bn^2 + (2B - 4C)n + (B + C - 4D) = 4n^2 + 2n + 6.$$

Izjednačavajući koeficijente s lijeve i desne strane (kao u jednakosti polinoma) nalazimo $B = -1$, $C = -1$, $D = -2$. Konačno, uvrštavanjem $a_n = a_n^H + a_n^P$ u početni uvjet

$$1 = a_1 = 5A - 1 - 1 - 2 = 5A - 4,$$

nalazimo da je $A = 1$. Rješenje dane rekurzije je $a_n = 5^n - n^2 - n - 2$.

U sljedećim primjerima, preporučamo na vježbama samo naći partikularno rješenje, a ostatak ostaviti za samostalan rad.

Primjer 6.11. Riješite rekurziju

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n \cdot 3^n \quad a_0 = 2, a_1 = 3.$$

Rješenje. Karakteristična jednadžba pripadne homogene rekurzije dana je s $x^2 - 6x + 9 = 0$, te ima rješenja $x_1 = x_2 = 3$. Dakle, $a_n^H = A \cdot 3^n + B \cdot n \cdot 3^n$. Sada vidimo u kakvom obliku moramo tražiti partikularno rješenje, odnosno $a_n^P = n^2 \cdot (an + b) \cdot 3^n$. Uvrštavanjem u danu rekurziju imamo

$$n^2 \cdot (an + b) \cdot 3^n = 6 \cdot (n-1)^2 \cdot [a(n-1) + b] \cdot 3^{n-1} - 9 \cdot (n-2)^2 \cdot [a(n-2) + b] \cdot 3^{n-2} + n \cdot 3^n \quad / : 3^n$$

$$\begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ n^2 \cdot (an + b) &= 2 \cdot (n^2 - 2n + 1)(an - a + b) - (n^2 - 4n + 4)(an - 2a + b) + n \\ & \Longleftrightarrow \\ (1 - 6a)n + (6a - 2b) &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2}$. Sada, uvrštavanjem $a_n = a_n^H + a_n^P$ u početne uvjete dobivamo $A = 2$, $B = \frac{-5}{3}$. Konačno rješenje je $a_n = \frac{3^{n-1}}{2} \cdot (n^3 + 3n^2 - 10n + 12)$.

Primjer 6.12. Riješite sustav rekurzija

$$\left. \begin{aligned} a_n &= -2a_{n-1} + 4b_{n-1}, \\ b_n &= -5a_{n-1} + 7b_{n-1}; \end{aligned} \right\} \quad a_1 = 4, b_1 = 1.$$

Rješenje. Iz prve rekurzije dobivamo $b_{n-1} = \frac{a_n + 2a_{n-1}}{4}$, odnosno $b_n = \frac{a_{n+1} + 2a_n}{4}$. Uvrštavajući dobiveno u drugu rekurziju dobivamo da je potrebno riješiti rekurziju

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0; \quad a_1 = 4, a_2 = -2a_1 + 4b_1 = -4.$$

Rješenje dobivene rekurzije je $a_n = 2^{n+3} - 4 \cdot 3^n$, a sada lako nalazimo i da je $b_n = 2^{n+3} - 5 \cdot 3^n$.

6.4 Daljni zadaci

Zadatak 6.13. Kao u predavanjima, neka je J_n broj popločavanja ploče $1 \times n$ pločicama dimenzija 1×1 i 1×2 ? Dokažite tvrdnje koristeći kombinatorne argumente, tj. metodom dvostrukog prebrojavanja.

1. $J_{m+n} = J_m J_n + J_{m-1} J_{n-1}$

Broj prekrivanja ploče duljine $m+n$ jednak je J_{m+n} . Promotrimo ploču na mjestima m i $m+1$. Ako se na njima nalazi domino, onda preostali dio ploče možemo prekriti na $J_{m-1} J_{n-1}$ načina, ako je ploča slomljiva na tom mjestu onda je možemo prekriti na $J_m J_n$ načina.

2. $3J_n = J_{n+2} + J_{n-2}$

Promatramo $(n+3)$ -ploču slomljivu iza mjesta 3. Prva tri mjesta moći ćemo popuniti na tri načina ($J_3 = 3$), a ostatak ploče na J_n pa ukupno takvu ploču možemo prekriti na $3J_n$ načina.

Naći interpretaciju desne strane je nešto teže. Ako kvadratić nije ni druga ni treća pločica u prekrivanju onda raspored prvih pločica mora biti KDD (da bi ploča bila slomljiva iza mjesta 3), a ostatak možemo prekriti na J_{n-2} načina. S druge strane, ako se kvadratić nalazi na drugom ili trećem mjestu rasporedi prvih pločica su oblika DK... ili KDK... ili KKK.... Uklonimo li kvadratić (koji je drugi ili treći u prekrivanju) dobivamo rasporede oblika D..., KK... ili KD..., tj. sve moguće rasporede prekrivanja ploče duljine $n+2$ kakvih ima J_{n+2} .

3. $\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} J_{n-i} = J_{n+p}$.

Desna strana označava broj popločavanja ploče duljine $n+p$. Za interpretaciju lijeve strane razlikujemo disjunktne slučajeve: ako se među prvih p pločica u prekrivanju nalazi točno i domina, možemo ih rasporediti na $\binom{p}{i}$ načina, a preostalih $n+p-2i-(p-i)=n-i$ mjesta možemo prekriti na J_{n-i} načina. Budući da i može biti bilo koji broj od 0 do p , prema pravilu sume slijedi tražena tvrdnja.

4. $J_n^2 = J_{2n-1} + J_{n-2}^2$

Promatramo ploču duljine $2n$ slomljivu iza mjesta n . Razlikujemo dva disjunktna slučaja. Ako su mjesta $n-1, n, n+1$ i $n+2$ pokrivena dominama (...DD...), ostatak ploče možemo prekriti na $J_{n-2} \cdot J_{n-2}$ načina. S druge strane, ako su spomenuta mjesta pokrivena rasporedima ...KD... ili ...KK... ili ...DK..., izbacimo kvadratić s mjesta n ili $n+1$ i dobivamo prekrivanja ploče duljine $2n-1$ kojih ima J_{2n-1} .

Zadatak 6.14. Riješite rekurziju

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n; \quad a_0 = 3, a_1 = 8.$$

$$[\text{Rj. } a_n = (2n + 1) \cdot 2^n + 2]$$

7 Sinteza II

Za ovaj sat vježbi, preporuča se studentima da donesu zadatke s prijašnjih ispita i dosadašnjih vježbi/predavanja s kojima su imali poteškoća. U protivnom se rješavaju odabrani zadaci s prethodnih kolokvija.

7.1 Preliminarni zadaci

Zadatak 7.1. Nađite zatvorenu formulu za niz $d_n = 3d_{n-1} - d_{n-2}$, s uvjetima $d_1 = 3, d_2 = 9$.

$$\left[\text{Rj. } a_n = \frac{3\sqrt{5}}{5} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{3\sqrt{5}}{5} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Zadatak 7.2. Prirodoslovno-matematički fakultet ima 7 odsjeka s po $n \geq 5$ studenata u svakom odsjeku.

- Tim nazivamo *inkluzivnim* ako sadrži članove s barem dvaju odsjeka. Odredite broj četveročanih inkluzivnih timova.
- Tim nazivamo *superinkluzivnim* ako sadrži članove s barem triju odsjeka. Odredite broj peteročanih superinkluzivnih timova.

Skica rješenja.

- Broj četveročanih inkluzivnih timova je $\binom{7}{4} - 7\binom{n}{4}$.
- Za "profil odsjeka" postoje četiri opcije: aaabc, aabbc, aabcd i abcde. Posljedično, broj peteročanih superinkluzivnih timova je

$$\binom{7}{3} \cdot 3 \binom{n}{3} n^2 + \binom{7}{3} \cdot 3 \binom{n}{2}^2 n + \binom{7}{4} \cdot 3 \binom{n}{2} n^3 + \binom{7}{5} n^5.$$

7.2 Motivacija za funkcije izvodnice

Primjer 7.3. Na koliko načina možemo "usitniti" novčanicu od 20 kn ako na raspolaganju imamo kovanice od 1, 2 i 5 kn?

Rješenje. Označimo sa a, b i c broj kovanica od jedne, dvije i pet kuna. Tada problem glasi:

Koliko ima rješenja jednadžbe $a + 2b + 5c = 20, x, y, z \geq 0, a, b, c \in \mathbb{Z}$?

Problem možemo riješiti rastavljanjem na slučajeve po npr. varijabli c . No dobili bismo previše slučajeva, a i želimo naći metodu koja rješava sve slične probleme.

Promotrimo izraz:

$$\begin{aligned} & \left(\textcircled{0} + \textcircled{1} + \textcircled{1}\textcircled{1} + \dots \right) \cdot \\ & \left(\textcircled{0} + \textcircled{2} + \textcircled{2}\textcircled{2} + \dots \right) \cdot \\ & \left(\textcircled{0} + \textcircled{5} + \textcircled{5}\textcircled{5} + \dots \right) \end{aligned}$$

Raspišemo li ovaj produkt dobivamo sumu u kojoj svaki pribrojnik odgovara nekom iznosu isplaćenom u kovanicama po 1, 2 ili 5 kn. Jedan takav pribrojnik je



Rješenje je broj pribrojnika za koje se dobije da im je suma 20.

Uz supstituciju

$$\textcircled{1} = x$$

slijedi:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots).$$

Ako zapišemo $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, treba odrediti koeficijent a_{20} (oznaka $\langle x^{20} \rangle$). Grubom silom dobivamo $a_{20} = 29$.

Napomena. Zapravo smo došli do “funkcije izvodnice” f za niz a_n =broj rastava broja n . Funkcije izvodnice ćemo sistematično uvesti na sljedećem predavanju.

U osnovi smo problem riješili rastavljanjem (točnije, popisivanjem) svih mogućih slučajeva, no ova metoda daje općenitiji postupak.

8 Funkcije izvodnice

8.1 Ponavljanje i preliminarni zadaci

Podsjećamo da je za ovo poglavlje neizostavna podloga iz Matematičke analize.

Ključne riječi: funkcija izvodnica, eksponencijalna funkcija izvodnica, formalni red, suma, produkt, derivacija i integral formalnih redova, geometrijski red, eksponencijalna funkcija.

Definicija 8.1. Za niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pridružena *funkcija izvodnica* (skraćeno FI) je formalni red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Red nazivamo formalnim jer ne razmatramo pitanje konvergencije kao kod Taylorovih redova. Nas ne zanima vrijednost u određenoj točki x već isključivo koeficijenti. Osnovne operacije s formalnim redovima identične su kao i kod Taylorovih redova.

Prilikom manipulacije funkcije izvodnica koristimo svojstva Taylorovih redova.

Geometrijski red (konvergira za $|x| < 1$)

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

Definicija 8.2. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada se opći binomni koeficijent $\binom{\alpha}{n}$ definira kao

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

Opći binomni poučak

$$(1 \pm x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\pm x)^k$$

Napomena 8.3. Uočite da je Opći binomni poučak poopćenje Binomnog poučka, tj. da se formule podudaraju za $\alpha \in \mathbb{N}$ (problem je što u općem binomnom poučku imamo red, a ne konačnu sumu).

Pravilo inverzije

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}. \end{aligned}$$

Prisjetimo se da iz definicije **eksponencijalne funkcije** slijedi

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \\ e^{ax} &= 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2!} + \frac{a^3 x^3}{3!} + \cdots. \end{aligned}$$

Za računanje eksponencijalnih funkcija izvodnica, koristimo sljedeća (prirodna) pravila za formalne redove.

Definicija 8.4. Neka je $e_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ i $e_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$. Tada je

$$(e_1 + e_2)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n!} x^n \quad (2)$$

$$(e_1 e_2)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a_k b_{n-k}}{n!} x^n \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} e_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} \quad (4)$$

$$\int e_1(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (5)$$

Zadatak 8.1. Odredite funkciju izvodnicu za f_k = broj k -kombinacija multiskupa $\{a^2, b, c^2, d\}$. Odredite koliko ima 4-kombinacija (f_4).

Rješenje. Elemente a i c možemo uzeti 0,1 ili 2 puta, dok elemente b i d možemo uzeti ili ne uzeti:

$$f(x) = (1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x + x^2)(1 + x)$$

Sada je lako to izmnožiti te potom očitati $\langle x^4 \rangle$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 4x + 8x^2 + 10x^3 + 8x^4 + 4x^5 + x^6 \\ \implies \langle x^4 \rangle &= 8 \end{aligned}$$

8.2 Glavni zadaci

Do sada smo pod rješenjem kombinatornih problema uglavnom podrazumijevali zatvorenu formulu, npr. $n!$ za broj permutacija ili $\binom{n}{k}$ za broj k -kombinacija skupa od n elemenata. No, nemaju svi kombinatorni problemi rješenje u obliku zatvorene formule pa smo npr. sa $S(n, k)$ označili broj k -particija skupa od n elemenata, a B_n za broj particija skupa od n elemenata. Neke probleme poput određivanja broja k -kombinacija konačnog multiskupa, određivanje broja permutacija s ponavljanjem konačnog multiskupa trebalo je rastaviti na slučajeve i onda riješiti svaki slučaj posebno. Kod takvih problema od velike pomoći su nam *funkcije izvodnice* koje ne samo da možemo shvatiti kao rješenje danog problema, već su i moćan tehnički alat za rješavanje kombinatornih problema.

Pomoću funkcija izvodnica možemo opravdati metodu za rješavanje linearnih rekurzija s konstantnim koeficijentima. Ovdje će nas više zanimati modeliranje kombinatornih problema (kombinacije konačnog multiskupa, permutacije s ponavljanjem).

Dio zadataka se može prebaciti na 9. vježbe budući da FUI ne bi trebala zahtijevati 2 sata.

Interpretacija binomnog poučka pomoću funkcija izvodnica

$\binom{n}{k}$ = broj k -kombinacija n -članog skupa

Neka je $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ n -člani skup, te $A = \{S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}\} \subseteq S$ k -člani podskup od S . Na koliko načina možemo odabrati A ?

Prvi element možemo uzeti 0 puta ili jednom, drugi element možemo uzeti 0 puta ili jednom, ... i n -ti element možemo uzeti 0 puta ili jednom, odnosno:

$$(1+x) \cdot (1+x) \cdot \dots \cdot (1+x) = (1+x)^n$$

Dakle $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ je funkcija izvodnica za a_k = broj k -kombinacija n -članog skupa.

Naglašavamo da je ovdje niz (a_k) indeksiran sa k , a n je samo neki fiksni parametar u problemu (primjerice $n = 100$). Naravno, za $k > n$ vrijedi $a_k = 0$.

Što je s kombinacijama s ponavljanjem n -članog skupa?

Svaki element možemo uzeti proizvoljno mnogo puta!

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2+\dots) \cdot (1+x+x^2+\dots) \cdots (1+x+x^2+\dots) \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} \cdots \frac{1}{1-x} \\ &= \left(\frac{1}{1-x} \right)^n \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \end{aligned}$$

Dobiveni red nazivamo funkcijom izvodnicom za k -kombinacije multiskupa $\{S_1^\infty, S_2^\infty, \dots, S_n^\infty\}$. Koeficijente možemo izračunati uz pomoć pravila inverzije.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{1-x} \right)^n \\ &= (1-x)^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-1)^k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \end{aligned}$$

Zadatak 8.2. Odredite funkciju izvodnicu za broj kombinacija multiskupa $\{a^{10}, b^7, c^{12}\}$ te odredite koliko ima 15-kombinacija.

Rješenje. Element a možemo uzeti proizvoljan broj puta, od 0 do 10, b od 0 do 7 puta i c od 0 do 12 puta:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+\dots+x^{10}) (1+x+\dots+x^7) (1+x+\dots+x^{12}) \\ &= \frac{1-x^{11}}{1-x} \cdot \frac{1-x^8}{1-x} \cdot \frac{1-x^{13}}{1-x} \\ &= (1-x^{11}) \cdot (1-x^8) \cdot (1-x^{13}) \cdot (1-x)^{-3} \\ &= \left\{ (1-x)^{-3} = \sum_k \binom{-3}{k} (-x)^k = \sum_k \binom{k+2}{k} x^k \right\} = \\ &= (1-x^8-x^{11}-x^{13}+x^{19}+\dots) \cdot \sum_k \binom{k+2}{k} x^k \\ \implies \langle x^{15} \rangle &= \binom{15+2}{15} - \binom{7+2}{7} - \binom{4+2}{4} - \binom{2+2}{2} = 79 \end{aligned}$$

Napomena 8.5. Primijetimo da broj 15-kombinacija daje odgovor na sljedeće pitanje. Imamo 15 kuglica, i želimo ih rasporediti u 3 kutije na načina da prva kutija sadrži maksimalno 10, druga maksimalno 7, i treća maksimalno 12 kuglica (v. zadatak 8.2).

Općenito, u prethodna dva zadatka smo prezentirali drugi način rješavanja **Primjera 4.9.** na stranici 15 (probajte ga riješiti s ovom metodom), s tim da s funkcijama izvodnicama možemo raditi s proizvoljno mnogo ograničenja. Također bismo lako riješili problem da neka varijabla mora biti djeljiva s 2 i sl. (samo uzimamo parne potencije...).

Zadatak 8.3. Na koliko načina se 24 jednaka bombona može raspodijeliti među 4 djece tako da svako dijete dobije barem 3, ali ne više od 8 bombona?

Rješenje. Svakom od njih četvero možemo dati 3, 4, ... ili 8 bombona.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x^3 + x^4 + \dots + x^8)^4 \\
 &= x^{12} \cdot (1 + x + \dots + x^5)^4 \\
 &= x^{12} \cdot \left(\frac{1 - x^6}{1 - x} \right)^4 \\
 &= x^{12} \cdot (1 - x^6)^4 (1 - x)^{-4} \\
 &= x^{12} \cdot (1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k} (-x)^k \\
 &= (x^{12} - 4x^{18} + 6x^{24} - 4x^{30} + x^{36}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k \\
 \langle x^{24} \rangle &= \binom{12+3}{12} - 4 \cdot \binom{6+3}{6} + 6 \cdot \binom{3}{0}
 \end{aligned}$$

Zadatak 8.4. Broj particija $p_1(n)$ od n u različite sumande jednak je broju particija $p_2(n)$ od n u neparne sumande. Dokažite!

Rješenje. Naći ćemo funkcije izvodnice za oba problema, i pokazati da su jednake! Same brojeve takvih particija ne znamo izračunati, pa nam funkcije izvodnice uvelike pomažu u ovom slučaju.

Pogledajmo particije od $n = 6$ u različite i u neparne sumande:

$$\begin{array}{ll}
 6 &= 1+2+3 &= 1+1+1+1+1+1 \\
 &= 1+5 &= 1+1+1+3 \\
 &= 2+4 &= 1+5 \\
 &= 6 &= 3+3
 \end{array}$$

Funkciju izvodnicu f_1 za računanje $p_1(n)$ nije teško odrediti, svaki od sumanda možemo uzeti 0 ili 1 put, dakle:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= (1+x) \cdot (1+x^2) \cdots (1+x^n) \cdots \\
 &= \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k)
 \end{aligned}$$

Analogno odredimo i f_2 , smijemo uzimati samo neparne sumande, ali ih možemo uzeti proizvoljno mnogo puta:

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= (1+x+x^2+\dots) \cdot (1+x^3+x^6+\dots) \cdot (1+x^5+x^{10}+\dots) \cdots \\
 &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdots
 \end{aligned}$$

Preostaje pokazati da su te dvije funkcije jednake:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \prod_{k=1}^{\infty} (1+x^k) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{2k}}{1-x^k} \right) \\ &= \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^8}{1-x^4} \cdots \\ &= f_2(x) \end{aligned}$$

Jer se svi faktori oblika $1-x^{2k}$ pokrate.

Napomena 8.6. Pogrešno bi bilo funkciju izvodnicu za broj particija u različite sumande iz prethodnog zadatka definirati kao $f(x) = \underbrace{(1+x) \cdot (1+x) \cdots (1+x)}_{n \text{ puta}}$. Do tog rezultata dolazimo razmišljajući na sljedeći način; u

rastavu broja n na različite sumande, jedinicu ćemo uzeti ili ne uzeti, analogno, dvojku ćemo uzeti ili ne uzeti itd. To razmišljanje je definitivno točno, ali nam ovdje **svaki od odabira nije "jednako vrijedan"**, kao kod npr. odabira k -članog podskupa n -članog skupa! Primijetimo da bismo u tom slučaju koeficijent $\langle x^n \rangle$ koji odgovara broju rastava broja n na različite sumande dobili na jedan jedini način; iz svake zagrade odaberemo x (dakle ni iz jedne ne odaberemo 1) i sve ih pomnožimo. Vidjeli smo da za $n=6$ takav prikaz nije jedinstven (zapravo, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ takav prikaz nije jedinstven). Uočimo da svaki od navedenih rastava u primjeru za $n=6$ odgovara jednom od načina na koji možemo dobiti x^n iz funkcije f_1 i obratno:

$$\begin{aligned} 1+2+3 &\longleftrightarrow x^1 \cdot x^2 \cdot x^3 \\ 1+5 &\longleftrightarrow x^1 \cdot x^5 \\ 2+4 &\longleftrightarrow x^2 \cdot x^4 \\ 6 &\longleftrightarrow x^6 \end{aligned}$$

Jasno je da isto vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Rješavanje raznih kombinatornih problema pomoću funkcija izvodnica naizgled zaobilazi "problem" zbrajanja, stvar se svodi na množenje, zapravo je u pozadini

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

Upravo bi iz tih razloga bilo jednako krivo definirati dotičnu funkciju kao $f(x) = (1+x) \cdot (1+2x) \cdots (1+nx)$.

Eksponecijalne funkcije izvodnice

Prisjetimo se, za niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pridružena *eksponecijalna funkcija izvodnica* (skraćeno EFI) je formalni red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Veza permutacija i kombinacija n -članog skupa:

$$a_k = P(n, k) = \binom{n}{k} \cdot k! \implies \frac{a_k}{k!} = \binom{n}{k}$$

Dakle $e(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$ je eksponecijalna funkcija izvodnica za k -permutacije n -članog skupa.

Primjer 8.5. Neka je $S = \{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \dots, a_k^{n_k}\}$ multiskup. Odredite eksponecijalnu funkciju izvodnicu za permutacije multiskupa.

Rješenje. Element a_i možemo uzeti od 0 do n_i puta, i tako $\forall i = 1, 2, \dots, k$:

$$e(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_1}}{n_1!}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n_2}}{n_2!}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n_k}}{n_k!}\right)$$

Primjer 8.6. Koliko ima riječi duljine 4 sastavljenih od slova B, A, N, A, N i A ?

Rješenje. Traže se 4-permutacije multiskupa $S = \{A^3, B, N^2\}$. Slovo A možemo uzeti od 0 do 3 puta, B uzeti ili ne, a C možemo uzeti 0, 1 ili 2 puta:

$$\begin{aligned} e(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \cdot (1 + x) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) \\ &= 1 + 3x + 4x^2 + \frac{19}{6}x^3 + \frac{19}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{12}x^6 \end{aligned}$$

$$\frac{a_4}{4!} = \langle x^4 \rangle = \frac{19}{12} \implies a_4 = 38$$

Zadatak 8.7. Koliko ima ternarnih nizova duljine n , tako da imamo paran broj nula, neparan broj jedinica i proizvoljno dvojki?

Rješenje. Za nule uzimamo samo parne potencije, za jedinice neparne, a za dvojke sve:

$$\begin{aligned} e(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) \cdot \left(x + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot e^x \\ &= \frac{1}{4} \cdot (e^{2x} - e^{-2x}) \cdot e^x \\ &= \frac{1}{4} \cdot (e^{3x} - e^{-x}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \\ &= (7) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{3^k - (-1)^k}{k!} x^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x^n \rangle &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3^n - (-1)^n}{n!} \\ \implies a_n &= \frac{3^n - (-1)^n}{4} \end{aligned}$$

Prisjetimo se, deranžman je permutacija bez fiksnih točaka. Na predavanjima smo odredili broj deranžmana rekursijom i indukcijom.

Zadatak 8.8. Odredite EFI za deranžmane!

Rješenje. Označimo broj deranžmana n -članog skupa sa d_n , EFI za broj deranžmana sa $d(x)$. Sada je

$$d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

Skup svih permutacija S_n skupa od n elemenata, možemo razdvojiti na disjunktnu uniju $\bigcup_{k=0}^n S_n^{(k)}$ gdje je $S_n^{(k)}$ skup svih permutacija n -članog skupa koje imaju k fiksnih točaka, i to za svaki $k = 0, 1, \dots, n$. Dobivamo

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$$

Pomnožimo dobiveni rezultat sa $\frac{x^n}{n!}$, imamo

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d_{n-k}}{n!} x^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d_{n-k}}{n!} x^n \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d_{n-k}}{n!} x^n \\ &= (8) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n \right) \\ &= e^x \cdot d(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(x) = \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x}$$

Preostaje razviti dobivenu funkciju:

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^n \end{aligned}$$

Sada lako vidimo koliki je broj deranžmana n -članog skupa, naime $\langle x^n \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ pa je

$$d_n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

8.3 Daljnji zadaci

Zadatak 8.9. Petero dječaka dijeli n jednakih slatkiša na način da drugi dječak uzme najviše 5 slatkiša, četvrti dječak uzme koliko prvi, drugi i treći zajedno, a peti dječak uzme za jedan više od drugog. Napišite funkciju izvodnicu za (a_n) , gdje je a_n broj načina na koji dječaci mogu rasporediti slatkiše. Nadalje, koristeći dobivenu funkciju izvodnicu, izračunajte a_{24} i a_{23} .

9 Formula uključivanja i isključivanja

9.1 Ponavljanje i preliminarni zadaci

Za dva disjunktna skupa, A i B , znamo da je broj elemenata njihove unije jednak zbroju elemenata u svakom od njih. Općenito vrijedi $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$ (pri zbrajanju kardinalnih brojeva skupova dvaput su brojeni elementi presjeka). Vrijedi

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Teorem 9.1. Formula uključivanja i isključivanja

Neka je S konačan skup i $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq S$. Tada je broj elemenata njihove unije

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Odatle slijedi:

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n| = |S| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Napomena 9.2. Često u zadacima imamo $|A_i| = b_1$, $|A_i \cap A_j| = b_2, \dots$ (kardinalni broj presjeka svaka dva skupa je jednak...) pa se gornja formula pojednostavljuje u

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} b_i.$$

Provjerite!

Zadatak 9.1. Neka je $S = \{1, 2, \dots, 10^6\}$. Koliko je brojeva iz S koji nisu djeljivi ni s dva, ni s tri niti sa četiri?

Rješenje. Označimo: $A_i = \{x \in S : i|x\}$. Vrijedi $|A_i| = \left\lfloor \frac{10^6}{i} \right\rfloor$. Nas zanima $|\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$, a on je, prema drugoj tvrdnji prethodnog teorema, jednak

$$\begin{aligned} |\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4| &= |S| - |A_2| - |A_3| - |A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= 333333. \end{aligned}$$

Zadatak 9.2. Odredite broj deranžmana n -članog skupa

Rješenje. Neka je S_n skup svih permutacija n -članog skupa. Nas zanima koliko je permutacija $\pi \in S_n$ takvih da je $\pi(i) \neq i, \forall i$. Uvedimo oznaku $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$

$$\begin{aligned} |S_n| &= n! \\ |A_i| &= (n-1)! \\ |A_i \cap A_j| &= (n-2)! \\ &\vdots \\ |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| &= 1 \end{aligned}$$

Sada korištenjem FUI dolazimo do formule za broj deranžmana

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)!$$

9.2 Glavni zadaci

Zadatak 9.3. Koliko brojeva dijeli barem jedan od brojeva 10^{60} , 20^{50} , 30^{40} ?

Rješenje. Označimo $A = \{d \in \mathbb{N} : d|10^{60}\}$, $B = \{d \in \mathbb{N} : d|20^{50}\}$, $C = \{d \in \mathbb{N} : d|30^{40}\}$. Kako je $10^{60} = 2^{60} \cdot 5^{60}$ svi brojevi iz A su oblika $2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$, uz $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 60$. Zato je $|A| = 61^2$. Istim zaključivanjem nalazimo $|B| = 101 \cdot 51$ i $|C| = 41^3$. Zanima nas i koliko ima brojeva koji su istovremeno i u A i u B . Oni u svom rastavu na proste faktore smiju imati samo dvojke i petice, pri čemu dvojke smije biti najviše 60 (zbog oblika brojeva iz A), a petica najviše 50 (zbog oblika brojeva iz B). Zato je $|A \cap B| = 61 \cdot 51$. Slično je i $|B \cap C| = 41^2$, $|A \cap C| = 41^2$, $|A \cap B \cap C| = 41^2$. Sada prema formuli uključivanja i isključivanja nalazimo $|A \cup B \cup C| = 73001$

Zadatak 9.4. Pustinjom putuje karavana od devet deva. Nakon odmora u oazi, potrebno je promijeniti redoslijed deva tako da niti jedna deva ne hoda iza one deve iza koje je hodala prije dolaska u oazu. Na koliko

je načina to moguće napraviti?

Rješenje. Ako je S skup svih redosljeda deva, a $A_i = \{\text{redosljed u kojem } i\text{-ta deva hoda iza } (i-1) \text{ deve}\}$, $i = 2, \dots, 9$, želimo utvrditi koliko je $|\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_9|$. Znamo da je $|S| = 9!$ i $|A_k| = 8!$, za $2 \leq k \leq 9$ (dvije deve promatramo kao blok). Isto tako znamo da za sve i, j vrijedi $|A_i \cap A_j| = 7!$ (promatramo ili dva bloka od dvije deve i još 5 deva ili, u slučaju da su i i j uzastopni, jedan blok od tri deve i još 6 deva). Sličnim razmišljanjem dolazimo do $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 6!, \dots, |A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_9| = 1$. Zato je traženi broj redosljeda

$$\begin{aligned} |\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_9| &= |S| - \sum_{i=2}^9 |A_i| + \sum_{1 < i < j \leq 9} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^8 \cdot |A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_9| \\ &= 9! - 8 \cdot 8! + \binom{8}{2} \cdot 7! - \binom{8}{3} \cdot 6! + \dots + 1 \\ &= \sum_{k=0}^8 (-1)^k \cdot \binom{8}{k} \cdot (9-k)! \end{aligned}$$

Zadatak 9.5. Na početku nove sezone RK Zagreb potpisuje ugovore s pojačanjima. Na potpisivanje je došlo n rukometaša, svaki u pratnji agenta i liječnika. Na koliko načina možemo tu grupu od $3n$ ljudi rasporediti u tročlane grupe sastavljene od jednog rukometaša, jednog agenta i jednog liječnika, ali tako da nijedan rukometaš nije u grupi s oba svoja pratitelja?

Rješenje. Svih mogućih grupiranja u trojke ima $n!^2$ (rukometaš određuje grupu, a zatim agente i liječnike možemo rasporediti po grupama na $n!$ načina). Neka je A_i skup onih grupiranja u kojima je i -ti rukometaš u grupi sa svojim liječnikom i agentom. Tada je $|A_i| = (n-1)!^2$ (jedna je grupa zadana, brojimo načine na koliko se može sastaviti preostalih $n-1$ grupa), $|A_i \cap A_j| = (n-2)!^2, \dots, |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = 1$. Na kraju je

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n| &= n!^2 - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^n \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \\ &= n!^2 - n \cdot (n-1)!^2 + \binom{n}{2} \cdot (n-2)!^2 - \binom{n}{3} \cdot (n-3)!^2 + \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} 0!^2 \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)!^2 \end{aligned}$$

Definicija 9.3. Eulerova funkcija broja n , $\varphi(n)$, je broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih od n koji s brojem n nemaju zajedničkih djelitelja

Zadatak 9.6. Pronađite izraz za Eulerovu funkciju

Rješenje. Broj n možemo prikazati kao umnožak njegovih prostih faktora, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Neka je A_i skup svih višekratnika broja p_i manjih ili jednakih od n , $1 \leq i \leq k$. Tada je

$$\varphi(n) = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_k| = n - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|,$$

što računamo po formuli uključivanja i isključivanja. Uz

$$\begin{aligned} |A_i| &= \frac{n}{p_i} \\ |A_i \cap A_j| &= \frac{n}{p_i \cdot p_j} \\ &\vdots \\ |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| &= \frac{n}{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k} \end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \dots + \frac{n}{p_k} - \frac{n}{p_1 \cdot p_2} - \frac{n}{p_1 \cdot p_3} - \dots - \frac{n}{p_{k-1} \cdot p_k} + \dots + (-1)^k \cdot \frac{n}{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k} \right) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k} \right) \end{aligned}$$

Zadatak 9.7. Koliko je najkraćih puteva u cjelobrojnoj rešetki od ishodišta do točke $(7, 5)$ koji ne prolaze segmentima $[(2,2), (3,2)]$ i $[(4,2), (4,3)]$?

$$\left[\text{Rj.} \binom{7+5}{7} - \binom{2+2}{2} \cdot \binom{4+3}{4} - \binom{4+2}{2} \cdot \binom{3+2}{2} + \binom{2+2}{2} \cdot 1 \cdot \binom{3+2}{2} \right]$$

Zadatak 9.8. Koristeći formulu uključivanja i isključivanja odredite koliko ima cjelobrojnih rješenja jednačbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$$

uz uvjete: $x_1, x_4, x_5 \geq 0$; $2 \leq x_3 \leq 7$; $2 \leq x_2 \leq 8$.

Dio III

Teorija grafova

10 Osnove teorije grafova i stabla

10.1 Ponavljanje i preliminarni zadaci

Ključni pojmovi: graf, izomorfizam grafova, stupanj vrha, šetnja, put, stablo, povezanost, komponenta povezanosti, razapinjući podgraf, razapinjuće stablo, bipartitan graf

Zadatak 10.1. Je li moguće da u grupi od sedam osoba svaka osoba ima točno tri poznanika?

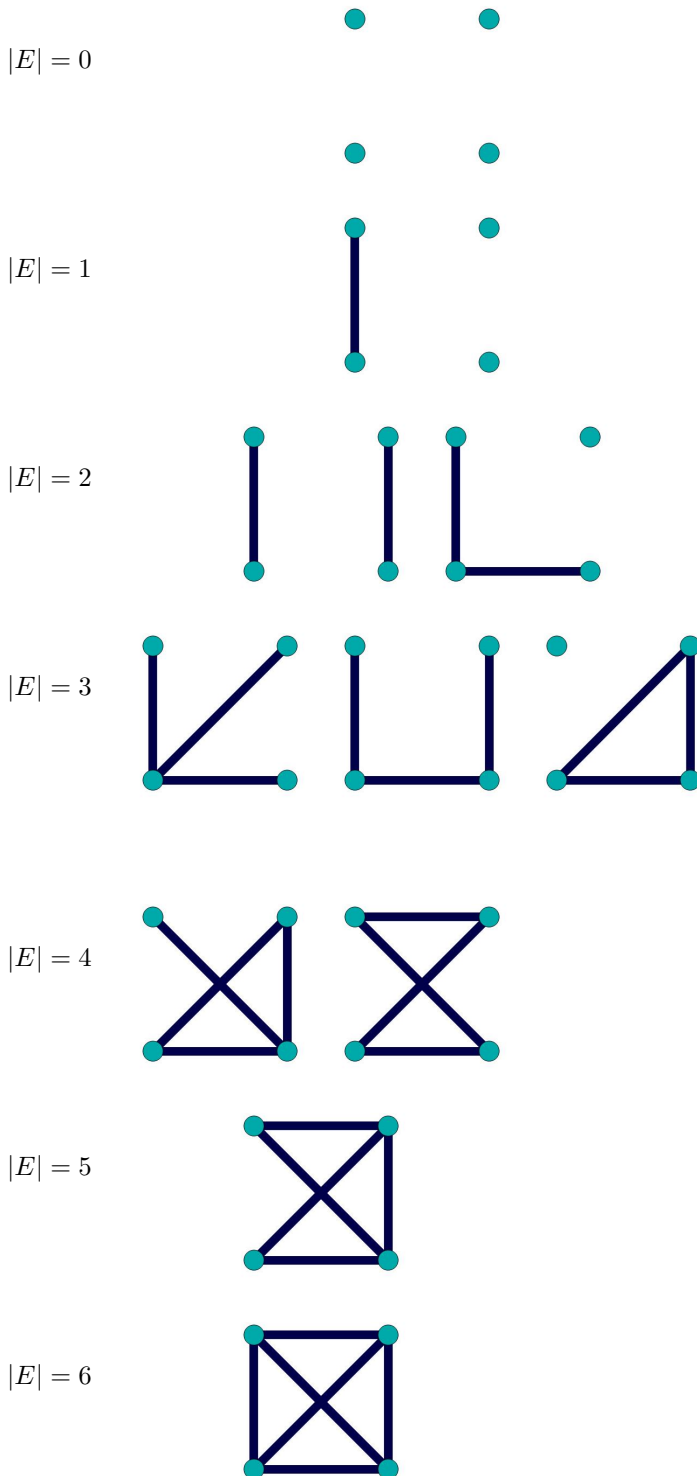
Rješenje. Definirajmo problem u terminima teorije grafova: neka su vrhovi osobe, a poznanstva bridovi (spojimo poznanike bridom). Kada bi svaka osoba imala točno tri poznanika, tada bi stupanj svakog vrha bio tri, tj. $(\forall v \in V) d(v) = 3$, što je u kontradikciji s lemom o rukovanju. Bez korištenja leme o rukovanju iz relacije

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = 7 \cdot 3 = 21,$$

uočavamo da je na lijevoj strani jednakosti paran broj, dok je na desnoj strani neparan broj, pa takav graf ne postoji.

Zadatak 10.2. Ispišite sve klase izomorfizama grafova koji imaju 4 vrha.

Rješenje. Dijelimo na slučajeve ovisno o broju bridova:



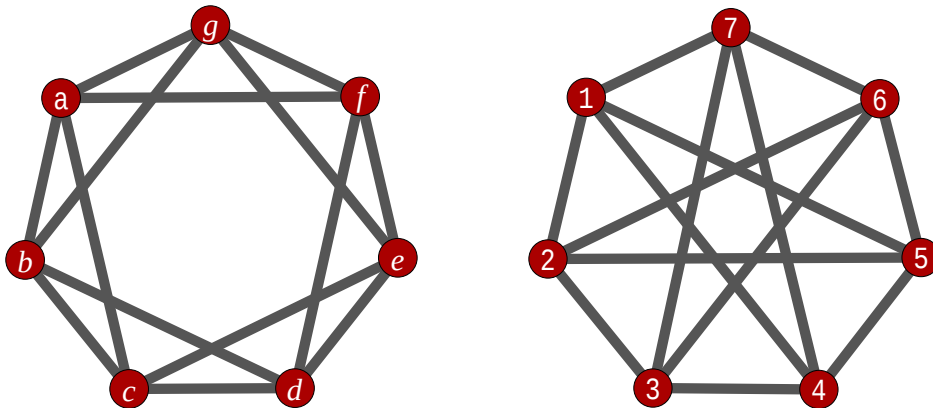
Primijetite da slučaj $|E| = i$ ima istu klasu kao i slučaj $|E| = 6 - i$. To je zato što slučaj $|E| = 6 - i$ dobijemo tako da u slučaju $|E| = i$ sve bridove obrišemo, a sve točke koje nisu bile spojene bridom spojimo.

Zadatak 10.3. Odredite broj označenih multigrafova koji imaju n vrhova i m bridova.

Rješenje. Neka je $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ skup vrhova. Bridovi su parovi oblika $e = \{v_i, v_j\}, i \neq j$, što nam daje $\binom{n}{2}$ mogućnosti. Još preostaje odabrati koliko puta se koji brid pojavljuje u grafu, pa je rješenje, koristeći metodu "kuglica i štapića", $\binom{\binom{n}{2} + m - 1}{m - 1}$.

10.2 Glavni zadaci

Zadatak 10.4. Jesu li sljedeći grafovi izomorfni?

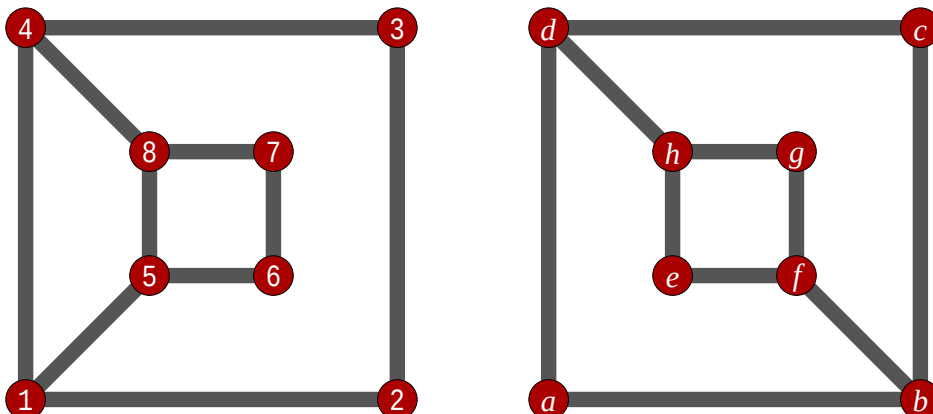


Rješenje. Uzmimo neka se a preslikava u 1 (ovu pretpostavku uzimamo jer su grafovi simetrični tj. svi vrhovi su “ravnopravni”). Kada bi grafovi bili izomorfni moralo bi vrijediti $\{b, c, f, g\} \rightarrow \{2, 4, 5, 7\}$ jer su to susjedni vrhovi vrhu a , odnosno vrhu 1. Promotrimo li inducirani podgraf s vrhovima $\{f, g, b, c\}$ i inducirani podgraf s vrhovima $\{7, 4, 5, 2\}$, uočavamo da bi moralo vrijediti $\{b, g\} \rightarrow \{4, 5\}$ jer su to vrhovi stupnja dva u pripadnim induciranim podgrafovima. Uzmimo $b \mapsto 4$ pa je onda $g \mapsto 5$. Nadalje, b i c su susjedni pa mora biti $c \mapsto 7$, a onda i $f \mapsto 2$. Preostaje nekako pridružiti $\{d, e\} \rightarrow \{3, 6\}$. Stavimo $d \mapsto 3$ jer d nije susjedan s g , a 3 nije susjedan s 5, te naposljetku $e \mapsto 6$. Sada lako provjerimo da je dobiveno preslikavanje zaista izomorfizam, dakle grafovi su izomorfni.

Napomena 10.1. Ako je $\theta: V_1 \rightarrow V_2$ izomorfizam grafova $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$, onda vrijedi

- (1) $|V_1| = |V_2|$
- (2) $|E_1| = |E_2|$
- (3) $\forall v \in V_1 \ d(v) = d(\theta(v))$
- (4) Ako je $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ ciklus duljine n u G_1 , onda je $(\theta(v_0), \theta(v_1), \dots, \theta(v_n))$ ciklus duljine n u G_2 .
- (5) Podgraf od G_1 induciran s $V \subseteq V_1$ izomorfan je s podgrafom od G_2 induciran s $\theta(V) \subseteq V_2$.

Zadatak 10.5. Odredite jesu li sljedeći grafovi izomorfni.



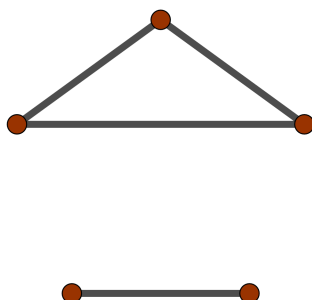
Rješenje. Odmah uočavamo da je broj vrhova i broj bridova isti u oba grafa. Također vidimo da u oba grafa postoje 4 vrha stupnja 2 i 4 vrha stupnja 3. Pokušajmo provjeriti svojstvo 5 iz gornje napomene. Promotrimo inducirani podgraf $G = (\{b, d, f, h\}, \{bf, dh\})$. Vrhovi tog podgraфа su stupnja 3 pa se moraju preslikavati u vrhove $\{1, 4, 5, 8\}$, ali kako god ih preslikali, ta dva inducirana podgraфа neće biti izomorfni (na primjer, prvi ima 2 brida, a drugi 4). Zaključujemo, grafovi nisu izomorfni.

Zadatak 10.6. Koliko ima međusobno neizomornih grafova s 5 vrhova čiji su nizovi stupnjeva (a) $(1, 1, 1, 2, 2)$; (b) $(1, 1, 2, 2, 2)$? Koliko ima takvih povezanih grafova?

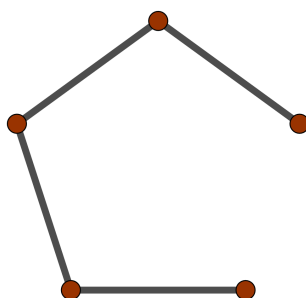
Rješenje. (a) Lema o rukovanju kaže da je zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu paran, a kako je zbroj danih stupnjeva jednak $1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7$, zaključujemo da ne postoji takav graf.

(b) Promotrimo slučajeve ovisno o tome s čime su spojeni vrhovi stupnja 1:

1. slučaj: Vrh stupnja 1 spojen je s drugim vrhom stupnja 1. Tada su preostali vrhovi (oni stupnja 2) spojeni u ciklus i imamo sljedeći graf:



2. slučaj: Vrh stupnja 1 spojen je s vrhom stupnja 2. Tada je i drugi vrh stupnja 1 spojen s vrhom stupnja 2. Kada bi oba vrha stupnja 1 bili spojeni s istim vrhom, preostala 2 vrha morali bi biti spojeni međusobno i tada bi bili stupnja 1, a ne 2, što je u kontradikciji s pretpostavkom zadatka. Dakle, vrhovi stupnja 1 spojeni su s različitim vrhovima stupnja 2. Ostaje nam zadnji vrh stupnja 2 koji onda mora biti spojen s druga dva vrha stupnja 2. Imamo sljedeći graf:



Dakle, imamo 2 neizomorfna takva grafa, od kojih je 1 povezan.

Zadatak 10.7. Dokažite da svaki graf s barem dva vrha sadrži dva vrha jednakog stupnja.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno. Neka je $G = (V, E)$ graf s $n > 1$ vrhova takav da su mu svi vrhovi različitog stupnja. Tada svaki vrh može biti najviše stupnja $n - 1$, a najmanje stupnja 0, to jest $\forall v \in V, d(v) \in \{0, \dots, n - 1\}$. Taj skup ima $n - 1 - 0 + 1 = n$ elemenata. Međutim, primijetimo da graf ne može istodobno imati vrh stupnja 0 i vrh stupnja $n - 1$. Kada bi graf imao vrh stupnja 0 i vrh stupnja $n - 1$, vrh stupnja $n - 1$ bio bi povezan sa svim ostalim vrhovima, pa tako i s vrhom stupnja 0, što je nemoguće. Zaključujemo da ne možemo imati graf s $n > 1$ vrhova takav da mu stupnjevi vrhova poprimaju sve vrijednosti iz skupa $\{0, \dots, n - 1\}$, odnosno mogu poprimiti vrijednosti iz skupa s najviše $n - 1$ elemenata. Kako svakom od n vrhova pridružujemo jednu od $n - 1$ vrijednosti, slijedi da moraju postojati barem dva vrha istog stupnja, što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom.

Zadatak 10.8. Dokažite da je jednostavan graf s n vrhova i strogo više od $\binom{n-1}{2}$ bridova povezan.

Primijetimo da graf H_n koji se sastoji od $(n-1)$ -klike i jednog izoliranog vrha nije povezan, i ima $\binom{n-1}{2}$ bridova, što znači da je prethodni rezultat optimalan. Taj primjer služi kao inspiracija za dokaz. Nadalje, iz dokaza će se lako moći zaključiti da je H_n jedini takav graf.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, neka je $\mathcal{G}$ nepovezan graf s više od $\binom{n-1}{2}$ bridova i n vrhova. Označimo komponente povezanosti s $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m$, te definirajmo $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_1^C = \bigcup_{i=2}^m \mathcal{G}_i$.

$\mathcal{G}_1$ ima najviše bridova ako je potpun graf. Neka $\mathcal{G}_1$ ima x vrhova, tada je $|E(\mathcal{G}_1)| \leq |E(\mathcal{K}_x)|$, također, $|E(\mathcal{G}_1^C)| \leq |E(\mathcal{K}_{n-x})|$.

Tada je $|E| \leq \binom{x}{2} + \binom{n-x}{2} = x^2 - nx + \frac{n^2 - n}{2} =: f(x)$. Budući da je $x \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, i koeficijent uz x^2 strogo pozitivan, $f(x)$ postiže maksimum na rubovima segmenta, no

$$\begin{aligned} f(1) &= \binom{1}{2} + \binom{n-1}{2} = \binom{n-1}{2} \\ f(n-1) &= \binom{n-1}{2} + \binom{1}{2} = \binom{n-1}{2} \\ \Rightarrow \max_{x \in [1, n-1]} f(x) &= \binom{n-1}{2} \Rightarrow |E| \leq \binom{n-1}{2} \Rightarrow \Leftarrow \end{aligned}$$

Graf $G = (V, E)$ nazivamo **bipartitnim** ukoliko se skup V može particionirati u dva skupa A, B tako da svaki brid iz E spaja vrh iz A s vrhom iz B . (Drugim riječima, ako vrhove možemo obojiti u dvije boje na način da nijedan brid nije jednobojan.)

Zadatak 10.9. Dokažite da je graf bipartitan ako i samo ako nema neparan ciklus.

Rješenje. Neka je graf bipartitan, odnosno postoje A i B iz definicije. Pretpostavimo da postoji neparan ciklus $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$, gdje je $k \in 2\mathbb{N} - 1$. BSO možemo pretpostaviti da je $v_0 \in A$; sad je, redom, $v_1 \in B, v_2 \in A, v_3 \in B, \dots, v_k \in B$, no $v_0 = v_k \Rightarrow \Leftarrow$

Za obrat, pokažimo prvo da je svako stablo bipartitno. Počnimo bojenje od proizvoljnog vrha v . Zatim obojimo svaki preostali vrh u ovisno o parnosti duljine jedinstvenog puta od v do u . Time je svaki brid *dvobojan*.

Nadalje, neka graf G nema neparnih ciklusa. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je G povezan (inače dokaz provodimo za svaku komponentu zasebno). Uzmimo razapinjuće stablo T grafa G i obojimo njegove vrhove dvjema bojama kao gore – time je definirano neko bojenje vrhova, i tvrdimo da nijedan brid nije jednobojan. Naime, svaki dodatni brid uv koji nije u T zatvara ciklus u G s jedinstvenim putem između u i v u T , a taj je ciklus nužno parne duljine. To povlači da je put između u i v u T neparne duljine, dakle u i v imaju različite boje.

Napominjemo da je ideja prethodnog dokaza bojiti vrhove od G “pohlepno počevši od v ”, ali u toj varijanti je potrebno dokazati da su sve zatvorene šetnje parne duljine – pokušajte!

Zadatak 10.10. Dokažite da stablo koje ima vrh stupnja d ima barem d listova.

Rješenje.

Pretpostavimo suprotno, da postoji stablo $G = (V, E)$ koje sadrži vrh $v \in V$ stupnja d i koje ima manje od d listova. S predavanja znamo da je $|E| = n - 1$. S druge strane, kako je $2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$ i stablo nema više od $n - 1$ lista, vrijedi ocjena:

$$2(n-1) = \sum_{v \in V} d(v) \geq \underbrace{d}_1 + \underbrace{(d-1) \cdot 1}_2 + \underbrace{(n-d) \cdot 2}_3 = 2n-1 \Rightarrow \Leftarrow$$

- (1) vrh v
- (2) listovi
- (3) preostali vrhovi, za koje pretpostavljamo da niti jedan nije list, dakle, svi su stupnja barem 2 i ima ih $n - d$.

Uz ovo “globalno” rješenje, postoji i alternativno “lokalno” rješenje u kojemu izbrišemo vrh stupnja d . Tada se graf raspada na bar d komponenti jer se svaki od susjeda mora nalaziti u različitoj komponenti, a svaka takva komponenta doprinosi bar jednim listom. Zaista, ako se sastoji samo od tog susjeda, onda je on list u polaznom stablu, a u suprotnom imamo bar dva lista pa će jedan od njih biti list u polaznom stablu.

10.3 Daljnji zadaci

Zadatak 10.11. Za graf $G = (V, E)$ i vrh $v \in V$, sa $G - v$ označavamo podgraf grafa G induciran skupom vrhova $V \setminus \{v\}$. Ako je G povezan graf s barem dva vrha, dokažite da postoje različiti vrhovi x i y iz V takvi da su grafovi $G - x$ i $G - y$ povezani. (Hint: Promotrite listove razapinjućeg stabla.)

Zadatak 10.12. (Ispit 2023.) Koliko ima jednostavnih grafova sa skupom vrhova $\{1, 2, \dots, n\}$ koji nemaju izoliranih vrhova?

Koliko najmanje bridova može imati takav graf? (Hint: Koristite FUI)

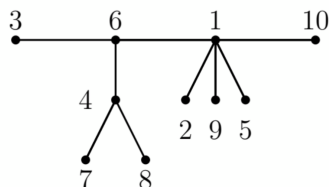
11 Stabla

Ključni pojmovi: stablo, šuma, list, Prüferov kod, težinski graf, minimalno razapinjuće stablo

11.1 Ponavljanje i preliminarni zadaci

Zadatak 11.1.

- a) Odredite Prüferov kod za sljedeće označeno stablo T .



- b) Koliko ima označenih stabala izomorfnih stablu T ? (Ne morate izračunati konačan broj.)
- c) Koje označeno stablo ima Prüferov kod $(5, 1, 1, 7, 7, 5)$?

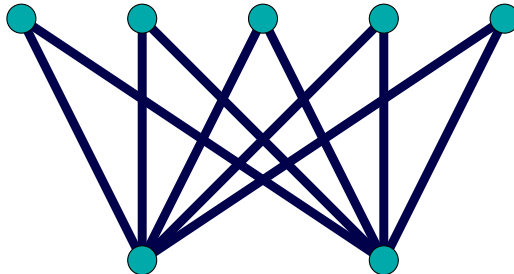
Rješenje.

- a) Pratimo algoritam za traženje Prüferovog koda. Prvo pronalazimo list s najmanjom oznakom, u ovom slučaju to je 2. Zatim u niz dodajemo oznaku njegovog jedinstvenog susjeda, u ovom slučaju 1. I na kraju iz stabla izbacujemo list iz prvog koraka te nastavljamo postupak sve dok stablo sadrži strogo više od 2 vrha. Dakle Prüferov kod ovog stabla je $(1, 6, 1, 4, 4, 6, 1, 1)$.
- b) Pronađimo prvo broj permutacija vrhova koje fiksiraju označeno stablo. Primijetimo da je takvoj permutaciji 1 fiksna točka jer je 1 jedini vrh koji je susjedan četiriju listova. Budući da su 4 i 6 jedini vrhovi stupnja 3, oni se moraju međusobno permutirati. Kako je 6 susjedan s 1, a 4 nije, slijedi da su oba vrha fiksne točke. Vrh 3 se onda mora preslikati u neki list susjedan vrhu 6, a to je jedino vrh 3 pa je i 3 fiksna točka. Vrhovi 7 i 8 se moraju preslikati u listove susjedne vrhu 4, a vrhovi 2, 5, 9, 10 se moraju preslikati u listove susjedne vrhu 1. Takvih permutacija ima $2!4!$, a lako uočavamo da sve one daju stablo jednako početnome. Ukupno postoji $10!$ bijekcija vrhova, od kojih $2!4!$ fiksiraju početno, a time i sva njemu izomorfna stabla, dakle postoji $\frac{10!}{2!4!}$ označenih stabala izomorfnih stablu T .

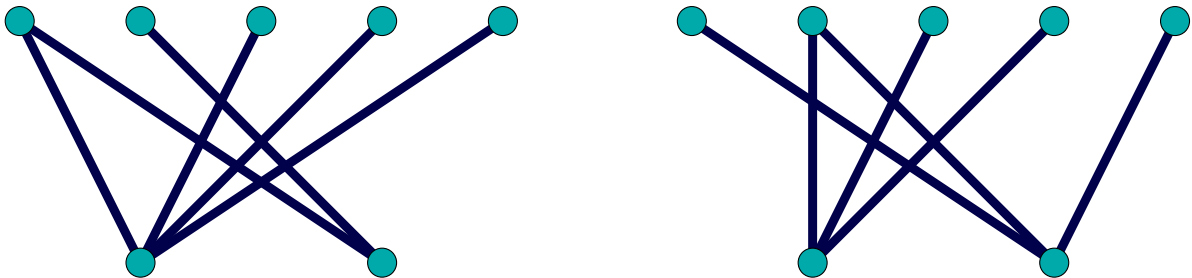
- c) Pratimo algoritam za konstrukciju stabla iz Prüferovog koda $(p_1, \dots, p_8)$. U k -tom koraku pronađemo najmanju neiskorištenu oznaku koja se ne pojavljuje u $(p_k, \dots, p_8)$, u prvom koraku to je 2. Zatim povežemo p_k s tim vrhom i označimo ga kao iskorišten. Nastavljamo postupak te na kraju povežemo preostala dva neiskorištena vrha. Bridovi koje dobivamo algoritmom su redom $(2, 5), (3, 1), (4, 1), (1, 7), (6, 7), (7, 5), (8, 5)$.

Zadatak 11.2. Odredite broj razapinjućih stabala grafa $\mathcal{K}_{2,m}$.

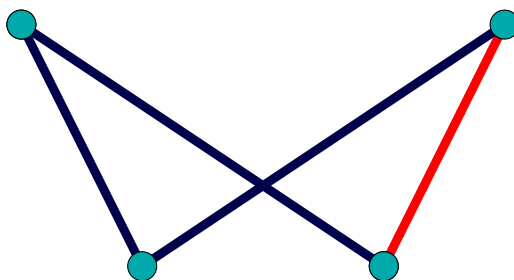
Rješenje. Graf $\mathcal{K}_{2,5}$ prikazan je na sljedećoj slici:



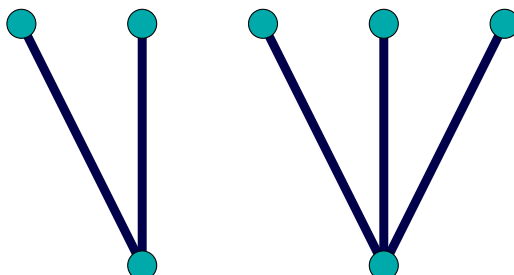
Neka od mogućih razapinjućih stabala su



Neka su A i B klase vrhova grafa veličina 2 i m redom. Kako je $|V| = |A| + |B| = 2 + m$, to razapinjuće stablo ima $m + 1$ brid. Tvrdimo da točno jedan vrh u B ima stupanj 2 u razapinjućem stablu, a ostali su listovi. Naime, nemoguća je situacija



jer bismo imali ciklus, također kad bi svi vrhovi u B bili listovi, onda podgraf ne bi bio povezan:



Vrh stupnja 2 biramo na m načina, za preostalih $m - 1$ vrhova iz B biramo jedan od 2 vrha u A s kojim je spojen. Shodno tome, rješenje je

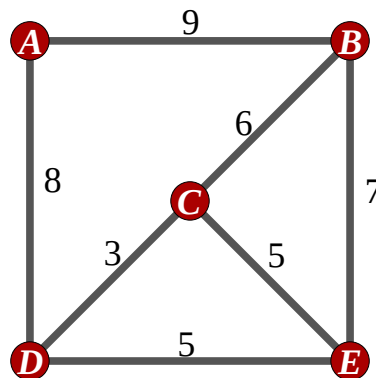
$$m \cdot 2^{m-1}.$$

Napomena 11.1. Zadatak je moguće riješiti i na način da primijetite da je proizvoljno mnogo od 1 do m vrhova iz B spojeno sa jednim vrhom u A , i jedan od tih sa drugim u A , kao i ostali iz B , dakle kao rješenje dobivamo

$$\sum_{k=1}^m k \binom{m}{k} = \sum_{k=1}^m k \cdot \frac{m}{k} \binom{m-1}{k-1} = m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} = m \cdot 2^{m-1}.$$

11.2 Glavni zadaci

Zadatak 11.3. Nađite minimalno razapinjuće stablo za težinski graf sa slike



Rješenje. Koristimo Kruskalov algoritam:

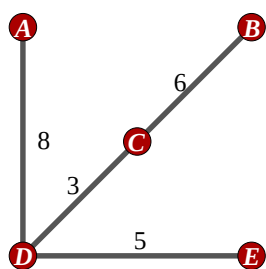
- (1) $S = \emptyset$
- (2) uzimamo brid najmanje težine, $S = \{CD\}$
- (3) možemo uzeti DE ili CE

1° biramo DE , $S = \{CD, DE\}$

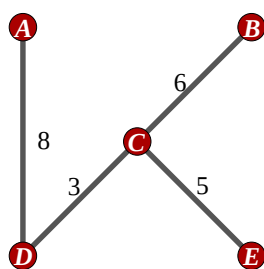
2° biramo CE , $S = \{CD, CE\}$

- (4) 1° ne možemo uzeti CE pa uzimamo CB , $S = \{CD, DE, CB\}$
2° biramo CB , $S = \{CD, CE, CB\}$
- (5) 1° biramo AD , $S = \{CD, DE, CB, AD\}$
2° biramo AD , $S = \{CD, CE, CB, AD\}$

1. slučaj



2. slučaj



Kao što vidimo rješenje nije jedinstveno, i u oba slučaja imamo da suma težina odabranih bridova iznosi 22.

Zadatak 11.4. Riješite zadatak 11.3. Primovim algoritmom polazeći od vrha A .

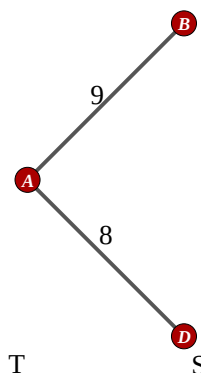
Rješenje. T i F označavaju redom skup vrhova i bridova trenutno izgrađenog stabla, dok je S skup preostalih vrhova. U svakom koraku prikazani su svi bridovi između T i S , odnosno kandidati za idući brid koji odabiremo.

(1)



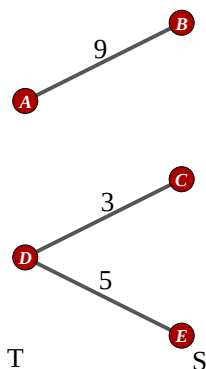
$$\begin{aligned} T &= \{A\} \\ F &= \emptyset \\ S &= \{B, C, D, E\} \end{aligned}$$

(2)



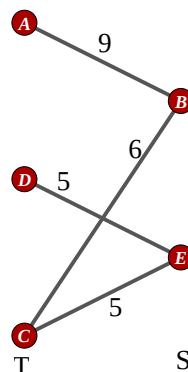
$$\begin{aligned} T &= \{A, D\} \\ F &= \{AD\} \\ S &= \{B, C, E\} \end{aligned}$$

(3)

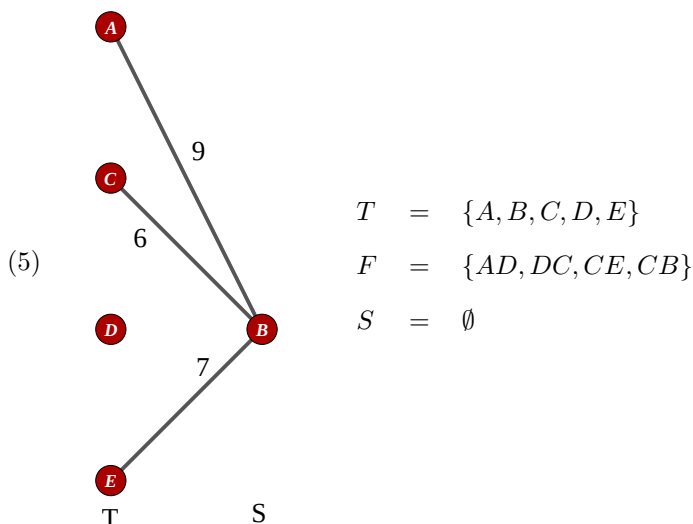


$$\begin{aligned} T &= \{A, C, D\} \\ F &= \{AD, DC\} \\ S &= \{B, E\} \end{aligned}$$

(4)



$$\begin{aligned} T &= \{A, C, D, E\} \\ F &= \{AD, DC, CE\} \\ S &= \{B\} \end{aligned}$$



U ovom smo slučaju dobili isto razapinjuće stablo kao u 2. slučaju kod Kruskalovog algoritma.

Zadatak 11.5. Neka su $n \geq 2$ te $d_1, \dots, d_n$ cijeli brojevi. Dokažite da postoji stablo s nizom stupnjeva $(d_1, \dots, d_n)$ ako i samo ako $d_i \geq 1$ za svaki $1 \leq i \leq n$ te $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$.

Rješenje. Pretpostavimo prvo da postoji stablo s nizom stupnjeva $(d_1, \dots, d_n)$ za $n \geq 2$ i $d_1, \dots, d_n$ cijele brojeve. Kako ovo stablo sadrži barem 2 vrha, a svako stablo je nužno povezano, odmah slijedi da je stupanj svakog vrha barem 1, $d_i \geq 1$ za svaki $1 \leq i \leq n$. Stablo s n vrhova ima točno $n - 1$ bridova pa iz leme o rukovanju slijedi da je $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n - 1)$.

Obrat dokažimo indukcijom. Za bazu uzmimo $n = 2$ pa kako je $d_1 \geq 1$ i $d_2 \geq 1$, a $d_1 + d_2 = 2$ odmah uočavamo da je nužno $d_1 = d_2 = 1$. Lagano vidimo da u stablu sa točno 2 vrha oba vrha imaju stupanj 1 pa postoji traženo stablo. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $n \geq 2$ te dokažimo da za svaki niz $(d_1, \dots, d_n, d_{n+1})$ takav da je $d_i \geq 1$ za svaki $1 \leq i \leq n + 1$ te $\sum_{i=1}^{n+1} d_i = 2n$ postoji stablo s vrhovima odgovarajućeg stupnja. Primijetimo da je neki element niza jednak 1 jer bi inače svaki d_i bio veći ili jednak 2, ali onda bi suma $\sum_{i=1}^{n+1} d_i$ bila veća ili jednaka $2n + 2$, što nije moguće. Također, nisu svi elementi niza jednaki 1 jer inače je $\sum_{i=1}^{n+1} d_i = n + 1 = 2n$, ali to ne može vrijediti jer je $n \geq 2$. Bez smanjenja općenitosti sada možemo pretpostaviti da je $d_{n+1} = 1$ i $d_n \geq 2$. Niz $(d_1, \dots, d_{n-1}, d_n - 1)$ je duljine n i svaki njegov član je veći ili jednak od 1 i njihova suma je upravo $\sum_{i=1}^{n-1} d_i + (d_n - 1) = \sum_{i=1}^{n+1} d_i - 2 = 2n - 2$ pa po pretpostavci indukcije postoji stablo s n vrhova stupnjeva $(d_1, \dots, d_{n-1}, d_n - 1)$. Tom stablu dodamo još jedan vrh koji povežemo samo sa zadnjim vrhom te dobijemo stablo s vrhovima stupnja $(d_1, \dots, d_{n-1}, d_n, 1)$. Time smo dokazali korak indukcije, dakle tvrdnja vrijedi za svaki $n \geq 2$.

Zadatak 11.6. Neka je T stablo te neka su $T_1, \dots, T_k$ podstabla od T . Pretpostavimo da svaka dva podstabla T_i, T_j imaju zajednički vrh. Dokažite da postoji vrh koji je zajednički svim podstablama $T_1, \dots, T_k$.

Napomena. Podstablo je podgraf koji je sam po sebi stablo.

Rješenje. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po broju vrhova stabla T . Ako T ima samo jedan vrh, tvrdnja je trivijalna.

Pretpostavimo da tvrdnja zadatka vrijedi za svako stablo s n vrhova te neka T ima $n + 1$ vrhova. Uzmimo proizvoljan list v stabla T te promotrimo dva slučaja. Ako je list v sadržan u svim podstablama $T_1, \dots, T_k$, onda je to taj traženi vrh. U protivnom, izbacimo v iz stabala, odnosno promotrimo stablo $T - v$ i podstabla $T_1 - v, \dots, T_k - v$. To možemo napraviti jer svako stablo sadrži neki vrh osim v ; naime kad bi neko podstablo T_i sadržavalo samo vrh v onda bi zbog pretpostavke zadatka svako podstablo T_j sadržavalo vrh v , no to je suprotno pretpostavci ovog slučaja. Dokažimo da svaka dva podstabla $T_i - v$ i $T_j - v$ imaju zajednički vrh. Kada bi postojala dva podstabla $T_i - v$ i $T_j - v$ koja nemaju zajednički vrh, onda, budući da T_i i T_j imaju zajednički vrh, taj zajednički vrh je upravo v . No, kako podstabla T_i i T_j moraju sadržavati neki vrh različit od v onda, zbog povezanosti stabla, moraju sadržavati susjeda od v , što je u kontradikciji s pretpostavkom da $T_i - v$ i $T_j - v$ nemaju zajednički vrh. No sada, kako $T - v$ ima n vrhova, iz pretpostavke indukcije dobivamo da podsta-

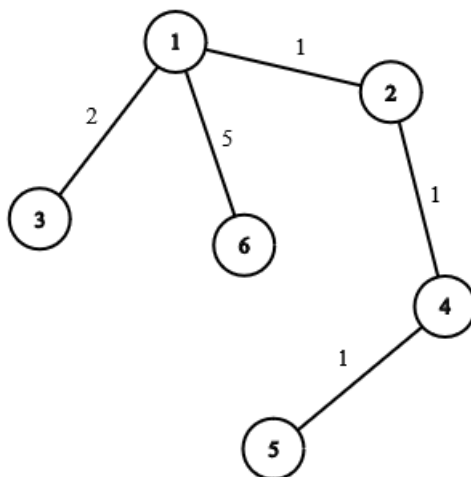
bla $T_1 \setminus -v, \dots, T_k - v$ imaju zajednički vrh, a onda naravno i podstabla $T_1, \dots, T_k$ također imaju zajednički vrh.

Zadatak 11.7. (2. kolokvij 2022.) Zadan je graf $G = (V, E)$ sa skupom $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Za svaki $a, b \in V, a \neq b$, vrhovi a i b spojeni su bridom težine

$$\omega(\{a, b\}) = ((ab + 4) \pmod{6}) + 1,$$

gdje je sa $r \pmod{6}$ označen ostatak pri dijeljenju broja r sa 6. Kruskalovim algoritmom odredite te skicirajte jedno razapinjajuće stablo od G minimalne težine. Koliko ima takvih stabla? Ako postoji minimalno razapinjajuće stablo u kojem je vrh 1 stupnja 3, odredite Prüferov kod tog stabla.

Rješenje. Bridovi minimalne težine 1 su $(1, 2)$, $(2, 4)$ i $(4, 5)$ pa u prvom koraku odabiremo jedan od njih. U drugom koraku i dalje postoji brid težine 1 koji možemo dodati u minimalno razapinjajuće stablo pa biramo jedan od preostalih bridova težine 1, a i u trećem koraku također možemo dodati zadnji brid težine jedan. Dakle neovisno o poretku odabira, jedina mogućnost nakon trećeg koraka je da su dodani točno bridovi $(1, 2)$, $(2, 4)$ i $(4, 5)$. Sada su bridovi najmanje težine $(1, 3)$, $(3, 5)$, oba težine 2. Nakon četvrtog koraka mogućnosti su $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(1, 3)$ i $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$, $(3, 5)$. Peti korak možemo skratiti tako da primijetimo da neovisno o slučaju iz četvrtog koraka moramo dodati brid koji sadrži vrh 6, a svi takvi bridovi imaju težinu 5. Dakle za svaku od 2 mogućnosti iz četvrtog koraka na 5 načina možemo dovršiti Kruskalov algoritam pa, budući da su svih 10 rezultata različiti, postoji 10 različitih minimalnih razapinjajućih stabala. Jedno minimalno razapinjajuće stablo je:



Vrh 1 ima stupanj 3 u ovom stablu pa pronadimo Prüferov kod za ovo stablo. Listovi najmanje oznake će redom biti 3, 5, 4, 2. Dakle Prüferov kod ovog stabla je $(1, 4, 2, 1)$.

Napomena. U rješenju prethodnog zadatka prešutno smo koristili činjenicu da je *svako* minimalno razapinjajuće stablo moguće generirati Kruskalovim algoritmom (uz odgovarajući međusobni poredak bridova jednake težine). Pokušajte za vježbu dokazati/uvjeriti se u tu činjenicu.

Uputa. Za dano minimalno razapinjajuće stablo T , bridove jednake težine poredajte tako da prvo dolaze oni koji se nalaze u T . Potom indukcijom dokažite da će Kruskalov algoritam uzeti određeni brid ako i samo ako se on nalazi u T .

12 Planarni grafovi

Ključni pojmovi: Ulaganje, planarnost, Eulerova formula, subdivizija

12.1 Ponavljanje i preliminarni zadaci

Zadatak 12.1. Dokaži da jednostavan, povezan, planaran graf s n vrhova ima najviše $3n - 6$ bridova.

Rješenje. Iz toga što je graf jednostavan, zaključujemo da vrijedi $d(f) \geq 3, \forall f \in F$.

$$2 \cdot |E| = \sum_{f \in F} d(f) \geq 3 \cdot |F| \Rightarrow |F| \leq \frac{2}{3} |E|$$

Uvrstivši to u Eulerovu formulu, dobivamo

$$2 + |E| = |V| + |F| \leq n + \frac{2}{3}|E|$$

$$\frac{1}{3}|E| \leq n - 2 \Rightarrow |E| \leq 3n - 6$$

Zadatak 12.2. Dokaži da jednostavan, povezan, planaran i bipartitan graf s n vrhova ima najviše $2n - 4$ bridova.

Rješenje. Graf je bipartitan ako i samo ako nema ciklus neparne duljine pa je $d(f) \geq 4, \forall f \in F$. Dalje vrijedi

$$2 \cdot |E| = \sum_{f \in F} d(f) \geq 4 \cdot |F| \Rightarrow |F| \leq \frac{|E|}{2}$$

$$2 + |E| = |V| + |F| \leq n + \frac{|E|}{2} \Rightarrow |E| \leq 2n - 4$$

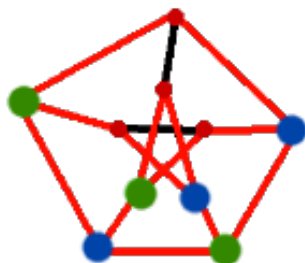
Definicija 12.1. Subdivizija brida $\{A, B\}$ je dodavanje u graf vrh C i zamjena brida $\{A, B\}$ bridovima $\{A, C\}$ i $\{C, B\}$. Subdivizija grafa $\mathcal{G}$ je graf $\mathcal{H}$ dobiven rekursivnom subdivizijom bridova polaznog grafa.

Teorem 12.2. (Kuratowski)

Graf je planaran ako i samo ako ne sadrži subdiviziju od K_5 ili subdiviziju od $K_{3,3}$ kao podgraf.

Primjer 12.3. Nađite subdiviziju $K_{3,3}$ u Petersenovom grafu.

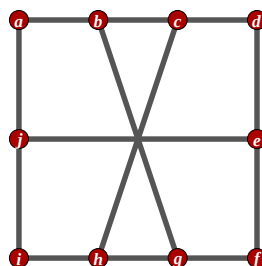
Rješenje. V. Sliku 1



Slika 1: Subdivizija $K_{3,3}$ kao podgraf Petersenovog grafa: plavi i zeleni vrhovi predstavljaju vrhove na dvjema stranama grafa $K_{3,3}$; crveni bridovi su bridovi subdivizije.

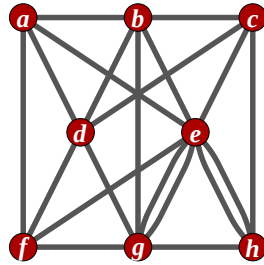
12.2 Glavni zadaci

Zadatak 12.4. Odredite je li graf na slici planaran.



Rješenje. Promatramo možemo li brisanjem nekih vrhova stupnja dva doći do $\mathcal{K}_{3,3}$ ili $\mathcal{K}_5$ (tada se možemo pozvati na teorem Kuratowskog). Uklonimo li vrhove a, d, i i f dobivamo zaista $\mathcal{K}_{3,3}$ i zato je graf neplanaran.

Zadatak 12.5. Odredite je li graf na slici planaran.



Rješenje. Promotrimo graf dobiven uklanjanjem vrhova f i h . Svaki od vrhova a, c, g povezan je sa svakim od vrhova b, d, e pa početni graf ima podgraf $\mathcal{K}_{3,3}$. Zaključujemo da graf sa slike nije planaran. Naglasimo da u ovom slučaju nije potreban ni teorem Kuratowskog, jer, naravno, dodavanjem vrhova i bridova neplanarnom grafu $\mathcal{K}_{3,3}$ ne možemo dobiti planarni graf.

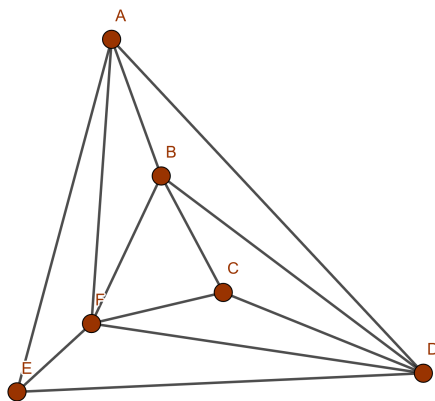
Zadatak 12.6. (2. kolokvij 2015.) Neka je G graf dobiven iz potpunog grafa $\mathcal{K}_6$ brisanjem dva brida. Dokažite da G nije planaran. Nadalje, što možete reći u slučaju da smo obrisali tri brida; je li takav graf uvijek planaran, ili uvijek neplanaran, ili nijedno od toga?

Rješenje. Pretpostavimo da je G planaran. Vrijedi $|V| = 6, |E| = \binom{6}{2} - 2 = 13$. Po Eulerovoj je formuli $|F| = 2 - |V| + |E| = 2 - 6 + 13 = 9$. Kako je graf jednostavan, vrijedi $d(f) \geq 3, \forall f \in F$. Sada je

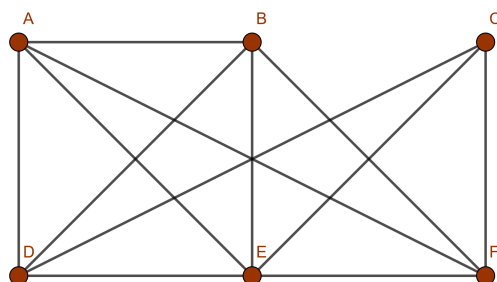
$$26 = 2 \cdot |E| = \sum_{f \in F} d(f) \geq 3 \cdot |F| = 27,$$

što je očito kontradikcija. Dakle, G nije planaran.

Brisanjem tri brida možemo dobiti graf koji je planaran ili nije planaran. Primjer takvog planarnog grafa slijedi.



Primjer grafa koji nije planaran slijedi.

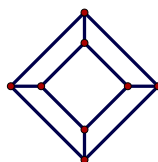


U gornjem grafu svaki od vrhova A, B, C povezan je sa svakim od vrhova D, E, F pa graf ima $K_{3,3}$ za podgraf. Dakle, gornji graf nije planaran.

Definicija 12.3. Tijelo nazivamo **Arhimedovim** ako je svaki vrh istog stupnja i istog tipa (tj. tijelo je jednako iz perspektive svih vrhova) te ako su strane tijela dvije vrste pravilnih mnogokuta (stupanj vrha je broj bridova koji iz njega *izlaze*).

Napomena 12.4. Na predavanju smo vidjeli da svakom tijelu možemo pridružiti graf. Tijelo *spljoštimo* u ravninu tako da crtamo što vidimo gledajući kroz gornju plohu. Odatle i naziv *strane* za područja u grafu. Na

primjer, kocka predstavljena grafom izgleda ovako.



Zadatak 12.7. Odredite sva Arhimedova tijela čije su stranice pravilni peterokuti i šesterokuti.

Rješenje. Označimo s n broj peterokuta, a s m broj šesterokuta. Stupanj svakog vrha je tri (Kod geometrijskih je tijela stupanj svakog vrha barem tri. Unutarnji kut u pravilnom peterokutu iznosi 108° , a u pravilnom šesterokutu 120° . Kad bi stupanj nekog vrha bio veći od tri, najmanji mogući zbroj kutova uz taj vrh bio bi $4 \cdot 108^\circ > 360^\circ$, što nije moguće). Kako je tijelo simetrično, svi su vrhovi isti: u njima se sastaju ili dva peterokuta i šesterokut, ili dva šesterokuta i peterokut. Prvi slučaj otpada; naime, promatrajmo neki peterokut i mnogokute koji ga okružuju. Tih pet mnogokuta bi trebali biti naizmjenice peterokuti i šesterokuti, što je nemoguće budući da je pet neparan broj. Dakle, bavimo se prvi slučajem, pa vrijedi $|V| = 5 \cdot n = 6 \cdot \frac{m}{2}$. Nadalje, imamo

$$\sum_{v \in V} d(v) = 3|V| = 2|E| = \sum_{f \in F} d(f) = 5n + 6m,$$

te $|F| = n + m$. Iz Eulerove formule slijedi:

$$\begin{aligned} 2 + |E| &= |F| + |V| \\ 2 + \frac{5n + 6m}{2} &= n + m + \frac{5n + 6m}{3} \\ \Rightarrow n &= 12, m = 20 \end{aligned}$$

Radi se zapravo o staromodnoj lopti ili o modelu molekule fulerena C_{60} .



12.3 Daljnji zadaci

Zadatak 12.8. (2. kolokvij 2017.) Dokažite da svaki planaran graf ima barem jedan vrh kojemu je stupanj najviše 5.

Zadatak 12.9. (2. kolokvij 2018.) Koliko najviše bridova možemo dodati stablu s n vrhova tako da novi planaran graf i dalje ostane jednostavan planaran graf?

13 Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Ključni pojmovi: Eulerova šetnja, Eulerova tura, Hamiltonov ciklus.

13.1 Ponavljanje i preliminarni zadaci

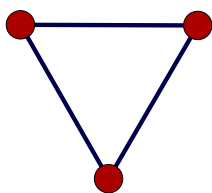
Lema 13.1. Ukoliko u Hamiltonovom grafu postoji vrh stupnja dva, tada oba brida s njim incidentna moraju biti dio Hamiltonovog ciklusa.

Dokaz. Predstavimo Hamiltonov ciklus kao (orijentiran, kružni) slijed vrhova $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$. Vrh v_i ima prethodnika i sljedbenika. Dakle, za svaki vrh, točno dva brida incidentna s njim dio su Hamiltonovog ciklusa. Ako je v_i stupnja dva, to su i jedina dva brida koja iz njega *izlaze*. ■

U sljedećim zadacima provjerite postoje li:

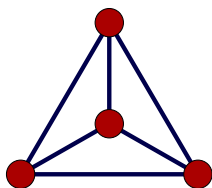
1. Eulerova tura
2. Eulerova šetnja
3. Hamiltonov ciklus

Zadatak 13.1.



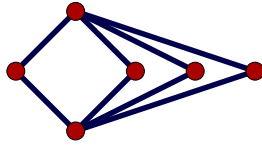
Rješenje. DA, DA, DA

Zadatak 13.2.



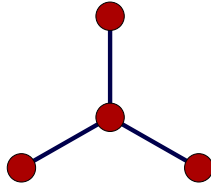
Rješenje. NE, NE, DA. Stupanj svakog vrha je tri $\Rightarrow$ ne postoje Eulerova šetnja ni Eulerova tura (četiri vrha neparnog stupnja). Hamiltonov ciklus postoji.

Zadatak 13.3.



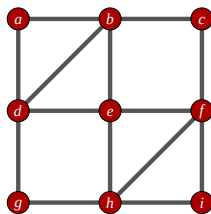
Rješenje. DA, DA, NE. Stupanj svakog vrha je paran: graf jest Eulerov. Ipak, nije Hamiltonov. (**Lema 13.1.** povlači da bi svi bridovi trebali biti uključeni u ciklus H , ali tada imamo vrhove sa $d_H(v) = 4$.)

Zadatak 13.4.



Rješenje. NE, NE, NE. Graf nije ni Eulerov ni Hamiltonov

Zadatak 13.5.

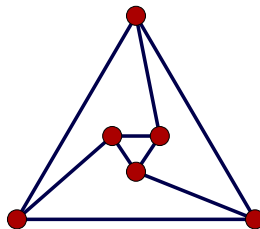


Rješenje. DA, DA, NE. Eulerova tura ide po vrhovima:

$$a - b - c - f - i - h - g - d - e - f - h - e - b - d - a$$

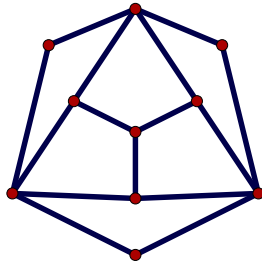
Tvrdimo da ne postoji Hamiltonov ciklus. Ako postoji vrh stupnja dva, tada se, prema **Lemi 13.1.** u Hamiltonovom ciklusu moraju pojaviti oba brida incidentna s tim vrhom. Promatramo vrh a . Bez smanjenja općenitosti, krenemo od a do b . Sada moramo u c (jer je stupnja dva) i zatim u f . Sada moramo u i pa u h . Nakon toga je jasno da ne možemo obići oba vrha g i e i vratiti se u a ; g je stupnja dva pa bi morali nastaviti u njega i zatim u d , a nakon d moramo u a što bi izostavilo vrh e .

Zadatak 13.6.

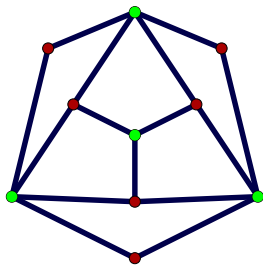


Rješenje. NE, NE, DA. Graf ne sadrži Eulerovu šetnju (više od dva vrha su neparnog stupnja), ali, prema Diracovom uvjetu, jest Hamiltonov.

Zadatak 13.7.



Rješenje. NE, NE, NE. Graf ne sadrži Eulerovu šetnju (četiri vrha su neparnog stupnja). Primijetimo da se radi o bipartitnom grafu i da je $|A| = 4, |B| = 6$ pa zato (kao što će biti dokazano u sljedećoj lemi) nije Hamiltonov.



Lema 13.2. Za bipartitan i Hamiltonov graf, čiji je skup vrhova V particioniran u skupove A i B , vrijedi $|A| = |B|$.

Dokaz. Neka je $a_1, a_2 \dots a_n, a_1$ Hamiltonov ciklus i neka je $a_i \in A$, za i neparan te $a_i \in B$, za i paran. $\Rightarrow n$ je paran jer su a_n i a_1 susjedni, a kako se vrhovi iz A i oni iz B redaju naizmjenice, $|A| = |B|$. ■

13.2 Glavni zadaci

Zadatak 13.8. Dokažite da je graf s n vrhova i barem $\binom{n-1}{2} + 2$ bridova Hamiltonov.

Rješenje. Pokazat ćemo da su zadovoljeni uvjeti Oreovog teorema. Promatrajmo neka dva nesusjedna vrha A i B . Neka je $\mathcal{G}'$ dobiven od $\mathcal{G}$ izbacivanjem A i B i svih njihovih bridova.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{2} + 2 &\leq |E| \\ &= |E'| + d(a) + d(b) \\ &\leq |K_{n-2}| + d(a) + d(b) \\ &= \binom{n-2}{2} + d(a) + d(b) \\ d(a) + d(b) &\geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = n \end{aligned}$$

Zadatak 13.9. Miš gricka put kroz $3 \times 3 \times 3$ kocku sira grickajući svih 27 1×1 kockica. Ako miš počne grickati u kutu i uvijek se pomiče za po jednu susjednu kockicu, može li na kraju doći u sredinu? (Susjedne su kockice one koje dijele jednu stranu.)

Rješenje. Opišimo problem pomoću grafa: 27 vrhova (svakoj gradivnoj kockici odgovara jedan), a bridovi

postoje između onih koje predstavljaju susjedne kockice. Ako s v_1 označimo vrh koji odgovara kockici u kutu, a s v_k vrh koji odgovara onoj u sredini, sveli smo problem na traženje Hamiltonovog puta u grafu, s rubnim točkama v_1 i v_k . Obojimo vrhove crno-bijelo, tako da su susjedni vrhovi različite boje (to je moguće, u grafu nema neparnog ciklusa!) i pretpostavimo da Hamiltonov put postoji. On je se sastoji od 27 vrhova i 26 bridova, sastavljen naizmjenice od crnih i bijelih vrhova. To znači da bi početni i krajnji vrh tog puta trebali biti iste boje, a nije tako. Kontradikcija.

Alternativno: Budući da graf nema neparnog ciklusa, on je bipartitan, recimo da je particioniran u skupove A , B . Primijetimo, pomoću bojanja, da su vrhovi v_1 i v_k u različitim skupovima A i B pa dodavanjem brida između v_1 i v_k graf ostaje bipartitan. Kada bi postojao Hamiltonov put od v_1 do v_k u grafu prije dodavanja brida onda bi postojao i Hamiltonov ciklus nakon dodavanja brida, no to bi značilo prema **Lemi 13.2.** da je $|A| = |B|$, a budući da je $|A| + |B| = 27$ neparan, to nije moguće.

Zadatak 13.10. Na teniskom turniru sudjeluje n igrača. Svaka dva igrača međusobno igraju točno jedan meč, u kojemu jedan od njih pobjeđuje (u tenisu nema neriješenih ishoda). Dokažite da je moguće poredati svih n igrača u niz tako da je svaki igrač osim zadnjeg pobijedio onog koji se nalazi neposredno nakon njega u nizu.

Rješenje. Modelirajmo zadatak grafom u kojem vrhovi predstavljaju igrače, a usmjereni bridovi predstavljaju rezultat meča među dana dva igrača (brid ide iz pobjednika u gubitnika). Trebamo dokazati da u ovakvom, potpuno usmjerenom grafu odnosno turniru, postoji Hamiltonov put.

Za bazu indukcije uzmimo $n = 1$, tada očito postoji Hamiltonov put. Pretpostavimo da u svakom turniru veličine $n - 1$ postoji Hamiltonov put. Uzmimo proizvoljan turnir veličine n i izbacimo jedan vrh i sve bridove incidentne njemu pa nam preostaje turnir veličine $n - 1$ i označimo neki njegov Hamiltonov put s $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$. Označimo s v_n vrh koji smo izbacili iz originalnog turnira. Kada u njemu ne bi postojao Hamiltonov put, to bi značilo da je brid između v_1 i v_n usmjeren iz v_1 u v_n ; inače je $v_n, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ Hamiltonov put. Slično, kada bi postojao usmjereni brid iz v_n u v_2 , onda bi $v_1, v_n, v_2, \dots, v_{n-1}$ bio Hamiltonov put, dakle brid je usmjeren iz v_2 u v_n . Induktivno zaključujemo da za svaki $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ postoji usmjereni brid iz v_k u v_n , no tada je $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ Hamiltonov put. Dakle, u svakom turniru postoji Hamiltonov put i taj put određuje poredak n igrača takav da je svaki igrač osim zadnjeg pobijedio onog koji se nalazi neposredno nakon njega u nizu.

Zadatak 13.11. U jednom gradu postoji nekoliko trgova i ulica, pri čemu svaka ulica izravno povezuje neka dva trga. Dosad se svakom ulicom promet odvijao u oba smjera, no gradonačelnik je odlučio tome stati na kraj tako što će svaku ulicu proglasiti jednosmjernom (time će se promet njome moći odvijati samo u jednom od dva moguća smjera). Dokažite da on to može napraviti tako da se, za svaki trg, broj ulica kojima je moguće ući na taj trg i broj onih kojima je moguće izaći s njega razlikuju za najviše 1.

Rješenje. Neka vrhovi grafa predstavljaju trgove, a bridovi ulice. Trebamo usmjeriti bridove tako da je apsolutna razlika ulaznog i izlaznog stupnja svakog vrha najviše 1. Kako u neusmjerenom grafu postoji paran broj vrhova s neparnim stupnjem (radi Leme o rukovanju), možemo upariti takve vrhove u disjunktne parove i dodati još jedan brid među njima. Sada su svi vrhovi parnog stupnja. Dakle, u svakoj povezanoj komponenti postoji Eulerova tura. Za neku povezanu komponentu odaberimo proizvoljnu Eulerovu turu i proizvoljnu orijentaciju te usmjerimo bridove po toj orijentaciji. Sada je jasno da svaki vrh ima jednak ulazni i izlazni stupanj, no još moramo i izbrisati dodane bridove. Kako smo svakom vrhu dodali najviše jedan brid, apsolutna razlika izlaznog i ulaznog stupnja se brisanjem dodanih vrhova promijeni za najviše 1.

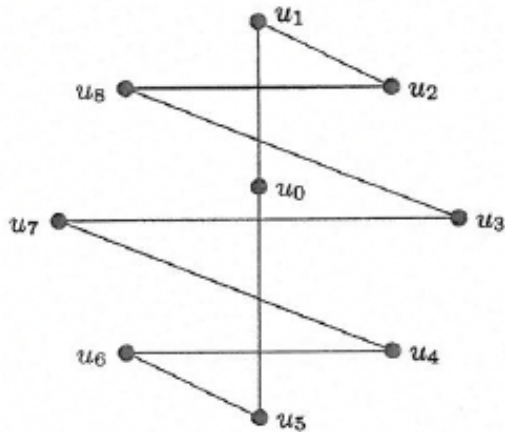
Zadatak 13.12. Dokaži da se za svaki neparan $n \geq 3$ bridovi potpunog grafa $\mathcal{K}_n$ mogu prekriti s $\frac{n-1}{2}$ Hamiltonovih ciklusa bez zajedničkih bridova.

Rješenje. Označimo jedan vrh s v , a ostale s $0, 1, 2, \dots, 2k - 1$ za $n = 2k + 1$. Jedan Hamiltonov ciklus dan je s $v, 0, 1, 2k - 1, 2, 2k - 2, \dots, k - 1, k + 1, k$. Dokazat ćemo da su Hamiltonovi ciklusi $(\alpha_r) = (v, 0 + r, 1 + r, 2k - 1 + r, 2 + r, 2k - 2 + r, \dots, k - 1 + r, k + 1 + r, k + r)$, za svaki $r \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$, gdje zbrajanje gledamo modulo $2k$ odnosno identificiramo $0 \equiv 2k, 1 \equiv 2k + 1, \dots, 2k - 1 \equiv 2k - 1$, disjunktne. Jasno je da je v spojen s r i $k + r$ u (α_r) pa je svaki njegov brid iskorišten točno jednom.

Za proizvoljne $i \neq j \in \{0, 1, \dots, 2k - 1\}$ dokažimo da su susjedni u najviše jednom (α_r) . Promotrimo prvo razlike oznaka susjednih vrhova u α_r modulo $2k$ te uočimo da su te razlike, neovisno o r , redom jednake $1, 2k - 2, 3, 2k - 4, 5, 2k - 6, \dots, 2k - 3, 2, 2k - 1$. Svaki broj iz $\{1, 2, \dots, 2k - 1\}$ se pojavljuje točno jedanput, što znači da se j može pojaviti odmah nakon i u maksimalno jednom (α_r) pa još samo trebamo dokazati da ako se j pojavljuje odmah nakon i u nekom (α_r) onda se i ne pojavljuje odmah nakon j u niti jednom (α_r) . Pretpostavimo suprotno, odnosno da su u nekom (α_{r_1}) i (α_{r_2}) vrhovi i i j susjedni te označimo s x poziciju vrha

i u (α_{r_1}) i s y poziciju od i u (α_{r_2}) . Tada iz niza razlika dobijemo da je $y = 2k + 3 - x$. No po definiciji od (α_{r_1}) imamo da je $(\alpha_{r_1})_x - (\alpha_{r_1})_y \equiv k \pmod{2k}$. Također vrijedi $(\alpha_{r_2})_y - (\alpha_{r_1})_y \equiv r_2 - r_1 \pmod{2k}$ iz čega slijedi da je $k \equiv r_2 - r_1 \pmod{2k}$. No to nije istina jer $r_1, r_2 \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Dakle, danih $\frac{n-1}{2}$ Hamiltonovih ciklusa su disjunktni.

Ovu konstrukciju možemo interpretirati kao rotaciju Hamiltonovog ciklusa na pravilnom $2k$ -terokutu sa središtem (vrh $v = u_0$).



Zadatak 13.13. (2. kolokvij 2021.)

- Neka je G povezan graf s n vrhova. Koji je najmanji $k \in \mathbb{N}$ takav da dodavanjem k bridova u G možemo uvijek dobiti Eulerov graf (koji može biti i multigraf)? Nađite primjer grafa G kojemu je potrebno dodati točno k bridova.
- Graf $G = (V, E)$ je Hamiltonov graf i $|V| \geq 4$. Uklonimo li brid $e \in E$, dobivamo graf $G - e$. Dokažite da dodavanjem najviše dvaju novih bridova $f, h \notin E$ grafu $G - e$, možemo dobiti Hamiltonov graf (možemo dodati 0, 1 ili 2 nova brida). Navedite primjer Hamiltonova grafa G za kojeg je nužno potrebno dodati barem dva nova brida grafu $G - e$ da bismo dobili Hamiltonov graf.

Rješenje.

- Budući da je povezan graf Eulerov ako i samo ako su svi vrhovi parnog stupnja, a dodavanjem jednog brida možemo promijeniti stupanj najviše dvaju vrhova, jasno je da broj dodanih bridova treba biti barem polovica broja vrhova neparnog stupnja. Iz Leme o rukovanju slijedi da postoji paran broj vrhova neparnog stupnja pa takve vrhove možemo upariti i dodati po jedan brid među uparenih vrhova. Dakle k je točno polovica broja vrhova s neparnim stupnjem, što je najviše $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Za primjer grafa u kojem je k točno $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ povežimo jedan vrh sa svim ostalima. Odnosno neka je $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), \dots, (v_1, v_n)\}$. Ako je n paran svi vrhovi su neparnog stupnja, a ako je neparan svi vrhovi osim v_1 su neparnog stupnja, dakle $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- Neka je $n = |V|$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n, v_1$ Hamiltonov ciklus i $e = (v_n, v_1)$. Dodajmo bridove $(v_1, v_{n-1}), (v_2, v_n)$, ako već nisu u E . Primijetite da v_1, v_2, v_{n-1}, v_n sigurno postoje i različiti su jer $n \geq 4$. S ovim novim bridovima imamo Hamiltonov ciklus

$$v_1, v_{n-1}, v_n, v_2, v_3, v_4, \dots, v_{n-2}, v_n.$$

Za primjer uzmimo $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$. Kako svaki vrh ovakvog grafa ima stupanj jedan koji god brid izbrisemo postojat će dva vrha kojima je novi stupanj jednak jedan. Kako ne smijemo dodati isti brid primjećujemo da nakon dodavanja samo jednog brida barem jedan od ta dva vrha će i dalje biti stupnja 1. No kada bi takav graf bio Hamiltonov njegov stupanj bi morao biti barem 2 tako je nužno dodati barem dva nova brida da bismo dobili Hamiltonov graf.

13.3 Daljnji zadaci

Zadatak 13.14. (*2. kolokvij 2017.*) Koliko najmanje bridova mora imati jednostavni graf sa 7 vrhova tako da sigurno možemo zaključiti da je Hamiltonov?